اندیشه ریاضی

تألیف : ب. آ. کوردمسکی

ترجمهٔ پرویز شهریاری

کتابهای سیمرغ

۹۱

ب.آ.کورد مسکی

Кордемский Борис Анастасьевич

۹۱

اندیشهٔ ریاضی

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СМЕКАЛКА

ترجمه : پرویز شهریاری

وابسته به مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر

کورد مسکی. ب.آ.
اندیشهٔ ریاضی
ترجمهٔ پرویز شهریاری
چاپ اول: ۲۵۳۵ شاهنشاهی
چاپ: چاپخانه رامین، تهران
شمارهٔ ثبت کتابخانهٔ ملی: ۴۹۱—۲۵۳۵/۴/۱۵
حق چاپ محفوظ است.

پیش‌گفتار

آدمی، درفعالیتهای خلاقهٔ خود،هنگامی که‌کارمی‌کند، چیزیادمی‌گیرد ویا بازی می‌کند، به تیزهوشی،حاضرجوابی، قدرت حدس زدن و استدلال‌کردن یعنی به طور خلاصه، به **اندیشه** نیاز دارد. اندیشه را می‌توان،با تمرین‌تدریجی و منظم، تربیت‌کرد وتکامل داد. بهترین راهی که برای این تمرین وجود دارد، عبارتست ازحل مسأله‌های ریاضی، چه مسأله‌هایی‌که در دورهٔ دبیرستانی‌به‌آنها برخورد می‌کنیم و چه مسأله‌هایی‌که از عمل و ضمن مشاهدهٔ اشیاء و پدیده‌هایی‌که جهان‌دوروبر مارا فراگرفته‌است، پیدا می‌شود.

م.ای.کالینین می‌گوید: «ریاضیات ... به ذهن نظم می‌بخشد و آدمی را به تفکر منطقی عادت می‌دهد. بیجهت نیست‌که‌می‌گویند، «ریاضیات،ورزش ذهن است».

هرخانواده‌ای،که درآن پدرومادر دلواپس ونگران پیشرفت ذهنی‌بچه‌های خود هستند، به تمرینهای ریاضی نیاز دارد، تمرینهایی که شوق‌آور و مفید باشد، تا بتواند در ساعتهای فراغت، هم بچه‌ها را سرگرم‌کند و هم به تقویت نیروی اندیشهٔ آنها یاری دهد.

برای برطرف‌کردن‌همین‌نیاز است‌که دردسترس بودن بحثها، سرگرمیها و بازیهایی برای وقتهای‌آزاد، برای وقتی که دوستان یا افراد خانواده دورهم جمع می‌شوند، یا در برخوردهایی‌که بیرون ازکلاس، در مدرسه پیش می‌آید، ضروری است. «اندیشهٔ ریاضی»،کتابی‌است‌که به این هدف خدمت می‌کند و در آن با مسأله‌های سرگرم‌کننده، بازیهای ریاضی، شوخیها و معماهایی برخورد می‌کنیدکه به‌کار فکری نیاز دارند، تفکر و اندیشه را تقویت می‌کنند واستدلال منطقی را استحکام می‌بخشند.

کتابهایی‌که سالها پیش. **ا.ی.ایگنا تیف** دراین‌باره‌نوشته‌بود، به‌مناسبت

اینکه تجدید چاپ نشده‌اند، دردسترس خوانندهٔ ما نیست، درحالیکه، خیلی از مسأله‌های این کتابها، هنوز هم جالب وآموزنده است. درکتاب **اندیشهٔ ریاضی** بعضی ازاین‌مسأله‌ها بدون هیچ تغییری آمده‌است ودربعضی دیگر؛ مختصری تغییر داده شده و یا به‌کلی با محتوی تازه‌ای، بازسازی شده است.

من همچنین ازمسأله‌هایی که درنشریه‌های مختلف داخلی یاخارجی وجود داشته است، برای **اندیشهٔ ریاضی**، استفاده کرده‌ام، منتهی همه‌جا توجه داشته‌ام آنچه را که یا. ای. **پرلمان** درکتابهای جالب‌خود درزمینهٔ **سرگرمیهای ریاضی** نوشته است، تکرار نکرده باشم.[۱]

اندیشهٔ ریاضی، می‌تواند مورد استفاده گروه وسیعی قرارگیرد:

برای دانش‌آموزان ۱۰-۱۱ ساله‌که تازه می‌خواهند تفکر و اندیشهٔ خود را آزمایش کنند؛ برای دانش‌آموزان سالهای بالاترکه دیگر ذوق وشوقی درحل مسأله‌های جالب پیدا کرده‌اند؛ و بالاخره برای جوانان بزرگتر، که علاقمند به حل معماها و پیچیدگیهای مربوط به ریاضیات هستند و می‌خواهند اندیشهٔ خود را بیازمایند وآنرا نیرو ببخشند.

البته، مسأله‌ها، یکدست نیست. درآنها، هم مسأله‌های ساده وهم مسأله‌های دشوار وجود دارد.

کتاب شامل چهارده بخش است.

بخش اول، شامل مسأله‌های گوناگونی از تمرینهای اولیهٔ «سرگرمیها» است، که حل آنها بیشتر همراه با آزمایش است وگاهی به‌بعضی محاسبه‌های سادهٔ حساب روی عددهای درست (قسمت اول‌بخش) وعددهای کسری (قسمت دوم‌بخش) نیاز دارد. من، تا حدی نظم عادی تقسیم‌بندی موضوعها را شکسته‌ام و بعضی از مسأله‌های ساده‌ای‌راکه از لحاظ موضوع به بخشهای دیگرکتاب مربوط بوده است، دربخش اول جا داده‌ام. واین، به‌خاطر کمك به‌خواننده است تا در جدا کردن مسأله‌های ساده‌تر، به‌دشواری برخورد نکند. خواننده، می‌تواند نیرووعلاقهٔ خود را ضمن حل مسأله‌های گوناگون بخش اول بیازماید وسپس درهرموردی که

---

۱) سه‌کتاب یا. ای. **پرلمان** به‌نامهای «سرگرمیهای ریاضی»، «سرگرمیهای‌جبر»، و «سرگرمیهای‌هندسه» ازطرف‌مترجم همین‌کتاب به‌فارسی برگردانده شده است.م.

علاقمند شد، به‌موضوع مربوط به‌آن دربخشهای بعدی کتاب مراجعه کند.

برای حل مسأله‌های بخش دوم، پافشاری و اندیشهٔ ریاضی بیشتری لازم است، تا دشواری وضع روشن شود و خروج ازموقعیت دشوار، نشان داده شود.

بخش سوم- هندسهٔ چوب کبریتها - شامل یك رشته مسأله‌های معمایی هندسه است.

در بخش هفت بار گزکن، یکبار پاره کن، مسأله‌هایی دربارهٔ اندازه‌گیری شکلها، گذاشته شده است.

محتوی مسأله‌های بخش هرهنری زمانی به‌کار می‌آید، به فعالیتهای عملی و صنعتی بستگی دارد.

در بخش تقریباً بدون محاسبه، مسأله‌هایی گذاشته شده است که برای حل آنها، ظرافت اندیشه و استدلالهای دقیق لازم است.

بازیها و شیرینکاریهای ریاضی، دربخش جداگانه‌ای. جمع شده‌است، ضمن اینکه دربخشهای دیگر کتاب هم می‌توان به‌آنها برخوردکرد. اینگونه مسأله‌ها، هم، محتوی ریاضی دارند وبدون شك در قلمرو اندیشهٔ ریاضی هستند.

در سه‌بخش مجموعه‌های متقاطع و مربعهای وفقی، شوخی و جدی در- بارهٔ عددها و عددهای قدیمی ولی همیشه جوان، از خاصیتهای جالبی که از قدیمیترین زمانها تا امروز، دربارهٔ عددها شناخته شده است، گفتگو می‌شود.

درجاهای مختلف کتاب، زمینه‌هایی برای بررسی وتحقیق خواننده گذاشته شده است، تا بتواند نیروی اندیشهٔ خود را بیازماید.

حل مسأله‌ها درپایان کتاب داده شده است، ولی ازخواننده می‌خواهیم که در مراجعهٔ به‌آن عجله نکند و تنها وقتی که تلاش خود را برای حل آنها کرد، برای بازرسی نتیجه‌هایی که بدست‌آورده است، ازآنها استفاده کند.

اگرمسأله‌ای را نتوانستید حل کنید، به مسأله‌ها و بخشهای بعدی بپردازید و بعد دوباره به‌آن برگردید. اندیشهٔ ریاضی، کتابی نیست که مثل کتابهای داستانی، یکباره و ازابتدا تا انتهای آن «مطالعه» شود؛ ازاین کتاب می‌توان در سالهای متوالی و با پیشرفت درك ریاضی خواننده، به‌عنوان ورزشی برای فکر و اندیشهٔ ریاضی، استفاده کرد...

بوریس آناستاسیویچ کوردمسکی

در این کتاب

بخش اول ـ سرگرمیها	مساله	جواب
۱. پیشاهنك باریك بین	۱۸	۵۱۰
۲. گل سنگی	۲۰	۵۱۰
۳. جا به‌جا کردن مهره‌ها	۲۰	۵۱۰
۴. در سه حرکت	۲۱	۵۱۱
۵. مسیر باغبان	۲۲	۵۱۱
۶. بشمارید	۲۲	۵۱۱
۷. باید بافراست دریافت	۲۲	۵۱۱
۸. فکر زیادی نمی‌خواهد	۲۳	۵۱۱
۹. به‌طرف بالا ـ به‌طرف پایین	۲۳	۵۱۱
۱۰. عبور از رودخانه	۲۳	۵۱۲
۱۱. گرگ، بز و کلم	۲۴	۵۱۲
۱۲. گلوله‌های سیاه را بیرون بیاورید	۲۴	۵۱۵
۱۳. تعمیر زنجیر	۲۶	۵۱۵
۱۴. اشتباه را درست کنید	۲۷	۵۱۵
۱۵. چهار تا از سه تا	۲۷	۵۱۵
۱۶. سه و دو ، می‌شود هشت	۲۷	۵۱۵
۱۷. سه مربع	۲۷	۵۱۶
۱۸. چند جزء ؟	۲۸	۵۱۶
۱۹. پرچمها را کجا بگذاریم؟	۲۸	۵۱۶
۲۰. آزمایش کنید	۲۹	۵۱۶
۲۱. زوج بودن را حفظ کنید	۲۹	۵۱۶
۲۲. مثلث عددی جادویی	۳۰	۵۱۶

۲۳. دوازده دختر چگونه با توپ بازی‌کردند؟	۳۰	۵۱۷
۲۴. با چهار خط راست	۳۲	۵۱۷
۲۵. بزها را ازکلمها جدا کنید	۳۳	۵۱۷
۲۶. دوقطار	۳۳	۵۱۷
۲۷. در زمان مد	۳۳	۵۱۷
۲۸. صفحهٔ ساعت	۳۳	۵۱۷
۲۹. صفحهٔ ساعت شکسته	۳۵	۵۱۹
۳۰. ساعت عجیب	۳۵	۵۱۹
۳۱. سه‌تا درهرردیف	۳۸	۵۲۰
۳۲. ده ردیف	۳۸	۵۲۰
۳۳. عددها را مرتب کنید.	۳۹	۵۲۱
۳۴. از ۱ تا ۱۹	۳۹	۵۲۱
۳۵. سریع، ولی با احتیاط	۳۹	۵۲۱
۳۶. خرچنگ	۴۰	۵۲۲
۳۷. ارزش‌کتاب	۴۰	۵۲۲
۳۸. مگس مزاحم	۴۱	۵۲۲
۳۹. کدام سال ؟	۴۱	۵۲۲
۴۰. دوشوخی	۴۱	۵۲۲
۴۱. من چند سال دارم؟	۴۲	۵۲۲
۴۲. تخمین بزنید	۴۲	۵۲۳
۴۳. جمع‌کردن سریع	۴۳	۵۲۳
۴۴. درکدام دست؟	۴۶	۵۲۳
۴۵. چندنفرند؟	۴۶	۵۲۴
۴۶. رقمهای مشابه	۴۶	۵۲۴
۴۷. عدد صد	۴۷	۵۲۴
۴۸. بحثی درانجمن ریاضی	۴۷	۵۲۴
۴۹. عدد بیست	۴۹	۵۲۴
۵۰. چند خط‌سیر	۵۰	۵۲۷
۵۱. جای عددها را تغییر دهید	۵۲	۵۲۸
۵۲. با عملهای مختلف، یك‌نتیجه بدست می‌آید	۵۲	۵۳۰
۵۳. نودونه و صد	۵۳	۵۳۰
۵۴. صفحهٔ شطرنجی‌که قسمتهای‌آن‌ازهم جدا می‌شود	۵۳	۵۳۰
۵۵. درجستجوی سنگ آسمانی	۵۴	۵۳۰
۵۶. درگروههای دوتایی جمع‌کنید	۵۵	۵۳۰

۵۷. درگروههای سه‌تایی جمع‌کنید	۵۷	۵۳۱
۵۸. ساعت ازکار افتاده	۶۰	۵۳۲
۵۹. چهار عمل حساب	۶۰	۵۳۳
۶۰. غدد کیلومترشمار	۶۱	۵۳۴
۶۱. برای شبکهٔ ساختمانهای آبی تسیمیلیانسکی	۶۱	۵۳۵
۶۲. تحویل به‌موقع غله	۶۲	۵۳۵
۶۳. درقطار ییلاق	۶۲	۵۳۶
۶۴. از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۶۳	۵۳۶
۶۵. خواب عجیب دوستدار فوتبال	۶۳	۵۳۶
۶۶. ساعت	۶۴	۵۳۷
۶۷. نردبان	۶۴	۵۳۸
۶۸. چیستان	۶۴	۵۳۸
۶۹. کسرهای جالب	۶۴	۵۳۸
۷۰. چه‌عددی؟	۶۵	۵۳۸
۷۱. مسیردانش‌آموز	۶۵	۵۳۸
۷۲. در ورزشگاه	۶۵	۵۳۸
۷۳. آیا در وقت صرفه‌جویی‌کرده است؟	۶۵	۵۳۸
۷۴. ساعت دیواری	۶۶	۵۳۹
۷۵. استفاده از قطعه‌های کوچك	۶۶	۵۳۹
۷۶. قطعهٔ صابون	۶۸	۵۴۰
۷۷. بازی با عدد	۶۸	۵۴۰
۷۸. کسرهای دو مینو	۶۹	۵۴۱
۷۹. بچه‌گربه‌های میشا	۷۰	۵۴۲
۸۰. سرعت متوسط	۷۱	۵۴۲
۸۱. خواب مسافر	۷۱	۵۴۲
۸۲. طول قطار چقدر است؟	۷۲	۵۴۲
۸۳. دوچرخه سوار	۷۲	۵۴۲
۸۴. مسابقه	۷۲	۵۴۲
۸۵. حق باکیست؟	۷۲	۵۴۳
۸۶. سه قطعه نان برشته	۷۳	۵۴۳

بخش دوم ـ موقعیتهای دشوار

۸۸. اندیشهٔ آهنگر	۷۴	۵۴۳
۸۸. گربه و موش	۷۶	۵۴۵

۸۹. سهره و گلوقرمز	۷۸	۵۴۵
۹۰. سکه‌ها را تقسیم کنید	۷۸	۵۴۵
۹۱. قطار مسافری چگونه عبور کند؟	۸۰	۵۴۶
۹۲. مسأله‌ای ناشی‌ازشیطنت سه دختر	۸۱	۵۴۶
۹۳. تکامل بعدی مسأله	۸۲	۵۴۷
۹۴. مهره‌ها را جابه جا کنید	۸۲	۵۵۰
۹۵. سفید و سیاه	۸۳	۵۵۱
۹۶. بازهم مهره‌ها	۸۳	۵۵۱
۹۷. تعمیم مسأله	۸۴	۵۵۱
۹۸. کارتها را به‌ردیف شماره بگذارید	۸۵	۵۵۳
۹۹. دو معما	۸۶	۵۵۴
۱۰۰. جعبهٔ اسرارآمیز	۸۶	۵۵۴
۱۰۱. دفاع از قلعه	۸۷	۵۵۴
۱۰۲. لامپهای اتاق دستگاه انتقال	۸۹	۵۵۶
۱۰۳. جادادن خرگوشها	۹۰	۵۵۸
۱۰۴. آمادگی برای جشن	۹۱	۵۶۰
۱۰۵. درختها را به‌هم نزدیك‌کنید	۹۳	۶۶۱
۱۰۶. بازیهای هندسی	۹۳	۵۶۲
۱۰۷. زوج و فرد	۹۶	۵۶۲
۱۰۸. مرتب‌کردن مهره‌ها	۹۸	۵۶۳
۱۰۹. هدیهٔ معمایی	۹۸	۵۶۴
۱۱۰. با حرکت اسب	۹۹	۵۶۴
۱۱۱. جا به‌جاکردن مهره‌ها	۹۹	۵۶۵
۱۱۲. گروه‌بندی عددهای از ۱ تا ۱۵	۱۰۱	۵۶۶
۱۱۳. هشت ستاره	۱۰۲	۵۶۶
۱۱۴. دومسأله دربارهٔ جا دادن حرفها	۱۰۲	۵۶۷
۱۱۵. تقسیم مربعهای بارنگهای مختلف	۱۰۳	۵۶۹
۱۱۶. مهرهٔ آخر	۱۰۳	۵۷۰
۱۱۷. ساختن حلقه از سکه‌ها	۱۰۴	۵۷۱
۱۱۸. رقص روی یخ	۱۰۵	۵۷۲
۱۱۹. مسأله‌ای از شطرنج	۱۰۶	۵۷۲
۱۲۰. صدوچهل و پنج در	۱۰۷	۵۷۲
۱۲۱. چگونه راه فرار را پیدا کند؟	۱۰۸	۵۷۳

بخش سوم ـ هندسهٔ چوب‌کبریتها

۱۲۲. پنج معما	۱۱۵	۵۷۳
۱۲۳. یازدهم هشت معما	۱۱۵	۵۷۳
۱۲۴. با ۹ چوب‌کبریت	۱۱۶	۵۷۵
۱۲۵. مارپیچ	۱۱۶	۵۷۵
۱۲۶. شوخی	۱۱۶	۵۷۶
۱۲۷. دوچوب‌کبریت بردارید	۱۱۷	۵۷۷
۱۲۸. نمای منزل	۱۱۷	۵۷۹
۱۲۹. شوخی	۱۱۷	۵۸۰
۱۳۰. مثلثها	۱۱۸	۵۸۰
۱۳۱. چند چوب‌کبریت باید برداشت؟	۱۱۸	۵۸۰
۱۳۲. شوخی	۱۱۸	۵۸۰
۱۳۳. حصار	۱۱۹	۵۸۰
۱۳۴. شوخی	۱۱۹	۵۸۰
۱۳۵. پیکان	۱۱۹	۵۸۰
۱۳۶. مربعها و لوزیها	۱۱۹	۵۸۰
۱۳۷. چند ضلعیهای مختلف روی یك شکل	۱۲۰	۵۸۰
۱۳۸. طرح ریزی باغ	۱۲۰	۵۸۰
۱۳۹. تقسیم به قسمتهای هم‌ارز	۱۲۰	۵۸۰
۱۴۰. قسمت آزاد باغ	۱۲۱	۵۸۰
۱۴۱. پارکت	۱۲۱	۵۸۰
۱۴۲. نسبت ثابت مساحتها	۱۲۱	۵۸۰
۱۴۳. شکل را پیدا کنید	۱۲۲	۵۸۰
۱۴۴. بسازید و ثابت کنید	۱۲۲	۵۸۲

بخش چهارم ـ هفت‌بار گزکن ، یکبار پاره‌کن

۱۴۵. به قسمتهای مساوی	۱۲۳	۵۸۲
۱۴۶. هفت‌گل روی نان شیرینی	۱۲۵	۵۸۴
۱۴۷. شکلی‌که خطهای تقسیم‌آن پاك شده است	۱۲۵	۵۸۴
۱۴۸. توصیه کنید	۱۲۶	۵۸۵
۱۴۹. بدون تلف‌کردن	۱۲۶	۵۸۵
۱۵۰. وقتی‌که فاشیستها تجاوزکردند	۱۲۸	۵۸۶
۱۵۱. خاطرهٔ متخصص برق	۱۲۸	۵۸۷
۱۵۲. همهٔ آن به‌کار می‌آید	۱۲۹	۵۸۷

۱۵۳. معما	۱۳۰	۵۸۷
۱۵۴. تقسیم نعل	۱۳۰	۵۸۸
۱۵۵. درهرقسمت یك‌سوراخ	۱۳۰	۵۸۸
۱۵۶. ازیك‌گوزه مربع بسازید	۱۳۰	۵۸۸
۱۵۷. بازهم ساختن یك مربع	۱۳۱	۵۸۸
۱۵۸. تبدیل زیبا	۱۳۱	۵۸۹
۱۵۹. تعمیر قالی	۱۳۱	۵۸۹
۱۶۰. پاداش پرارزش	۱۳۲	۵۹۰
۱۶۱. نجات ازگرفتاری	۱۳۳	۵۹۰
۱۶۲. هدیهٔ مادربزرگ	۱۳۴	۵۹۱
۱۶۳. مسالهٔ نجار	۱۳۵	۵۹۱
۱۶۴. اشتباه‌خزدوز	۱۳۵	۵۹۲
۱۶۵. هراسبی درجای خودش	۱۳۶	۵۹۲
۱۶۶. بازهم بیشتر	۱۳۶	۵۹۳
۱۶۷. تبدیل چندضلعی به‌مربع	۱۳۷	۵۹۳
۱۶۸. تبدیل یک شش‌ضلعی منتظم به‌مثلث متساوی‌الاضلاع	۱۳۹	۵۹۴

بخش پنجم ـ هرهنری زمانی به‌کار آید

۱۶۹. هدف کجاست؟	۱۴۱	۵۹۵
۱۷۰. پنج دقیقه فکر کنید	۱۴۲	۵۹۵
۱۷۱. برخورد پیش‌بینی نشده	۱۴۲	۵۹۵
۱۷۲. مسیر مثلثی	۱۴۳	۵۹۶
۱۷۳. آیا می‌توانید تقسیم‌کنید؟	۱۴۴	۵۹۹
۱۷۴. دستگاه انتقال	۱۴۴	۵۹۹
۱۷۵. هفت مثلث	۱۴۵	۵۹۹
۱۷۶. پردهٔ نقاشی	۱۴۵	۵۹۹
۱۷۷. وزن بطری چقدر است؟	۱۴۶	۶۰۰
۱۷۸. مکعبهای چوبی	۱۴۶	۶۰۲
۱۷۹. شیشهٔ پر ازساچمه	۱۴۷	۶۰۲
۱۸۰. گروهبان‌کجا رفته است؟	۱۴۸	۶۰۲
۱۸۱. گرفتاری پیش‌بینی نشده	۱۴۸	۶۰۲
۱۸۲. داستان دانش‌آموز مدرسهٔ صنعتی	۱۵۰	۶۰۲
۱۸۳. آیا می‌توان صددرصد صرفه‌جوئی‌کرد؟	۱۵۰	۶۰۳
۱۸۴. نیروسنجهای فنری	۱۵۱	۶۰۴
۱۸۵. اندیشهٔ طراحی	۱۵۱	۶۰۵
۱۸۶. عدم موفقیت میشا	۱۵۲	۶۰۵
۱۸۷. مرکز دایره راپیداکنید	۱۵۳	۶۰۶
۱۸۸. کدام جعبه‌سنگینتر است؟	۱۵۴	۶۰۷
۱۸۹. مهارت نجار	۱۵۵	۶۰۷
۱۹۰. هندسه روی‌کره	۱۵۵	۶۰۷
۱۹۱. آیا فکر زیادی لازم است؟	۱۵۶	۶۰۸
۱۹۲. شرطهای دشوار	۱۵۶	۶۰۹

۱۹۳. اجتماع چندضلعیها	۱۵۷	۶۰۹
۱۹۴. روشی برای تشکیل شکلهای متشابه	۱۶۰	۶۰۹
۱۹۵. استفاده از لولا برای ساختن چندضلعیهای منتظم	۱۶۲	۶۱۲
۱۹۶. اندیشهٔ هندسی در کار	۱۶۷	۶۱۲
بخش ششم ـ دومینو وتاس‌بازی		
۱۹۷. چند خال	۱۷۲	۶۱۳
۱۹۸. دوتردستی	۱۷۲	۶۱۳
۱۹۹. تضمین برد در بازی	۱۷۳	۶۱۴
۲۰۰. قاب	۱۷۶	۶۱۴
۲۰۱. پنجره	۱۷۷	۶۱۶
۲۰۲. مربعهای وقتی ازسنگهای دومینو	۱۷۷	۶۱۶
۲۰۳. مربع وقتی باسوراخ	۱۸۳	۶۱۸
۲۰۴. ضرب، در دومینو	۱۸۳	۶۱۸
۲۰۵. کشف‌سنگی که در نظر گرفته‌اند	۱۸۳	۶۲۰
۲۰۶. چشم‌بندی با تاس‌بازی	۱۸۶	۶۲۰
۲۰۷. مجموع خانهای وجه‌های ناپیدا	۱۸۷	۶۲۰
۲۰۸. باچه ردیفی تاسها چیده شده‌اند؟	۱۸۸	۶۲۱
بخش هفتم ـ خاصیتهای عدد ۹		
۲۰۹. کدام رقم حذف‌شده است؟	۱۹۲	۶۲۱
۲۱۰. خاصیت پنهانی	۱۹۶	۶۲۳
۲۱۱. بازهم چند خاصیت عجیب، برای پیداکردن عددهای پنهان	۱۹۶	۶۲۴
۲۱۲. به‌کمک یکی از رقمها پیداکنید	۱۹۸	۶۲۴
۲۱۳. پی‌بردن به‌تفاضل	۱۹۸	۶۲۶
۲۱۴. هرکدام چندسال دارند؟	۱۹۹	۶۲۶
۲۱۵. رمز کار کجاست؟	۱۹۹	۶۲۶
بخش هشتم ـ به‌کمک جبر وبدون آن		
۲۱۶. کمک متقابل	۲۰۷	۶۲۷
۲۱۷. مرد طمعکار	۲۰۷	۶۲۸
۲۱۸. کوچولوی باهوش	۲۰۸	۶۲۸
۲۱۹. ـکارچیها	۲۰۹	۶۲۸
۲۲۰. قطار مقابل	۲۰۹	۶۲۹
۲۲۱. لوکا، دستنویس را ماشین می‌کند	۲۱۰	۶۲۹
۲۲۲. داستان قارچها	۲۱۰	۶۲۹
۲۲۳. چه‌کسی زودتر برمی‌گردد؟	۲۱۲	۶۳۰
۲۲۴. شناگر وکلاه	۲۱۲	۶۳۱
۲۲۵. دوکشتی	۲۱۳	۶۳۲
۲۲۶. فکر را آزمایش کنید	۲۱۴	۶۳۳
۲۲۷. مسابقهٔ درختکاری	۲۱۴	۶۳۴
۲۲۸. چند برابر؟	۲۱۵	۶۳۴

۲۲۹. کشتی و هواپیما	۲۱۵	۶۳۴
۲۳۰. دوچرخه‌سوارها	۲۱۵	۶۳۵
۲۳۱. سرعت‌کار دستگاه	۲۱۷	۶۳۵
۲۳۲. مسافرت جك لندن	۲۱۷	۶۳۶
۲۳۳. در شبیه‌سازی نادرست. امکان اشتباه وجود دارد	۲۱۸	۶۳۶
۲۳۴. قضیهٔ حقوقی	۲۲۰	۶۳۸
۲۳۵. احتمال حادثه	۲۲۰	۶۳۸
۲۳۶. چه‌کسی بااسب می‌رود؟	۲۲۱	۶۳۹
۲۳۷. دو موتورسوار	۲۲۱	۶۴۱
۲۳۸. کدام هواپیما بوده است؟	۲۲۱	۶۴۱
۲۳۹. دستگاده معادله‌ها، برای حل شفاهی	۲۲۲	۶۴۱
۲۴۰. دوشمع	۲۲۳	۶۴۲
۲۴۲. تیزهوشی عجیب	۲۲۳	۶۴۲
۲۴۱. وقت صحیح	۲۲۴	۶۴۳
۲۴۳. ساعت	۲۲۴	۶۴۳
۲۴۴. درچه‌ساعتی؟	۲۲۵	۶۴۴
۲۴۵. جلسه‌کی شروع شده است؟	۲۲۶	۶۴۶
۲۴۶. گروهبان، تمرین می‌کند	۲۲۶	۶۴۷
۲۴۷. به‌کمك دواطلاع	۲۲۷	۶۴۸
۲۴۸. چند ایستگاه جدید؟	۲۲۷	۶۴۹
۲۴۹. چهار عدد انتخاب‌کنید	۲۲۷	۶۴۹
۲۵۰. آیا این نوع وزن‌کردن مجاز است؟	۲۲۸	۶۴۹
۲۵۱. فیل‌و پشه	۲۲۹	۶۵۱
۲۵۲. عدد پنج رقمی	۲۳۰	۶۵۲
۲۵۳. بستگیهای پیچیده	۲۳۱	۶۵۲
۲۵۴. مسألهٔ لیوکا	۲۳۲	۶۵۳
۲۵۵. حادثهٔ مسافرت	۲۳۳	۶۵۴
۲۵۶. یك خاصیت‌ازکسرهای‌ساده	۲۳۴	۶۵۷

بخش‌نهم ـ تقریباً بدون محاسبه

۲۵۷. دراتاق تاریك	۲۳۵	۶۵۸
۲۵۸. سیبها	۲۳۶	۶۵۹
۲۵۹. پیش‌بینی هوا	۲۳۶	۶۵۹
۲۶۰. روز جنگل	۲۳۶	۶۵۹
۲۶۱. نام‌هرکسی را پیداکنید	۲۳۷	۶۵۹
۲۶۱. مسابقهٔ دقت	۲۳۸	۶۶۰
۲۶۳. خرید	۲۳۹	۶۶۰
۲۶۴. مسافرهای یکی ازکوپه‌ها	۲۴۰	۶۶۰
۲۶۵. آخرین مسابقهٔ شطرنج‌بازان	۲۴۰	۶۶۳
۲۶۶. جمع‌آوری هیزم	۲۴۱	۶۶۴
۲۶۷. نام فامیل راننده چیست؟	۲۴۱	۶۶۴
۲۶۸. داستان‌یك دزدی	۲۴۳	۶۶۵

۲۶۹. جمع‌آوری گیاهان	۲۴۳	۶۶۵
۲۷۰. تقسیم پنهانی	۲۴۴	۶۶۶
۲۷۱. عملهای رمزی	۲۴۶	۶۶۷
۲۷۲. موزائیك حسابی	۲۴۸	۶۷۰
۲۷۳. موتور سیکلت سوار و تاکسی‌بار	۲۴۸	۶۷۲
۲۷۴. باپای پیاده و با اتومبیل	۲۴۹	۶۷۲
۲۷۵. برهان خلف	۲۴۹	۶۷۲
۲۷۶. سکهٔ تقلبی راکشف کنید	۲۵۰	۶۷۳
۲۷۷. مسألهٔ منطقی	۲۵۲	۶۷۷
۲۷۸. سه دانشمند	۲۵۲	۶۷۸
۲۷۹. پنج پرسش برای دانش آموزان	۲۵۳	۶۷۸
۲۸۰. استدلال به جای معادله	۲۵۴	۶۷۹
۲۸۱. بااستدلال شفاهی	۲۵۵	۶۸۰
۲۸۲. بله یانه ؟	۲۵۶	۶۸۲

بخش دهم ـ بازیها وشیرینکاریهای ریاضی

۲۸۳. یازده‌شی	۲۵۸	۶۸۴
۲۸۴. انتخاب چوب کبریتهای آخر	۲۵۹	۶۸۵
۲۸۵. زوج بریده است	۲۵۹	۶۸۵
۲۸۶. تسزیان شیتزی	۲۶۰	۶۹۰
۲۸۷. چگونه می‌توان پیروز شد؟	۲۶۳	ـــــ
۲۸۸. درآوردن مربع	۲۶۳	ـــــ
۲۸۹. چه‌کسی قبل از دیگری صد را نام می‌برد ؟	۹۶۵	۶۹۲
۲۹۰. بازی بامربعها	۲۶۶	۶۹۳
۲۹۱. أ ــ او ــ آ	۲۶۹	ـــــ
۲۹۲. بازی ایتالیایی	۲۷۴	ـــــ
۲۹۳. بازی بامربعهای وفقی	۲۷۵	ـــــ
۲۹۴. جدول عددهای متقاطع	۲۷۶	۶۹۴
۲۹۵. کشف عدد	۲۸۱	۶۹۷
۲۹۶. بدون اینکه چیزی بنویسید نتیجهٔ محاسبه راکشف‌کنید	۲۸۸	۷۰۰
۲۹۷. من می‌دانم هرکس چقدر انتخاب می‌کند	۲۹۰	۷۰۰
۲۹۸. باچند آزمایش کشف می‌کنم	۲۹۱	۷۰۱
۲۹۹. چه‌کسی پاك‌کن وچه‌کسی مداد ؟	۲۹۲	۷۰۱
۳۰۰. کشف سه‌عدد اصلی	۲۹۳	۷۰۱
۳۰۱. کشف چندعدد	۲۹۳	۷۰۲
۳۰۲. شما چندسال دارید ؟	۲۹۵	۷۰۳
۳۰۳. بازهم‌کشف سن	۲۹۶	۷۰۳
۳۰۴. شیرینکاری هندسی	۲۹۶	۷۰۳

بخش یازدهم ـ بخش پذیری

۳۰۵. عدد روی آرامگاه	۳۰۰	۷۴۰

۳۰۶. هدیهٔ سال نو	۳۰۰	۷۰۵
۳۰۷. آیاچنین عددی وجود دارد ؟	۳۰۱	۷۰۵
۳۰۸. سبد تخم‌مرغ	۳۰۱	۷۰۵
۳۰۹. عدد سه‌رقمی	۳۰۳	۷۰۶
۳۱۰. چهارکشتی	۳۰۳	۷۰۶
۳۱۱. اشتباه صندوقدار	۳۰۳	۷۰۶
۳۱۲. رابطهٔ عددی	۳۰۴	۷۰۶
۳۱۳. تشابهٔ بخش پذیری بر ۱۱	۳۰۴	۷۰۶
۳۱۴. یکی‌کردن نشانه‌های بخش‌پذیری بر ۷ ، ۱۱ و۱۳	۳۰۷	۷۰۷
۳۱۵. ساده‌کردن قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۸	۳۰۹	۷۰۷
۳۱۶. حافظهٔ شگفت‌انگیز	۳۱۰	۷۰۸
۳۱۷. یکی‌کردن قاعده بخش‌پذیری بر ۳ ، ۷ و۱۹	۳۱۳	۷۰۹
۳۱۸. بخش‌پذیری دوجمله‌ایها	۳۱۴	۷۱۰
۳۱۹. کهنه و نو دربارهٔ بخش‌پذیری بر ۷	۳۲۰	۷۱۰
۳۲۰. نشانهٔ بخش‌پذیری برعددهای دیگر	۳۲۶	———
۳۲۱. تعمیم قاعدهٔ بخش‌پذیری	۳۲۷	———
۳۲۲. بخش‌پذیری شگفت‌انگیز	۳۳۰	———

بخش دوازدهم ـ مجموعهای متقاطع ومربعهای وفقی

۳۲۳. گروه‌بندی جالب	۳۳۲	۷۱۱
۳۲۴. ستاره	۳۳۳	۷۱۲
۳۲۵. بلور	۳۳۳	۷۱۳
۳۲۶. آرایش ویترین	۳۳۴	۷۱۳
۳۲۷. چه‌کسی زودتر موفق می‌شود؟	۳۳۵	۷۱۳
۳۲۸. سیاره‌نما	۳۳۵	۷۱۳
۳۲۹. مثلثهای بزرگ	۳۳۷	۷۱۴
۳۳۰. بازهم‌گروه‌بندی جالب	۳۳۷	۷۱۴
۳۳۱. بیگانه‌ای از چین وهند	۳۳۸	۷۱۴
۳۳۲. چگونه می‌توان مربع وفقی درست‌کرد؟	۳۴۵	۷۱۵
۳۳۳. آزمایش اندیشه	۳۵۴	۷۱۶
۳۳۴. بازی سحرآمیز با «۱۵»	۳۵۴	۷۱۷
۳۳۵. مربع وفقی غیرعادی	۳۵۵	۷۲۰
۳۳۶. درخانهٔ مرکزی چه‌عددی است؟	۳۵۷	۷۲۰
۳۳۷. شگفتگیهای حساب	۳۵۸	———
۳۳۸. مربع وفقی با شرطهای اضافی	۳۶۱	———
۳۳۹. مربع وفقی منتظم مرتبهٔ چهارم	۳۶۴	———
۳۴۰. مربعهای وفقی «اهریمنی» ومربعهای وفقی دیگر	۳۷۰	———
۳۴۱. انتخاب عدد برای‌مربع وفقی	۳۷۵	———
۳۴۲. حاصلضربهای وفقی	۳۸۷	۷۲۱

بخش سیزدهم ـ شوخی وجدی دربارهٔ عددها

۳۴۳. ده رقم	۳۹۹	۷۲۲

۳۴۴. بازهم چندبرخورد عجیب	۴۰۲	۷۲۴
۳۴۵. دوتجربهٔ جالب	۴۰۶	۷۲۴
۳۴۶. چرخ وفلك عددی	۴۱۰	———
۳۴۷. صفحهٔ ضرب‌فوری	۴۱۵	
۳۴۸. ورزش فکری	۴۱۶	———
۳۴۹. نقش و نگار رقمها	۴۱۹	۷۲۶
۳۵۰. یکی ازهمه وهمه ازیکی	۴۲۴	۷۲۸
۳۵۱. بازیافت عددی	۴۲۸	۷۲۹
۳۵۲. رشتهٔعددهای طبیعی	۴۳۶	۷۳۰
۳۵۳. اختلاف مزاحم	۴۵۶	۷۳۴
۲۵۴. مجموع متقارن	۴۵۷	———

بخش چهاردهم ـ عددهای قدیمی، ولی همیشه جوان

۳۵۵. عددهای اول وعددهای غیر اول	۴۵۹	———
۲۵۶. غربال اراتوستن	۴۶۰	———
۳۵۷. غربالهای تازه برای عددهای اول	۴۶۴	———
۳۵۸. پنجاه عدد اول اولیه	۴۶۸	———
۳۵۹. راه دیگری برای‌پیداکردن عددهای اول	۴۶۸	———
۳۶۰. چند عدد اول ؟	۴۷۰	———
۳۶۱. مسابقهٔ عمومی	۴۷۱	
۳۶۲. رشتهٔ فیبوناچی	۴۸۲	———
۳۶۳. معما	۴۸۴	۷۴۰
۳۶۴. خاصیتهای عددهای رشتهٔ فیبوناچی	۴۸۷	———
۳۶۵. خاصیتهای عددهای هندسی	۴۹۴	———
۳۶۶. عددهای فیثاغورثی	۵۰۵	———

مسأله‌ها

کتاب است که مغزها را
به حرکت درمی‌آورد
و . مایاکووسکی

بخش اول

سرگرمیها

قسمت اول

اندیشهٔ ریاضی خودرا روی این مسأله‌ها ، آزمایش‌کنید . برای حل این مسأله‌ها، تنها به‌پافشاری، حوصله وتیزهوشی و توانایی انجام عملهای جمع، تفریق، ضرب وتقسیم دربارهٔ عددهای درست، نیاز است.

۱. پیشاهنك باریك‌بین

دانش‌آموزان ـ پسر ودختر ـ به اندازه‌گیریهای مربوط به هواشناسی ، مشغول بودند. حالا، روی تپه‌ای استراحت می‌کردند و به قطار باری‌که از نزدیکی‌آنها می‌گذشت،نگاه می‌کردند.لکوموتیو، درسربالایی به‌شدت دود می‌کرد و نفس‌نفس می‌زد. درطول خط راه‌آهن، به‌طور یکنواخت و بدون بریدگی، باد می‌وزید.

پسر پرسید:

ـ اندازه‌گیری ما، سرعت باد را چقدرنشان می‌دهد؟

ـ ۷ متر درثانیه.

ـ همین برای من‌کافی است‌که بتوانم سرعت قطاررا معین‌کنم.

مربوط به‌مسألهٔ ۱. قطار باچه سرعتی حرکت می‌کند؟

ـ راستی! چطور؟

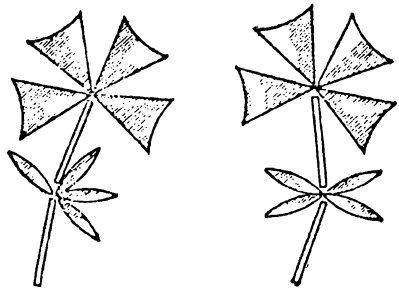
ـ به حرکت قطار، بادقت نگاه‌کن!

دخترکمی فکرکرد و تـوانست راز مطلب را پیداکند (شکـل را ببینید). آنها درست همان چیزی را دیده‌اندکه نقاش ما، رسم‌کرده‌است. راستی، سرعت قطارچقدر است؟

۲. گل‌سنگی

آیـا در بـارهٔ زبـردستی استاد دانیلا در داستان پاول پتروویچ باژوف بنام گل سنگی ، چیزی به‌خاطر دارید؟

در اودال حکایت می‌کنندکه وقتی دانیلا هنوز شاگرد مدرسه‌بود، دوگل سنگی تراشید (شکل را ببینید) ، با برگها و ساقه‌های آنها ،که گلبرگهایشان ازهم جدا بود و می‌شد ازکنار هم‌گذاشتن تکه‌های آنها ، صفحه‌ای به‌شکل دایره، درست‌کرد.



مربوط به‌مسألهٔ ۲. ازتکه‌های این‌گلها، دایره‌ای درست‌کنید.

آزمـایش‌کنید ! گلهای دانیلا را روی‌کاغذ یـا مقوا رسم‌کنید ، گلبرگها، ساقه‌ها وبرگها را ببرید و ازآنها دایره‌ای بسازید.

۳. جابجاکردن مهره‌ها

۶ مهره را روی میز به‌ردیف،اول سیاه، بعدسفید، دوباره سیاه، بعدسفید

وغیره، قراردهید، به‌این‌شکل:

درسمت چپ‌آنها، جا برای چهارمهره، بازبگذارید.

باید مهره‌ها را بنحوی جابجاکـردکه از چپ به‌راست، اول همهٔ مهره‌های سفید وسپس همهٔ مهره‌های سیاه، قرارگرفته باشد. ضمناً برای جابجاکردن مهره‌ها، تنها می‌توان دومهره را باهم، و بدون‌آنکه ردیف آنهارا بهم بزنیم، به جای‌آزاد، درسمت چپ، بیاوریم. مهره‌ها را بهم نزدیك و یا ازهم دور نمی‌توان‌کرد. برای حل مسأله، سه جابجائی (سه حرکت) کافی است.[۱]

اگرمهره ندارید،می‌توانید ازسکه، یاقطعه‌کاغذهایی‌که بریده‌اید، استفاده‌کنید.

۴. درسه حرکت

روی میز، سه‌توده چوب‌کبریت قراردهید، به‌نحوی‌که دریکی‌ازآنها ۱۱ چوب‌کبریت، دردیگری ۷ چوب‌کبریت ودرسومی ۶ چوب‌کبریت،باشد. با جابجاکردن چوب‌کبریتها، از یك توده به‌تودهٔ دیگر، می‌خواهیم‌تعداد چوب‌کبریتهارا درسه توده مساوی‌کنیم، یعنی درهرکدام ۸ چوب‌کبریت وجود داشته باشد.این‌نتیجه قابل دسترسی است، زیرا رویهم ۲۴کبریت داریم‌که بر۳ قابل‌قسمت است؛ منتهی برای جابجاکردن چوب‌کبریتها، باید از این قانون پیروی‌کنیم. به‌هرتوده، درست همانقدر چوب‌کبریت می‌توان اضافه‌کرد،که درآن وجود دارد، مثلاً اگر درتوده‌ای، ۶ چوب کبریت وجود دارد، تنها ۶ چوب‌کبریت می‌توان به‌آن اضافه‌کرد و این ۶ چوب‌کبریت را هم تنها ازیك توده می‌توان برداشت، یا اگردرتوده‌ای

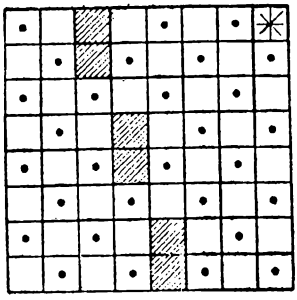
۱. مفهوم این مسأله، درمسأله‌های ۹۵، ۹۶ و ۹۷ تعمیم داده شده است.

۴ چوب کبریت وجوددارد، تنها ۴ چوب کبریت می‌توان از تودهٔ دیگری برداشت و به‌آن اضافه کرد.

مسأله درسه حرکت، حل می‌شود.

۵. مسیرباغبان

درشکل، طرح باغ کوچکی که درخت سیب دارد، رسم شده‌است (نقطه‌ها، درختهای‌سیب‌اند). باغبان‌به‌همهٔ درختها سرمی‌زند . او از خانه‌ای کـه با علامت ستاره مشخص شده است، شروع می‌کند و از تمام خانه‌ها ، چـه‌آنها کـه درخت سیب‌دارندوچه‌آنهاکه ندارند، می‌گذرد؛ درتمام مسیرخود ، حتی یکبار هم ازیك خانه دوبار ، عبور نمی‌کند . از خانه‌ای به خـانهٔ دیگر ، به صورت قطری نمی‌رود و به خـانه‌های هاشورخورده هم پا نمی‌گذارد ، زیرا دراین‌خانه‌ها ، ساختمانهای مختلف قرار دارد. باغبان، بعدازپایان‌کارخود، دوباره به‌همان خانه‌ای می‌رسد، که ازآنجا حرکت‌کرده بود.

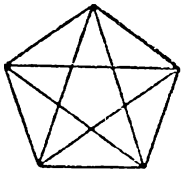


مربوط به‌مسألهٔ ۵

در دفترچهٔ خود، مسیر حرکت باغبان را رسم‌کنید.

۶. بشمارید

دید هندسی خـود را آزمـایش کنید ، درشکلی‌که در اینجا می‌بینید، چند مثلث وجوددارد؟



مربوط به‌مسألهٔ ۶

۷. باید به‌فراست دریافت

در یك سبد، ۵ سیب است . چگونه این سیبها را بین

پنج دختر تقسیم کنیم ،که بهردختر یك سیب برسد و یك سیب هم درسبد باقی بماند.

۸. فکر زیادی نمی‌خواهد

بگوئید چندگربه دراطاق است، به‌شرطی که درهریك ازچهارگوشهٔ اطاق یك‌گربه نشسته است، درمقابل هرگربه سه‌گربه و روی دم هرگربه، یك گربه نشسته است؟

۹. به‌طرف بالا ـ به‌طرف پائین

پسری،کناریك مداد خاکستری را، محکم به‌کنار یك مداد زرد چسباند. یك سانتیمتر (ازطول) کنارهٔ مداد خاکستری ، از پائین به‌بالا ، به رنگ آلوده شده است. مداد زرد ، بی‌حرکت است ، ولی مداد خاکستری را ، همانطورکه به‌مداد زرد چسبیده است، یـك سانتیمتر پائین مـی‌آورد و سپس، دوباره به‌جای اولش برمی‌گرداند، دوباره یك سانتیمتر پائین‌می‌آورد و بعد به‌جای خود برمی‌گرداند؛ به‌این‌ترتیب ، مداد خاکستری را ۱۰بار پائین می‌برد و۱۰بار بالا می‌آورد (رویهم ۲۰ حرکت).

اگرفرض کنیم که دراین‌مدت، رنگی که به‌مداد خاکستری زده‌شده است، نه‌خشك شود ونه ازبین برود ، چند سانتیمتر ازکنارهٔ مداد زرد ، بعداز این بیست حرکت،آلوده به‌رنگ می‌شود؟

توضیح. این مسأله را لئونید میخائیلوویچ (یاکوف،درست کرده‌است، ویك روز،بعدازآنکه ازشکار مرغابی به‌خانه برگشت، به‌فکر او رسید. در بارهٔ این مطلب که چگونه متوجه این مسأله شد، درقسمت حل مسألهٔ ۹ ، صحبت خواهیم کرد.

۱۰. عبور از رودخانه (یك مسألهٔ قدیمی).

واحدکوچك نظامی به رودخانه‌ای رسیدکه می‌بایست از آن عبورکند .

پل، ویران ورودخانه عمیق بود.لازم بودچاره‌ای اندیشیده شود.ناگهان، فرمانده درساحل دوپسربچه را دیدکه درقایقی، بازی می‌کنند. ولی‌قایق به‌قدری کوچك بودکه درآن می‌شدفقط‌یك‌سربازیافقط دوپسربچه‌بنشینند، نه‌بیشتر! باوجود این، همهٔ سربازها، باهمین قایق از رودخانه‌گذشتند. به‌چه‌ترتیب؟

۱۱. گرگ، بز وکلم

این‌هم یك مسألهٔ قدیمی است ،که در نوشته‌های سدهٔ هشتم هم به‌آن برخورد می‌کنیم ومحتوی افسانه‌ای دارد(شکل‌صفحهٔ۲۵).

مردی می‌خواست‌گرگ، بز وکلم را باقایقی ازرودخانه بگذراند. درقایق می‌شد، یك‌آدم وهمراه او یاگرگ، یا بز ویاکلم را جا داد.ولی اگرگرگ و بز، تنها و بدون‌آدم باقی می‌ماندند،گرگ بز را می‌خورد ، و اگر بز وکلم باهم تنها می‌شدند ، بزکلم را می‌خورد ، ولی درحضور مرد «کسی به‌کسی‌کاری نداشت». باوجود همهٔ اینها، مرد توانست‌اموال خودرا به‌طرف دیگر رودخانه، به‌سلامت برساند. به‌چه‌ترتیب عمل‌کرد؟

۱۲. گلوله‌های سیاه را بیرون بیاورید

دریك ناودان باریك وبلندی، ۸گلوله قرارگرفته‌است:چهارگلولهٔسیاه، طرف چپ وچهارگلولهٔ سفید،طرف راست.گلوله‌های سفید،کمی بزرگتر

ازگلوله‌های سیاه‌اند . در قسمت وسط ناودان ، در دیوارهٔ آن از داخل فرورفتگی وجوددارد،که درآن می‌توان تنها یکی ازگلوله‌هارا (سیاه یا سفید) قرارداد. دوگلوله ، تنها درمجاورت همین فرورفتگی، می‌توانند کنارهم، درعرض ناودان قرارگیرند. سمت چپ ناودان بسته است،ولی

مربوط به‌مسألهٔ ۱۱. نمی‌شود گرگ و بز را باهم، یا بز و کلم‌را باهم تنها گذاشت.

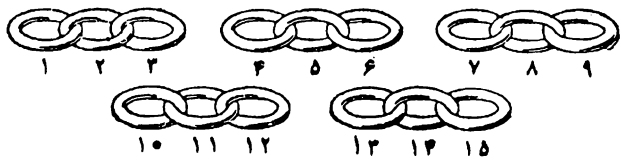
سمت راست آن باز است ، منتهی تنها گلوله‌های سیاه می‌توانند از آن عبور کنند . چگونه هرچهار گلولهٔ سیاه را از ناودان بیرون بیاوریم ، به‌شرطی که برداشتن آنها از داخل ناودان ممکن نباشد.

۱۳. تعمیر زنجیر

می‌دانید استاد جوان دربارهٔ چی فکر می‌کند ؟ در مقابل او پنج زنجیر سه حلقه‌ای وجوددارد که می‌خواهد آنهارا به‌صورت یك زنجیر درآورد، بدون آنکه ازحلقه‌های اضافی استفاده کند.

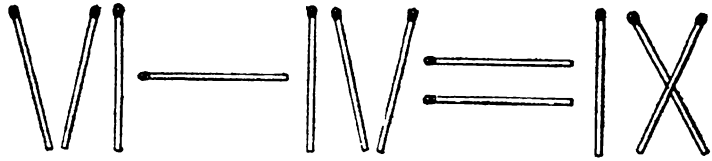
مربوط به‌مسألهٔ ۱۳. استاد جوان به‌مشکلی برخورد کرده است.

اگر مثلاً (شکل صفحهٔ بعد را ببینید)، حلقهٔ ۳ را باز کند (یك عمل) و آنرا به حلقهٔ ۴ محکم کند (باز هم یك عمل)، سپس حلقهٔ ۶ را باز کند و به حلقهٔ ۷ ببندد وغیره، رویهم باید هشت عمل انجام دهد، ولی استادجوان ما می‌خواهد، تنها با شش عمل به‌نتیجه‌ای که می‌خواهد، برسد؛ وموفق هم شد. چگونه عمل کرده است؟



۱۴. اشتباه را درست کنید

۱۲ چوب کبریت برمی‌داریم و با آنها «تساوی» زیررا می‌سازیم:



همانطور که می‌بینید، این تساوی نادرست است، زیرا بدست می‌آید: ۹ = ۴ — ۶. با جابجا کردن یکی از چوب کبریتها، تساوی را درست کنید.

۱۵. چهارتا ازسه‌تا (شوخی)

روی میز سه‌تا چوب کبریت گذاشته‌ایم بدون اینکه حتی یک چوب کبریت به‌آنها اضافه کنید، ازسه‌تا، چهار درست کنید، البته حق‌ندارید چوب کبریتها را بشکنید.

۱۶. سه‌تا و دوتا می‌شود هشت (بازهم شوخی)

۳ چوب کبریت روی میز بگذارید و از دوستتان بخواهید، ۲ چوب کبریت به‌آنها اضافه کند، طوری که هشت بدست آید خواهش کنید که چوب کبریتها را نشکند.

۱۷. سه‌مربع

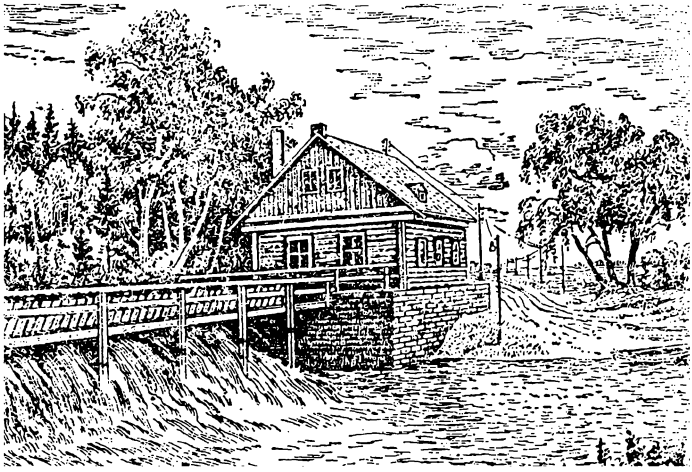
به‌کمک ۸ تکه چوب، که چهارتای‌آن دوبرابر چهارتای بقیه طول دارد، سه‌مربع مساوی بسازید.

۱۸. چند جزء ؟

درکارگاه تراشکاری کارخانه ، با تراشیدن قالبهای سربی ، اجزایی را درست می‌کنند. ازهرقالب، یك جزء . تراشه‌هایی راکه از تراشیدن شش قالب بدست می‌آید، می‌توان ذوب کرد و ازآنها قالب جدیدی ساخت . به‌این‌ترتیب از۳۶ قالب سربی، چند جزء می‌توان ساخت؟

۱۹. پرچمها راکجا بگذاریم؟

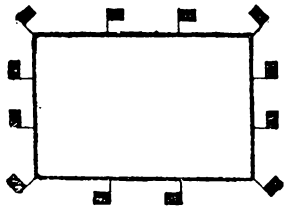
ایستگاه برق‌آبی کوچکی به‌وسیلهٔ جوانهاساخته‌شد. پیشاهنگان می‌خواستند این ایستگاه را برای روز افتتاح، ازهرچهارطرف، به‌وسیلهٔ تاجهای گل، چراغها وپرچمها، آذین‌بندی کنند.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۹. جوانها یك ایستگاه برق‌آبی کوچك ساختند.

رویهم ۱۲ پرچم داشتند . پیش‌آهنگان ابتدا در هرطرف ۴ پرچم

گذاشتند، به‌این‌ترتیب:



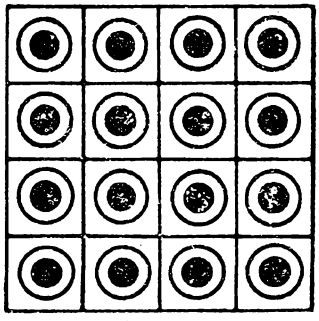
بعد،آنها فهمیدندکه می‌توانند این ۱۲ پرچم را طوری قراردهند که درهرضلع ۵ وحتی ۶ پرچم‌باشد.طرح دوم‌را پسندیدند وقرارگذاشتند درهرطرف ۵ پرچم‌قراردهند.روی شکل‌نشان دهیدکه چگونه‌پیش‌آهنگان توانستند با ۱۲ پرچم، درهرضلع ۵ پرچم بگذارند و چگونه ممکن است درهرضلع ۶ پرچم قراردارد؟

۲۰. آزمایش‌کنید

درکنار دیوارهای سالن مربع شکل رقص ، ۱۰ صندلی راحتی را طوری قراردهیدکه تعداد صندلیهای‌کنار هرضلع سالن، مقدارثابتی باشد.

۲۱. زوج‌بودن را حفظ‌کنید

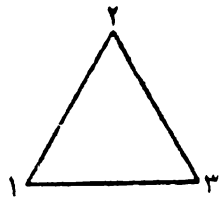
۱۶ شیء انتخاب‌کنید (تکه‌کاغذ، سکه، مهره یا هرچیزدیگر) وآنها را درچهار ردیف بچینید، آنطورکه‌درشکل می‌بینید . ۶ تا ازآنها را بردارید ، به‌نحوی‌که تعداد آنچه‌که باقی می‌ماند، درهرسطر یا هرستون، عددی زوج باشد. باتغییر۶مهره‌ای‌که برمی‌داریم، می‌توان جوابهای متفاوتی بدست‌آورد.



مربوط به‌مسألهٔ ۲۱

۲۲. مثلث عددی جادویی

من در راسهای این مثلث ، عددهای ۱ ، ۲ و۳ را گذاشته‌ام ، حالا شما عددهای ۴،۵،۶،۷،۸و۹ را روی ضلعهای آن طوری قرار دهید که مجموع عددهای هر ضلع مثلث ، مساوی ۱۷ شود . این، مشکل نیست، زیرا من از قبل گفته‌ام که در راههای مثلث، چه‌عددهایی قرار دارد.



مهم اینست که ازقبل، عددهای واقع برراسها مشخص نباشدومثلاً خواسته شودکه عددهای ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ را روی ضلعها و راسهای مثلث طوری قرار دهید، که مجموع عددهای هرضلع مساوی ۲۰ شود.

وقتی که مسأله را حل کردید ، سعی کنید با تغییر جای عددها ، جوابهای دیگری پیدا کنید.

۲۳. دوازده دختر چگونه باتوپ بازی کردند؟

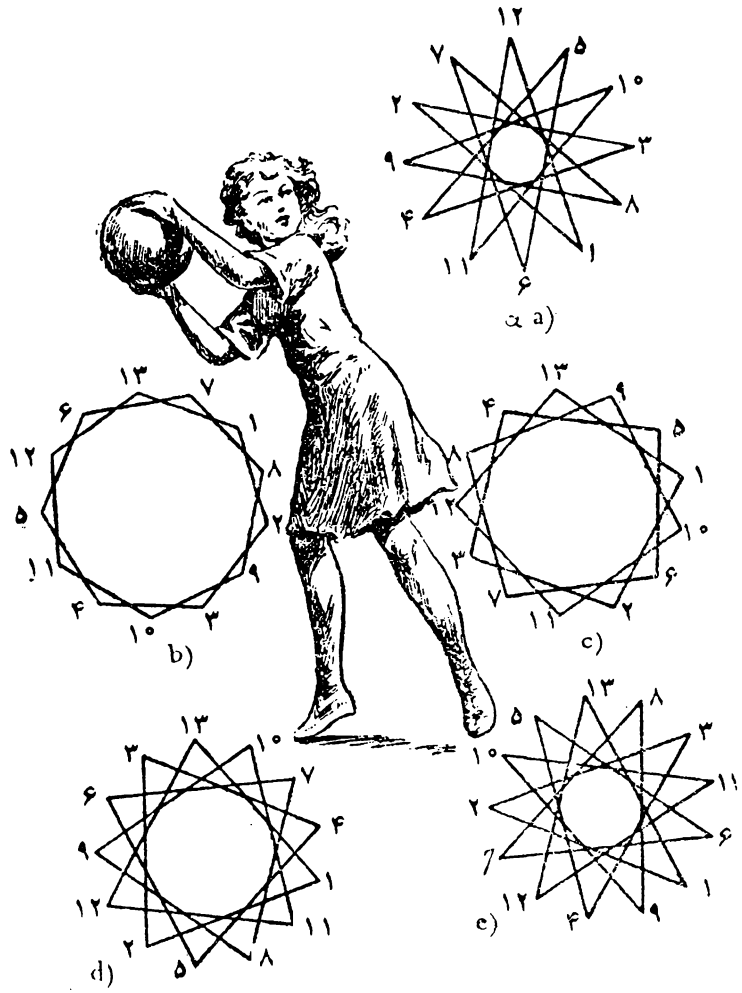
دوازده دختر، روی محیط یك دایره ایستادند و شروع به بازی با توپ کردند. هردختر، توپ را به‌طرف همسایهٔ چپ خود می‌انداخت. وقتی که توپ، تمام دایره را دور زد، آنرا درجهت عکس به‌طرف‌هم می‌انداختند. بعدازمدتی ، یکی از دخترها گفت:

ـ بهتر است توپ را یکنفردرمیان بیندازیم.

ناتاشا فوراً جواب داد:

ـ ولی ، ازآنجاکه ما دوازده‌نفریم ، اگر توپ را یکنفردرمیان بیندازیم، نصف افراد بیرون از بازی می‌مانند.

ـ اگر اینطور است ، دونفردرمیان می‌اندازیم ، یعنی به نفر سوم می‌دهیم.



مربوط به‌مسألهٔ ۲۳. هردختر، توپ را به‌طرف همسایه دست‌چپ می‌انداخت.

ـ اینکه بدتر می‌شود؛ به‌این‌صورت، تنها چهارنفر دربازی شرکت خواهندکرد... اگربخواهید همهٔ دخترها دربازی شرکت‌کنند، باید توپ را چهارنفردرمیان، به‌طرف نفرپنجم بیندازیم. جور دیگری نمی‌شود.

ـ واگر شش‌نفردرمیان، به‌نفرهفتم بیندازیم.

ـ این همان حالت است ، منتهی مثل اینست‌که جهت حرکت را تغییر داده‌ایم.

ـواگرده‌نفردرمیان‌بازی‌کنیم،طوری‌که نفریازدهم،توپ رابگیرد.

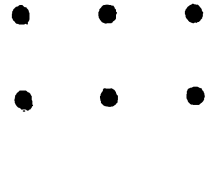
ـ این‌حالت را ما بازی‌کرده‌ایم ...

دخترها ، طرح همهٔ حالتهای ممکنه بازی را رسم‌کردند و خیلی زود متوجه شدندکه ثاثاشا حق‌دارد. به‌جزبازی اولیه، تنها دریك‌حالت، همهٔ دخترها، دربازی شرکت می‌کردند (طرح a).

ولی اگر سیزده‌نفر دربازی شرکت داشته باشند، برای اینکه همهٔ افراد، به‌بازی مشغول باشند ، می‌توان توپ را یك‌درمیان (طرح b) ، دودرمیان (طرح c)، سه‌نفردرمیان (طرح d) ویا چهارنفردرمیان(طرح e) انداخت؛ درهمهٔ این‌حالتها، هیچکس خارج از بازی قرار نمی‌گیرد. حالا،روشن‌کنیدکه‌آیا برای‌سیزده‌بازی‌کن،می‌توان‌توپ‌را پنج‌نفردرمیان، یا شش نفردرمیان انداخت ، طوری‌که هرسیزده‌نفر دربازی شرکت داشته باشند؟ فکرکنید وبرای هرحالت، طرح مربوط را رسم‌کنید.

۲۴. با چهارخط راست

صفحهٔ‌کاغذرا بردارید و ۹ نقطه‌روی‌آن طوری بگذاریدکه یك مربع درست‌کنند ،آنطورکه در شکل‌نشان داده شده است . به‌کمك چهارخط راست ، وبدون اینکه قلم را ازکاغذ بردارید،



مربوط به‌مسألهٔ ۲۴

هر ۹ نقطه را بهم وصل کنید.

۲۵. بزها را ازکلمها جداکنید

حالا، مسأله‌ای راحل کنید که به‌مفهومی نقیض مسألهٔ قبل است. آنجا، نقطه‌ها را به‌وسیلهٔ خط راست، بهم وصل کردیم، درحالیکه دراینجا بایدبه‌وسیلهٔ سه خط راست، بزها را ازکلمها، جداکنیم (شکل صفحهٔ ۳۴ را ببینید).

۲۶. دوقطار

قطاری ، بدون توقف از مسکو به طرف لنینگراد ، با سرعت ساعتی ۶۰ کیلومتر حرکت می‌کند . قطار دیگری بازهم بدون توقف ، از لنینگراد به‌طرف مسکو، باسرعت ساعتی ۴۰ کیلومتر حرکت می‌کند.

وقتی که این دوقطار، یك ساعت به زمان ملاقاتشان مانده است ، چقدر ازهم فاصله دارند؟

۲۷. درزمان مَدّ (شوخی)

کشتی در نزدیکی ساحل لنگر انداخته است و نردبان طنابی آن درکنار بدنهٔ کشتی آویزان است. نردبان ۱۰ پله دارد و فاصلهٔ بین هردوپله، ۳۰ سانتیمتر است. پائین‌ترین پله ، درست روی سطح آب قرارگرفته است . اقیانوس کاملاً آرام است، ولی مدشروع می‌شودکه آب را درهرساعت، ۱۵ سانتیمتر بالا می‌آورد.

بعدازچه‌مدتی، آب پلهٔ سوم نردبان را می‌پوشاند؟

۲۸. صفحهٔ ساعت

۱. صفحهٔ دایره‌ای ساعت را، با دوخط راست ، به‌سه‌قسمت چنان تقسیم کنیدکه عددهایی که درهریك ازاین‌قسمتها قرارگرفته است، مجموعهای برابر داشته باشند.

مربوط بمسألهٔ ۲۵. با سه خط راست، کلیها را از بزها جدا کنید.

۲. آیا می‌توان صفحهٔ دایره‌ای ساعت را به ۶ قسمت کرد ، طوری که در هرقسمت دوعدد قرارگرفته باشد وضمناً مجموع این دوعدد، برای همهٔ قسمتها، یکی باشد؟

۲۹. صفحهٔ ساعت شکسته

در موزه ، به ساعتی برخوردم که روی صفحهٔ آن با رقمهای رومی نوشته شده بود، منتهی به‌جای‌نماد (IV) که ما برای چهارمی‌شناسیم،از چهار خط استفاده کرده بود (IIII). شکافهایی که درصفحهٔ ساعت پیدا شده‌است،آنرا به‌چهارقسمت‌تقسیم کرده است،آنطورکه درشکل‌صفحهٔ۳۶ می‌بینید.مجموع عددها دراین‌قسمتهامتفاوت‌است، دریکی۲۱،دردیگری ۲۰، درسومی ۲۰ ودرچهارمی ۱۷.

من متوجه شدم‌که اگرکمی جای شکافها را عوض‌کنیم،مجموع عددها درهریك از چهارقسمت صفحهٔ ساعت ، مساوی ۲۰ می‌شود . این شکافهای جدید می‌توانند از مرکز هم عبور نکنند . صفحهٔ ساعت را در دفترچهٔ خود رسم‌کنید وجای جدید شکافهارا پیداکنید.

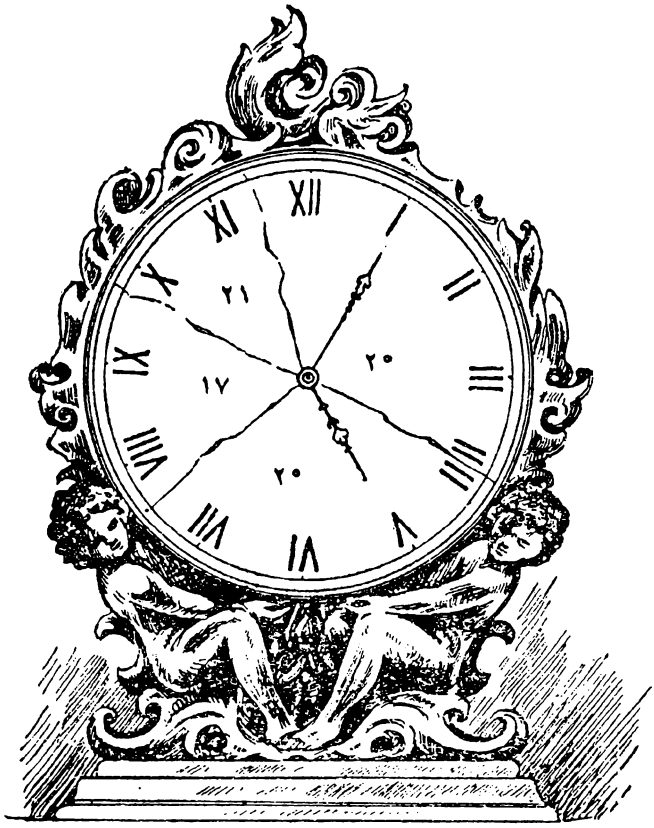
۳۰. ساعت عجیب (براساس یك معمای چینی)

یکروز، یك‌نفرازساعت‌ساز خواهش‌کردکه فوراً به‌خانه او برود. ولی ساعت‌سازجواب داد:

ـ من بیمارم ونمی‌توانم بیایم. ولی اگر به‌تعمیر پیچیده‌ای نیاز نیست، شاگردم را پیش شما بفرستم.

معلوم شدکه باید عقربه‌های‌شکسته را عوض‌کنند.استادساعت‌ساز گفت:

ـاین‌کار ازعهدهٔ شاگرد من برمی‌آید. اوساختمان ساعت‌رابررسی وعقربه‌ها را درست می‌کند.



مربوط به‌مسألهٔ ۲۹. درصفحهٔ یك ساعت قدیمی‌که درموزه دیدم، شکافهایی پیداشده بود.

شاگرد به‌کار کاملاً توجه‌کرد و با دقت ساختمان ساعت‌را مرتب کرد، ولی‌عقربه‌های مناسبی، برای‌آن پیدا نکرد. به‌همین‌مناسبت،جوان با موافقت صاحب ساعت ، تصمیم‌گرفت ، قطعه‌های شکستهٔ عقربه‌ها را به‌هم جوش‌دهد، واین‌کار را هم با دقت‌انجام داد. پس‌ازآنکه عقربه‌های

درست‌شده را به‌جای خودگـذاشت ، وقت ساعت را تنظیم کـرد : عقربهٔ بزرگ را روی۱۲ و عقربهٔ کوچك را روی ۶ قرارداد (درست ساعت ۶ عصربود).

ولی ، بلافاصله بعد ازآنکه شاگرد ، برای‌گزارش پایان‌کـار نزد استادش‌آمده بود، تلفن زنگ زد. جوان،گوشی تلفن را برداشت وفریاد خشمگینی را شنیدکه می‌گفت:

ـ شما ساعت را بد تعمیرکرده‌اید ، زیـرا وقت را نادرست نشان می‌دهد .

شاگرد ساعت‌سازکه ازاین‌اطلاع مشتری متعجب‌شده بود،باشتاب به‌طرف‌منزل او حرکت‌کرد . وقتی‌که به منزل مشتری رسید ، ساعتی‌که تعمیرکرده بود، شروع ساعت ۹ (کمی بعداز۸) را نشان می‌داد . شاگرد ساعت‌ساز، ساعت جیبی خودرا بیرون‌آورد وبه‌طرف‌صاحبخانه خشمگین درازکرد :

ـ خواهش می‌کنم .ببینید، ساعت‌شما حتی یك‌ثانیه هم فرق‌ندارد.

مشتری حیرت‌زده، مجبوربود قبول‌کندکه ساعت او درآن‌لحظه، وقت درست را نشان می‌دهد.

ولی‌صبح‌فردا،مشتری دوباره تلفن‌کرد وگفت‌که عقربه‌های ساعت چنان حرکت می‌کنندکه اورا به‌کلی‌گیج‌کرده‌اند. شاگرد استاد، دوباره نزد مشتری رفت. ساعت ، شروع هشت (کمی بعداز۷) را نشان می‌داد ، به‌ساعت خودش نگاه‌کرد،همان وقت را نشان می‌داد؛ به‌سختی جلوخشم خودش راگرفت:

ـ شما مرا دست انـداخته‌اند ! ساعت شما ، وقت دقیق را نشان

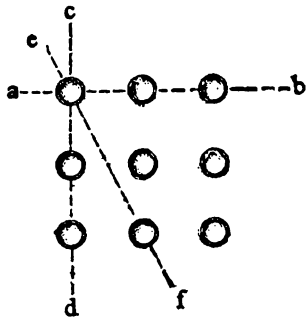
می‌دهد.

درواقع هم، ساعت وقت را درست نشان می‌داد. شاگرد عصبانی استاد، می‌خواست ازآنجا خارج شود، ولی صاحبخانه اورا نگه‌داشت. وبعدازچند دقیقه، علت این پیش‌آمد عجیب را پیداکردند.

آیا شماهم حدس نمی‌زنید، وضع ازچه‌قرار بوده‌است؟

۳۱. سه‌تا درهرردیف

۹ دکمه روی میز به‌شکل مربع بچینید، به‌نحوی‌که درهرضلع ۳ دکمه و یك دکمه هم درمرکز باشد (شکل را ببینید). اگر روی خط راستی ۲ دکمه یا بیشتر قرارگرفته باشد؛ وضع را ردیف می‌نامیم. مثلاً ab و cd، ردیفهایی هستندکه در هرکدام ازآنها ۳ دکمه وجود دارد، و ef ردیفی است‌که شامل ۲ دکمه است.



مربوط به‌مسألهٔ ۳۱

معلوم‌کنید در شکل، رویهم چند ردیف شامل ۳ دکمه و چندردیف شامل ۲ دکمه وجوددارد.

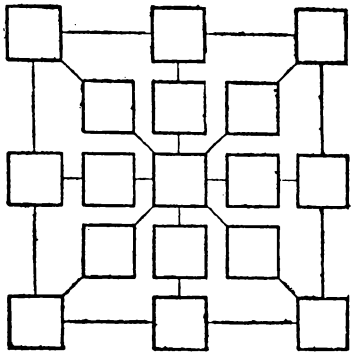
۲ دکمه از وضعی‌که روی شکل نشان داده شده‌است بردارید، به‌نحوی‌که تنها با حرکت‌دادن یکی از دکمه‌های باقیمانده، سه‌ردیف بدست آیدکه در هرکدام سه دکمه باشد. با ۶ دکمه، به‌چه‌ترتیب می‌توان سه‌ردیف دیگر سه دکمه‌ای بدست‌آورد؟

۳۲. ده ردیف

به‌سادگی می‌توان با ۱۶ مهره، ۱۰ ردیف چهارمهره‌ای درست‌کرد. کمی

مشکل‌تر اینست که با ۹ مهره، ۱۰ ردیف درست کنیم، که درهرردیف ۳ مهره وجود داشته باشد.

هردومسأله را حل کنید.



مربوط به‌مسألهٔ ۳۳

۳۳. عددها را مرتب کنید

روی یك صفحهٔ کاغذ این‌شکل را رسم کنید وسپس این عددها را در نظر بگیرید:

عدد ۲۰، ۵ مرتبه،

عدد ۱۵، ۳ مرتبه،

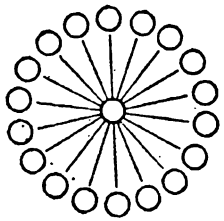
عدد ۱۰، ۳ مرتبه،

عدد ۵ ، ۶ مرتبه.

این عددها را درخانه‌های شکل طوری قرار دهیدکه مجموع آنها درطول هرخط راست، مساوی ۵۵ شود.

۳۴. از۱تا۱۹

در ۱۹ دایره‌ای‌که درشکل دیده می‌شود ، باید همهٔ عددهای از۱تا۱۹ را قرارداد، به‌نحوی که مجموع عددها، در هرسه دایره‌ای‌که روی یك خط راست واقع است، مساوی۳۰شود.



مربوط به‌مسألهٔ ۳۴

۳۵. سریع، ولی بااحتیاط

چه‌کسی این چهارمسأله را تندتر حل می‌کند؟

مسألهٔ ۱. دریك نیمروز اتوبوس مسافری ازتهران به‌طرف‌قزوین حرکت‌کرد . یك ساعت بعد، دوچرخه‌سواری از قزوین به‌طرف تهران ، و البته با سرعت‌کمتری ، حرکت‌کرد . وقتی‌که مسافرین اتوبوس و

دوچرخه به‌هم می‌رسند، کدامیك از آنها، دورتر از تهران است؟

مسألهٔ ۲. کدام سنگین‌تر است . یك کیلوگرم سکه ده ریالی و یا نیم کیلوگرم سکهٔ بیست ریالی؟

مسألهٔ ۳. درساعت ۶ ، ساعت دیواری ۶ ضربه زد . من با ساعت خودم امتحان کردم و دیدم که از اولین تا ششمین ضربه، درست ۳۰ ثانیه طول کشید. حالا اگر برای ۶ ضربه، ۳۰ ثانیه وقت لازم است، برای ۱۲ ضربه‌ای که ساعت، درظهر یانیمه‌شب می‌زند، چقدر وقت لازم است؟

مسأله ۴. ازیك نقطه، ۳ پرستو باهم پرواز می‌کنند، کی آنها روی یك صفحه واقع خواهند بود؟

وحالا با قضاوت آرامتر، جوابهای خودرا بررسی کنید ونظری هم به‌قسمت جواب وحل بیندازید.

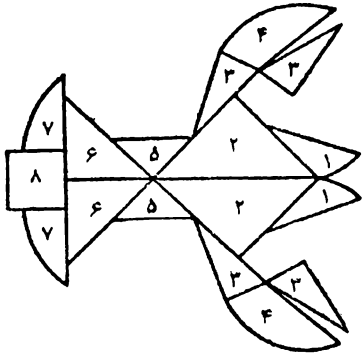
ـ خوب ؛ چه‌پیش آمده است ؟ آیا گرفتار دامهای منطقی که در محتوی این مسأله‌های ساده وجوددارد، نشده‌اید؟

اینگونه مسأله‌ها، بیشتر ازاینجهت جالب‌اندکه سبب تمرکز دقت می‌شوندو آدمی‌را درموردنتیجه گیریهای عادی فکرخود، محتاط‌تر می‌کنند.

۳۶. خرچنگ

خرچنگی که در شکل می‌بینید ، از ۱۷ قسمت درست شده است.

چگونه می‌توان ازقطعه‌های این خرچنگ دوشکل ساخت : یك دایره ودرکنارآن، یك مربع؟



مربوط به‌مسألهٔ ۳۶، ازقطعه‌های «خرچنگ» دایره ومربع بسازید.

۳۷. ارزش کتاب

برای قیمت کتاب ۱۰۰ ریال و

علاوه‌برآن نصف قیمت کتاب‌را پرداخته‌ایم. کتاب چقدر می‌ارزد؟

۳۸. مگس مزاحم

دو ورزشکار از دونقطه به فاصلهٔ ۳۰۰کیلومتر روی یك جادهٔ شوسه آسفالتی با دوچرخه دریك‌زمان به‌طرف یکدیگر حرکت‌کردند. درهمان موقع حرکت آنها، مگسی روی صورت دوچرخه‌سوار اول نشست و بلافاصله به‌طرف دوچرخه‌سوار دوم پروازکرد. همینکه به‌اورسید، روی صورت اونشست و بلافاصله به طرف دوچرخه‌سوار اول رفت. وقتی‌که به‌دوچرخه‌سوار اول رسید، صورت‌اوراگزید وفوراً به‌طرف دوچرخه‌سوار دوم پروازکرد. مگس به‌این‌ترتیب، به مزاحمت خود ادامه داد تا دو دوچرخه‌سوار به‌هم رسیدند.

مگس پرواز خودرا بین دو دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت، ۱۰۰ کیلومتر درساعت‌انجام می‌دهد ودوچرخه‌سوارها، درتمام مدت، باسرعت ثابت ۵۰کیلومتر درساعت حرکت می‌کنند. مگس چندکیلومتر پرواز کرده است؟

۳۹. کدام سال؟

آیا درسدهٔ بیستم، سالی وجوددارد، که اگرآنرا (با رقمهای لاتین) روی کاغذبنویسیم وبعدکاغذ را برگردانیم (یعنی‌پایین‌کاغذ را به‌طرف‌بالا، و بالای‌کاغذ را به‌طرف پائین بگیریم)، بازهم همان سال بدست‌آید؟

۴۰. دوشوخی

شوخی اول. پدر به دخترش تلفن‌کرد و از او خواست، چیزهایی را که برای‌مسافرتش لازم است، بخرد، وگفت‌که پول خرد درپاکت‌کوچکی روی میزتحریر است. دختر به‌طرف میزتحریر رفت، به‌آن نظری‌انداخت

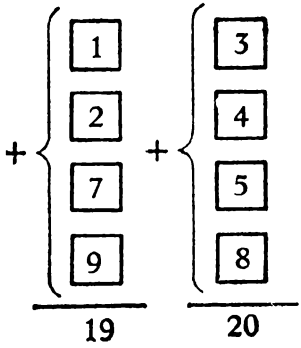
و عدد ۸۰۸ را روی آن خواند ، پولها را ازآن بیرون‌آورد ، درکیف خودش ریخت وپاکت را مچاله‌کرد و دور انداخت.

درمغازه ، به‌اندازهٔ ۸۰۰ ریال جنس انتخاب‌کرد ، ولی وقتی‌که خواست پول را بپردازد، متوجه شدکه نه‌تنها ۸ ریال باقی نمانده‌است، بلکه حتی مقداری‌کسر دارد.

وقتی‌که به‌منزل رسید، مطلب را به‌پدرش‌گفت وازاوپرسیدکه‌آیا موقع شمردن پولها ، اشتباه نکرده است . پدرگفت‌که او هیچ اشتباهی درشمردن پولها نداشته است ، بلکه اشتباه از خود دختر است . اشتباه دختر درکجاست؟

شوخی دوم . ۸ تکه‌کاغذ ببرید و روی‌آنها،عددهای 1،2،3،4،5،7،8 و9 را بنویسید و در دوستون ، آنطورکه در شکل‌می‌بینید قراردهید.

تنهاجای‌دوتکه‌کاغذی‌راکه دریك ردیف قرار دارند، جابجاکنید، به‌نحوی که مجموع‌عددهای دوستون، برابرشود.



مربوط به‌مسألهٔ ۴۰ ،شوخی دوم

۴۱. من چندسال دارم؟

وقتی‌که پدرم ۳۱ سال داشت، من ۸ ساله بودم، وحالا سن پدرم دوبرابر سن من است. من‌حالا چندسال دارم؟

۴۲. تخمین بزنید

درمقابل‌شما، دوستون عدد وجود دارد: (صفحهٔ ۴۳ را ببینید)

با دقت نگاه‌کنید: عددهای ستون دوم، همان عددهای ستون‌اول است، منتهی به‌ردیف عکس‌آنها.

مجموع کدام ستون بزرگتر است؟ ابتدا مجموعهارا بانگاه‌کردن، مقایسه‌کنید،یعنی، بدون‌اینکه جمع‌ها را انجام دهید؛آیا ممکن است‌این دومجموع برابر باشند ، یا یکی از دیگری بزرگتر است ؟ و سپس با جمع‌کردن، نتیجه‌ای راکه حدس زده‌اید، امتحان‌کنید.

۱	۱۲۳۴۵۶۷۸۹
۲۱	۱۲۳۴۵۶۷۸
۳۲۱	۱۲۳۴۵۶۷
۴۳۲۱	۱۲۳۴۵۶
۵۴۳۲۱	۱۲۳۴۵
۶۵۴۳۲۱	۱۲۳۴
۷۶۵۴۳۲۱	۱۲۳
۸۷۶۵۴۳۲۱	۱۲
۹۸۷۶۵۴۳۲۱	۱

۴۳. جمع‌کردن سریع

برای جمع این هشت عدد شش رقمی

$$+\begin{cases} ۳۲۸۶۴۵ \\ ۴۹۱۲۲۱ \\ ۸۱۶۳۰۴ \\ ۱۱۷۵۸۶ \\ ۶۷۱۳۵۵ \\ ۵۰۸۷۷۹ \\ ۱۸۳۶۹۶ \\ ۸۸۲۴۱۴ \end{cases}$$

راهی وجوددارد،که می‌توان باگروه‌بندی‌آنها، جواب را در۸ثانیه‌بدست آورد .آیا شما هم درهمین‌مدت حاصلجمع.را بدست‌آوردید ؟ البته در قسمت جواب و حل ، راهنمایی وجود دارد ، ولی اگرشما بخواهید به‌آن مراجعه‌کنید، دیگر وقتتان می‌گذرد.

***

می‌توانید به‌دوست خود دوشعبده‌بازی نشان دهید ،که می‌توان‌به‌شوخی نام‌آنها را هم «جمع‌کردن سریع» نامید.

شعبده‌بازی اول. بگوئید:

ـ بدون اینکه درابتدا به من نشان بدهید ، یك ستون از عددهای بزرگ، هرچندتا و با هرچند رقم‌که می‌خواهید ، بنویسید . سپس من‌هم به‌همان تعدادعدد به‌سرعت زیرآنها خواهم‌نوشت وحاصلجمع‌کل را فوراً بدست خواهم‌آورد.

فرض‌کنید، مثلا دوست شما بنویسد:

۷۶۲۱

۳۰۵۷

۲۷۹۴

۴۵۱۸

وشما عددهایی را می‌نویسید،که یکی پس‌ازدیگری، عددهای مفروض را تا ۹۹۹۹ تکمیل‌کند، یعنی این عددها را:

۵۴۸۱

۷۲۰۵

۶۹۴۲

۲۳۷۸

در واقع:

۷۶۲۱+	۳۰۵۷+	۲۷۹۴+	۴۵۱۸+
۲۳۷۸	۶۹۴۲	۷۲۰۵	۵۴۸۱
۹۹۹۹	۹۹۹۹	۹۹۹۹	۹۹۹۹

حالا به‌سادگی می‌توانید، حاصلجمع عددهای این ستون بزرگ را، به‌سرعت تمام، بدست‌آورید:

۷۶۲۱+
۳۰۵۷
۲۷۹۴
۴۵۱۸
۵۴۸۱
۷۲۰۵
۶۹۴۲
۲۳۷۸

باید ۴ برابر ۹۹۹۹ را پیداکنید، ولی این ضرب را هم می‌توانید به‌سرعت انجام دهید، به‌این‌ترتیب‌که ۴ برابر ۱۰۰۰۰ را بدست‌آورید و ۴ واحد ازحاصلضرب کم کنید:

$$۱۰۰۰۰ \times ۴ - ۴ = ۴۰۰۰۰ - ۴ = ۳۹۹۹۶$$

شعبده‌بازی دوم . دوعدد، با هرچند رقم‌که مایلید،زیرهم بنویسید، من عدد سومی زیرآنها می‌نویسم وازچپ به‌راست، رقمهای حاصلجمع هرسه‌عدد را به‌سرعت زیرآنها یادداشت می‌کنم.

فرض‌کنید، شما بنویسید:

۷۲۶۰۳۲۹۴
۵۱۲۷۳۰۸۱

ومن‌مثلاً این‌عددرا می‌نویسم: ۴۸۷۲۶۹۱۸ وبلافاصله‌حاصلجمع را به‌شما می‌گویم.

عدد سوم را چگونه باید نوشت و چگونه می‌توان حاصلجمع را به‌سرعت پیداکرد؟

۴۴. درکدام‌دست؟ (شیرینکاری ریاضی)

دوسکه به‌دوستتان بدهید، به‌نحوی‌که تعداد ریالهای یکی زوج وتعداد ریالهای دیگری فرد باشد (مثلاً دوریالی وپنج ریالی). بعد از دوستتان بخواهید یکی‌ازسکه‌ها را در دست راست ودیگری را در دست چپ خود مخفی‌کند، طوری‌که شما نبینیدکدام سکه را درکدام دست‌گرفته است. شما به‌سادگی می‌توانیدکشف‌کنیدکه در هردست او ،کدام سکه پنهان شده است.

به‌اوپیشنهادکنید، مقدار پولی‌که در دست راست اوست،سه‌برابر و مقدار پولی‌که دردست چپ اوست ، دوبرابرکند ؛ سپس مجموع دو مقداری راکه بدست‌آورده است ، محاسبه‌کند و به‌شما بگوید . اگر این مجموع زوج باشد، ۲ ریالی در دست راست و اگر فرد باشد ، در دست چپ اوست.

آیا می‌توانید سبب این وضع را روشن‌کنید؟

۴۵. چندنفرند؟

پسری همانقدرکه خواهردارد، برادرهم دارد؛ولی برای خواهر او، تعداد خواهرهایش نصف تعداد برادرهایش می‌باشد. دراین‌خانواده، چند برادر وچند خواهر است؟

۴۶. رقمهای مشابه

به‌شرطی‌که تنها ازعمل جمع استفاده‌کنید، عدد ۲۸ را با استفاده از پنج

رقم ۲ وعدد ۱۰۰۰ را، بااستفاده ازهشت رقم ۸، بنویسید.

۴۷. عدد صد

بااستفاده ازعملهای حسابی، عدد صد را یا به‌کمك پنج رقم ۱، و یا به کمك‌پنج رقم۵، بنویسید. ضمناً با پنج‌بار استفاده ازرقم۵، به‌سه‌ترتیب می‌توان عدد صد را پیداکرد.

۴۸. بحثی درانجمن ریاضی

این پیش‌آمد، دریکی ازانجمنهای ریاضی‌مدرسهٔ ما، اتفاق افتاد.هروقت که دانش‌آموز جدیدی ، داوطلب ورود به انجمن بود ، رئیس انجمن ، مسأله‌ای‌که خیلی‌هم مشکل نبود، درمقابل او قرارمی‌داد. اگرتازه‌وارد، مسأله را حل می‌کرد، بلافاصله به‌عضویت انجمن پذیرفته می‌شد ، ولی اگرنمی‌توانست‌مسأله را به‌طورکامل حل‌کند ، تنها حق داشت به‌عنوان مستمع‌آزاد درانجمن شرکت‌کند.

به‌خاطر دارم‌که یکبار، رئیس انجمن‌ما، حل این مسأله را به‌ویتیا پیشنهادکرد :

«داریم :

۱۱۱

۳۳۳

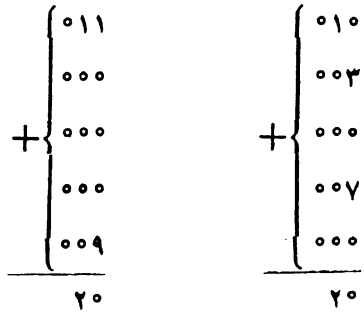
۵۵۵

۷۷۷

۹۹۹

۱۲ رقم ازاین عددها را به صفرتبدیل‌کنید ، به‌نحوی‌که مجموع آنها مساوی ۲۰ شود».

ویتیا کمی فکر کرد و به‌سرعت نوشت:



سپس لبخندی زد و گفت:

ـ اگر دراین پنج عدد سه‌رقمی ، ۹ رقم را به‌صفر تبدیل کنیم ، می‌توان برای مجموع به‌عدد ۱۱۱۱ رسید. آزمایش کنید!

رئیس انجمن، کمی نگران شد، ولی باشجاعت به‌محاسبه پرداخت. او نه‌تنها مسألهٔ ویتیا را حل کرد، بلکه حتی حالت دیگری از آنرا هم پیدا کرد؛ او گفت:

ـ می‌توان به‌جای ۹ رقم، تنها ۸ رقم ازاین پنج‌عدد سه‌رقمی را طوری به‌صفر تبدیل کرد که مجموع آنها همان مقدار قبلی، یعنی ۱۱۱۱ بشود.

نوبت ویتیا بود که فکر کند. اعضای انجمن با علاقمندی ، به‌این دوئل ریاضی جالب، چشم دوخته بودند. ویتیا این مشکل را هم حل کرد و درمقابل رضایت همهٔ حاضران ، بازهم راه جدیدی برای ادامهٔ بحث پیدا کرد :

ـ می‌توان دراین پنج عدد سه‌رقمی، نه ۹ ونه ۸ ، بلکه تنها ۶ رقم را طوری به صفر تبدیل کرد که مجموع تغییری نکند ، یعنی همان ۱۱۱۱ بشود.

معلم ریاضی، ضمن اینکه هردونفررا بشدت تحسین می‌کرد، گفت

که می‌توان این مجموع ۱۱۱۱ را، نه‌باتغییر۸،۹ یا ۶ رقم ، بلکه تنها با تبدیل ۵ رقم به‌صفر، بدست‌آورد.

جوابهای هرچهارحالت این مسأله را پیداکنید.

آیا می‌توان با تبدیل ۷ رقم ازپنج عدد سه‌رقمی ، به صفر، همین مجموع ۱۱۱۱ را بدست‌آورد؟حداکثرتعداد رقمهایی‌که می‌توان به‌صفر تبدیل‌کرد تا همین مجموع ۱۱۱۱ بدست‌آید، چقدر است؟

دربارهٔمسألهٔ مشابهی‌فکرکنیدکه پنج‌عددمفروض،به‌جای سه‌رقم، شامل پنج رقم باشد: اولی ازپنج رقم واحد، دومی ازپنج رقم۳، سومی ازپنج رقم ۵، چهارمی ازپنج رقم ۷ وپنجمی ازپنج رقم ۹.

۴۹. عدد بیست

ازچهارعدد فرد،می‌توان به‌سادگی‌مجموعی‌مساوی۲۰، تشکیل داد،مثلا:

$$۱+۱+۳+۵=۱۰$$

یا به‌این‌ترتیب :

$$۱+۱+۱+۷=۱۰$$

جواب سومی هم وجوددارد:

$$۱+۳+۳+۳=۱۰$$

جواب دیگری نمی‌توان پیداکرد (البته با تغییرجای جمله‌های جمع ، نمی‌توان‌گمان‌کردکه جواب تازه‌ای پیدا شده است).

ولی مسأله زیر جوابهای بیشتری دارد:

عدد ۲۰ را از مجموع هشت عدد فرد بدست‌آورید ،که بین آنها عددهای مساوی هم می‌تواند وجود داشته باشد.

همهٔ جوابهای این مسأله را پیداکنید و ثابت‌کنید بین آنها مجموعه‌هایی وجود دارد که شامل بیشترین تعداد جمله‌های نامساوی

کتابخانه مجازی ریاضیات

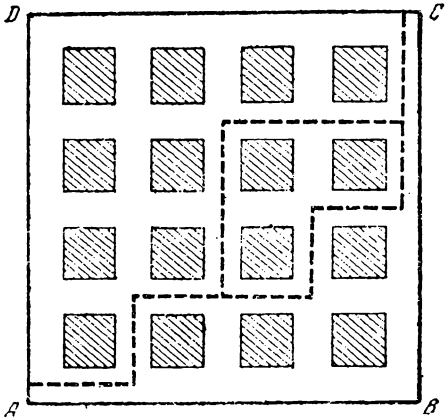
جمع باشد.

۵۰. چند خط سیر؟

از نامهٔ دانش‌آموزان:

«ما درانجمن ریاضی ، نقشهٔ شانزده بخش شهر خودمان را رسم کرده‌ایم. درطرح ضمیمه، نقشهٔ همهٔ بخشهارا به‌صورت مربعهای‌مساوی، نشان داده‌ایم.

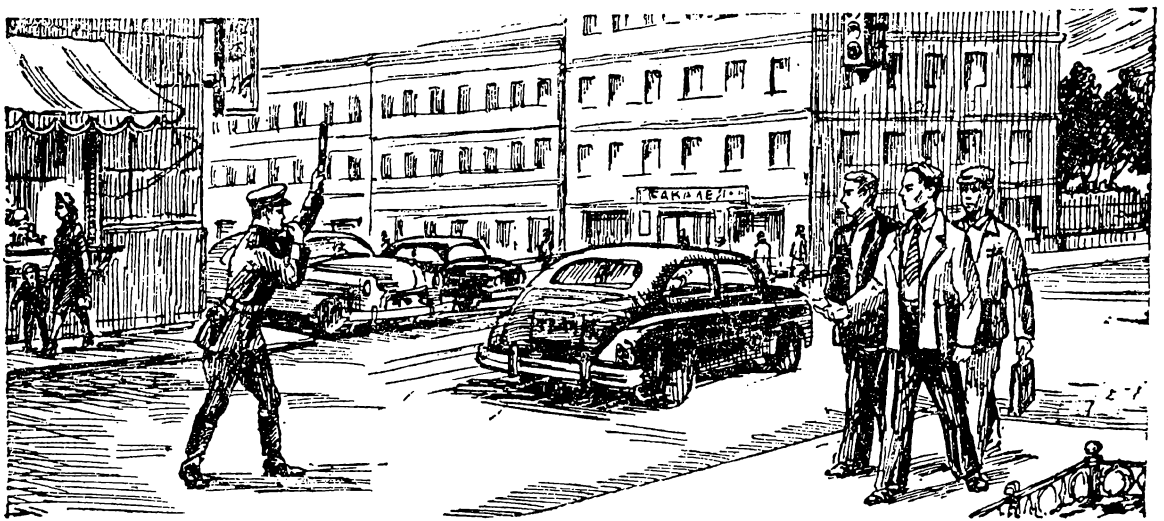
ما علاقه‌مندیم بدانیم که فاصلهٔ از A تا C را با چند خط سیر مختلف، می‌توان پیمود، به‌شرطی که درخیابانهای شهربه‌جلو و به‌راست،



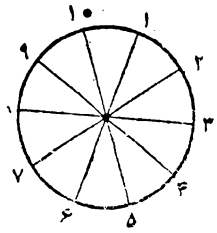
مربوط به‌مسألهٔ ۵۰. نقشهٔ شانزده بخش شهرما

به‌راست و به‌جلو، بتوان حرکت‌کرد . ضمناً قسمتهای جداگانه‌ای ازخط سیرها، می‌توانند برهم منطبق‌شوند (خطهای نقطه‌چین را روی طرح‌نقشه ببینید). به‌نظرما رسیده است که این، یك مسألهٔ ساده نیست. آیا ما آنرا درست حل‌کرده‌ایم، که ۷۰خط سیر مختلف، برای‌جواب‌بدست‌آورده‌ایم؟»

به‌این‌نامه، چه جوابی باید داد؟



مربوط به‌مسألهٔ ۵۰. ما علاقه‌مندیم بدانیم، چند خط‌سیر می‌تواند ازیك نقطهٔ‌شهرما به‌نقطه دیگرآن، وجودداشته‌باشد .



مربوط به‌مسألهٔ ۵۱

۵۱. جای عددها را تغییردهید

عددهای از ۱ تا ۱۰ را در دوانتهای پنج قطر دایره ، آنطورکه درشکل دیده می‌شود ، قرار داده‌ایم. دراین وضع،تنها دریك‌مورد، مجموع دوعدد پهلوی هم،بامجموع عددهای مقابل‌آنها (عددهایی‌که درطرف دیگر قطرها قرارگرفته‌اند)، یکی است، یعنی

$$۱۰+۱=۵+۶$$

ولی مثلاً

$$۱+۲\neq۶+۷$$

یا

$$۲+۳\neq۷+۸$$

این‌عددهارا طوری بگذاریدکه مجموع هردوعدد دلخواه مجاور، برابر باشد بامجموع دوعدد متقابل متناظرآنها.

می‌توان انتظارداشت‌که این مسأله، بیش‌ازیك جواب داشته‌باشد، یعنی اوضاع مختلفی از عددهای مفروض باشدکه با خواست مسأله ، سازگار باشد. راهی را برای حل مسأله پیدا کنیدکه به‌کمك آن بتوان تعداد جوابهای مسأله را بدست‌آورد.

۵۲. با عملهای مختلف، یك نتیجه بدست می‌آید

اگربین دوعدد مساوی۲، علامت جمع را به‌ضرب تبدیل‌کنیم ، درنتیجه تغییری حاصل نمی‌شود. در واقع $۲\times۲=۲+۲$.

به‌آسانی می‌توان حتی ۳ عدد انتخاب‌کردکه همین خاصیت را داشته باشند، یعنی

$$۱+۲+۳=۱\times۲\times۳$$

همچنین۴ عدد یك رقمی وجود داردکه حاصلجمع و حاصلضرب

آنها یکی است.

چه‌کسی زودتر از همه این عددها را نام می‌برد؟ خوب! کار را ادامه دهید: ۵، بعد ۶، سپس ۷ عدد یك‌رقمی و غیره پیداکنیدکه همین خاصیت را داشته باشند. این را هم درنظرداشته باشیدکه از ۵ عددبه‌بعد، تعداد جوابها بیش‌ازیکی است

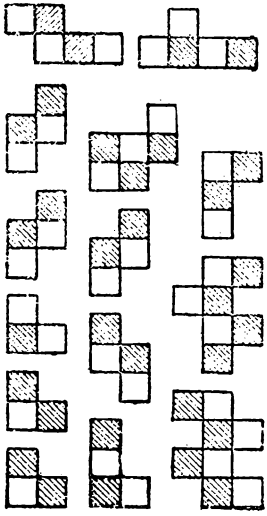
۵۳. نود و نه وصد

از علامت جمع (+)، چندبار باید بین رقمهای عدد ۹۸۷۶۵۴۳۲۱ ، قرارداد تا عدد ۹۹ بدست‌آید.

این‌مسأله دوجواب دارد، آنهارا پیداکنید؛ حالا ببینید می‌توانید با استفاده ازعلامت جمع بین رقمهای‌عدد ۱۲۳۴۵۶۷ ، عدد ۱۰۰ را بدست آورید (جای رقمهای این عدد را نباید عوض‌کرد). آیا برای این عمل هم می‌توانید دوجواب بدست‌آورید؟

۵۴. صفحهٔ شطرنجی که قسمتهای آن ازهم جدا می‌شود

شطرنج‌باز شوخ، صفحهٔ مقوایی شطرنج خودرا آنطورکه درشکل می‌بینید به ۱۴ قسمت‌کرد؛ وبه‌این‌ترتیب، صفحهٔ قطعه‌قطعه شده‌ای در مقابل او قرارگرفت. آنوقت به دوستش، که می‌خواست با او بازی‌کند، پیشنهادکردکه اول صفحه را درست‌کند، تا بتوانند بازی شطرنج را شروع‌کنند، و ۱۴ قطعهٔ بریده‌شده را جلو او ریخت. شما هم به‌کمك یك صفحهٔ

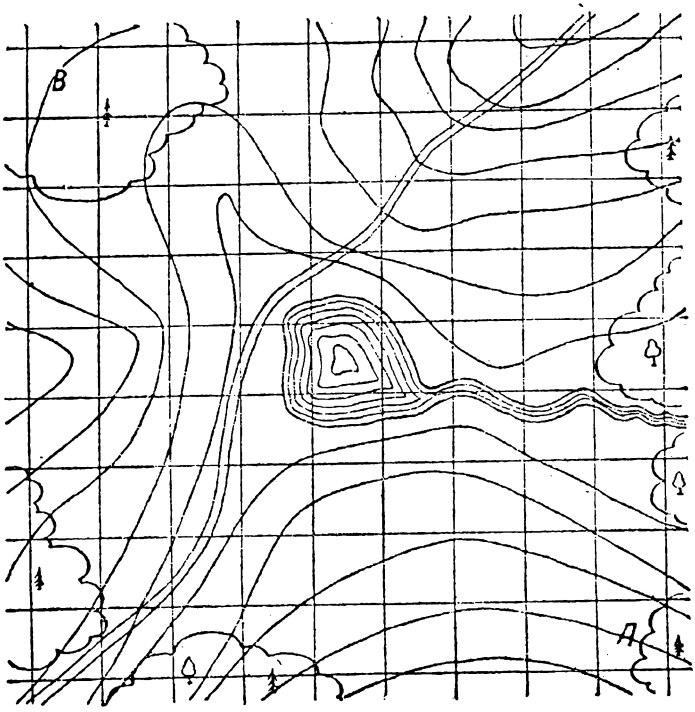


مربوط به مسألهٔ ۵۴

مقوایی، که به‌صورت صفحهٔ شطرنج درآورده‌اید، همین ۱۴ قطعه‌را ببرید و ببینید، درست کردن آن چقدر وقت می‌گیرد.

۵۵. درجستجوی سنگ آسمانی

بعدازآنکه گردش علمی زمین‌شناسهای جوان تمام شد ، مهندس تصمیم گرفت مسأله‌ای را دربرابرآنها قراردهد، که بیشترجنبهٔ آزمایش اندیشهٔ ریاضی داشت. اونقشهٔ محل را، که به‌مربعهایی تقسیم شده بود، پهن کرد (ما این نقشه را دراینجا داده‌ایم) و گفت:



مربوط به‌مسألهٔ ۵۵. زمین‌شناسها، باید بادقت این منطقه را بازرسی کنند

ـ برای جستجوی سنگ آسمانی ، باید دوزمین‌شناس به بازرسی بپردازند .آنها بایـد از همهٔ خانه‌های مربعی بگـذرند، البته به‌جز خانهٔ مرکزی‌که درآن برکهٔ‌کوچکی قراردارد. اگر یکـی از زمین‌شناسها، به خانه‌ای وارد شد، زمین‌شناس دیگرحق ورود به‌آنرا ندارد. حرکت باید تنها به‌صورت‌افقی وقائم باشد، به‌صورت‌قطری ازخانه‌ها نمی‌توان‌عبور کرد.یکی‌ازجستجوگرها باید ازخانهٔ Aشروع کند وازخانهٔB خارج شود، دومی بایـد از خانهٔ B شروع کند و از خانهٔ A خـارج شود . مسیر دو زمین‌شناس را طوری علامتگذاری‌کنیدکـه تعداد خانه‌هایی‌کـه هریك از آنها باید جستجوکنند ، باهم برابر باشد.این شرطهای غیرعادی را تنها برای‌آزمایش اندیشهٔ ریاضی شماگذاشته‌ام.

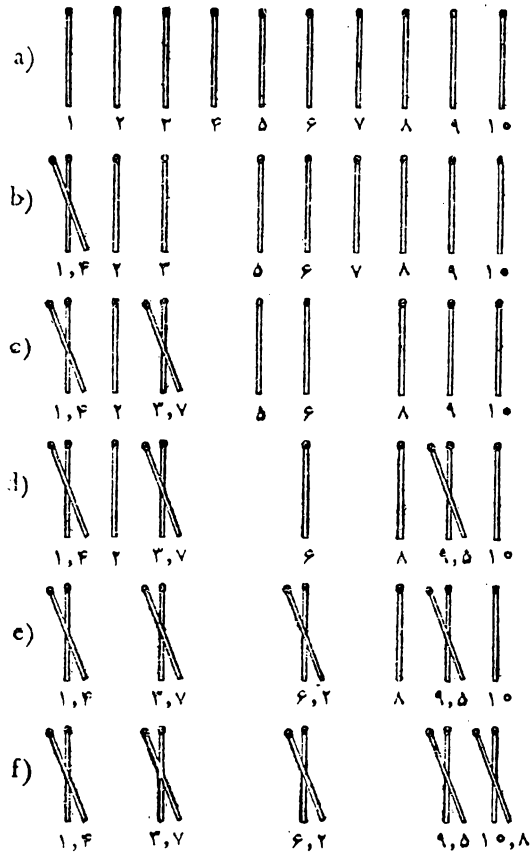
زمین‌شناسهای جوان، نقشه را دردفترچهٔ خود رسم‌کردند وبعداز زمان‌کوتاهی، موفق به‌حل مسأله‌ای‌که مهندس طرح‌کرده بود شدند.شما هم مسألهٔ مهندس را حل‌کنید.

۵۶. درگروههای دوتایی جمع‌کنید

ده چوب‌کبریت را در ردیف هم چیده‌ایم . می‌توانیم آنها را به صورت ۵جفت درآوریم، به‌این‌ترتیب‌که هرباریك چوب‌کبریت ازروی دوچوب کبریت دیگر بپرد و روی سومی قرارگیرد (هرچوب‌کبریت تنها یکبار می‌تواند حرکت‌کند)، مثلاً آنطورکه درشکل صفحهٔ۵۶دیده می‌شود.

برای تبدیل این ۱۰ چـوب‌کبریت به ۵ جفت و بـا رعایت همین شرطها ، شما می‌توانید راه‌حل دیگری هم پیداکنید . حالا این پرسش را دربرابرخود می‌گذاریم: اگربخواهیم،بارعایت همین شرطها، ۱۰۰چوب کبریت را به‌صورت ۵۰جفت درآوریم، در روش حل چه دگرگونیهایی باید بدهیم؟

به‌شکل نگاه‌کنید. نخستین «پرش» را، کبریت ۴ انجام می‌دهد و جفت (۱،۴) را در یکی از کناره‌های ردیف به وجود می‌آورد. از روی جفت (۱،۴)، هیچ کبریتی نمی‌تواند بپرد، بنابراین، این زوج مرزی کبریتها، در حرکتهای بعدی، هیچ دخالتی ندارد. به‌این‌ترتیب، مسأله



مربوط به‌مسألهٔ ۵۶. به‌این‌ترتیب می‌توان ۱۰ چوب کبریت را به ۵ جفت، با پرش از روی دو چوب کبریت، تبدیل کرد.

منجر به این می‌شود که با هشت چوب کبریت باقیمانده، یعنی چوب کبریتهای ۲، ۳، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰، چهار جفت درست کنیم.

وقتی که ۱۰۰ چوب کبریت را دریک ردیف چیده باشیم، با قرار دادن چوب کبریت ۴ روی ۱ ، و تشکیل زوج (۱،۴) درمرز، مسأله منجر به تشکیل ۴۹ جفت، از ۹۸ چوب کبریت باقیمانده می‌شود. سپس چوب کبریت ۶ را (که حالا کبریت چهارم از ۹۸ چوب کبریت باقیمانده است)، روی چوب کبریت ۲ (که اولین چوب کبریت از ۹۸ چوب کبریت است)، می‌گذاریم و جفت (۶ ، ۲) را تشکیل می‌دهیم؛ دراینصورت، مسأله منجر به تشکیل ۴۸ زوج از ۹۶ چوب کبریت باقیمانده می‌شود وغیره.

این روش را می‌توان تا جایی ادامه داد که تنها ۸ چوب کبریت دریك ردیف باقی بماند. ازاینجابه‌بعد، نمی‌توان حرکت‌را باهمین روش ادامه داد، زیرا اگر ۶ چوب کبریت را در ردیف‌هم قرار دهیم، نمی‌توانیم با رعایت شرط مسأله، آنها را به سه‌جفت تبدیل کنیم (آزمایش کنید!). برای‌اینکه مسأله را درحالت ۸ چوب کبریت حل کنیم، باید روش‌حل را تغییر داد (روی شکل ، حالتهای a، b، c، d، e و f را ببینید ؛ زوج (۴ ، ۱) را درنظر نگیرید!) توجه کنید که درحالت هشت چوب کبریت ، دو زوج اولی که درست می‌شود، نسبت به مرزهای ردیف، متقارن‌اند (درشکل، وضع d وجفتهای (۳،۷) و (۹،۵) را ببینید).

۵۷. درگروههای سه‌تایی جمع کنید

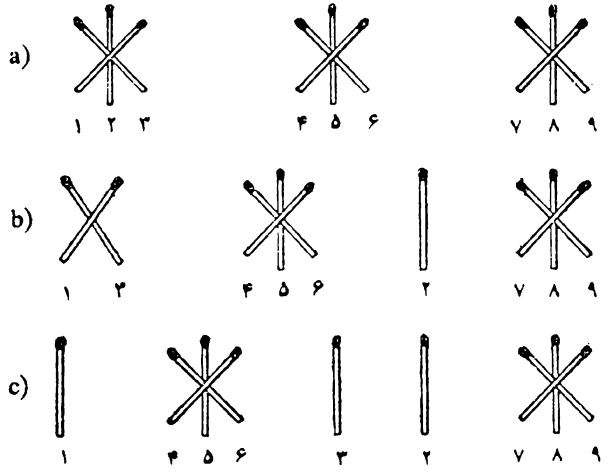
پانزده‌چوب کبریت دریك ردیف‌قرار گرفته‌اند(شکل صفحهٔ ۵۸ را ببینید). بایدآنهارا در ۵ گروه ۳تایی‌جمع کنیم. هرچوب کبریت‌تنهامی‌تواندازروی سه‌چوب کبریت بپرد و روی چوب کبریت چهارم یا جفت چوب کبریتی

که بعداز سه چوب کبریت قرار گرفته است ، قرار گیرد (هرچوب کبریت، تنها یکبار می‌تواند حرکت کند).

مربوط به‌مسألهٔ ۵۷. در ۵ گروه ۳تایی جمع کنید

این مسأله ،کمی مشکل‌تر از مسألهٔ قبل است ؛ حرکتهایی راکه برای حل آن لازم است، در ده سطربیان کنید وسپس حل‌خودرا باجواب، مقایسه کنید.

حالافرض کنید، به‌جای ۱۵ ردیف، ۱۸، ۲۱، ۲۴، ... ردیف چوب کبریت داشته باشیم، با تعمیم روشی که در مسألهٔ قبل به‌کار بردیم، می‌توان پشت‌سرهم وبه‌ترتیب ۳ چوب کبریت از ردیف کم کرد وآنها را رویهم



دربارهٔ مسألهٔ ۵۷. ۹چوب کبریت را نمی‌توان درگروههای سه‌تایی جمع کرد

دریك دستهٔ سه‌تایی، دریکی ازکناره‌های ردیف، جمع کرد. ولی دراینجا هم باید روشن کنیم که حداقل تعداد چوب‌کبریتها ، باید چقدر باشد تا مسأله جواب داشته باشد.

برای‌اینکه حداقل‌تعداد چوب‌کبریتها، برای قابل‌حل‌بودن مسأله، معلوم‌شود ، به‌جای آنکه چوب‌کبریتها را برای جمع‌شدن درگروههای سه‌تایی، حرکت دهید، برعکس،آنهارا ازقبل به‌صورت گروههایی‌سه‌تایی بچینید وسعی کنیدآنهارا به‌حالت اصلی، یعنی در ردیف هم، درآورید. برای این منظور باید این قاعده‌ها را رعایت‌کنید:

۱ـ وقتی‌که یك چوب‌کبریت را از یك‌گروه سه‌تایی برمی‌دارید، باید از روی سه‌چوب‌کبریت بپرد تا درجای جداگانه قرارگیرد؛

۲) یك چوب‌کبریت نمی‌تواند دوبارحرکت‌کند؛

۳) یکی‌ازچوب‌کبریتهای هرگروه، باید درجای خود باقی‌بماند.

اگرنتوانیم گروههای سه‌تایی را به‌این‌ترتیب به صورت ردیفی از چوب‌کبریتها درآوریم، به معنای‌آنست‌که از ردیف چوب‌کبریتها هم نمی‌توانیم به‌گروههای سه‌تایی برسیم.

بااین‌روش‌به‌سادگی معلوم می‌شودکه مثلاً، مسأله نه‌برای ۶ و نه‌برای ۹ چوب‌کبریت ، جواب ندارد . سه‌گروه سه‌تایی چوب‌کبریت انتخاب می‌کنیم(شکل a صفحهٔ۵۸).چوب‌کبریت۲راازروی‌گروه‌سه‌تایی (۴،۵،۶) (شکل b) وسپس چوب‌کبریت۳ را ازروی همین‌گروه، حرکت می‌دهیم؛ دراینصورت جداکردن چوب‌کبریتهای‌گروه (۴،۵،۶) ممکن نیست. درواقع، درسمت چپ این‌گروه یك چوب‌کبریت ودرسمت راست آن یك یا دو یا یکباره پنج چوب‌کبریت وجوددارد، و نمی‌توان یکی‌از چوب‌کبریتهای‌این‌گروه را طبق شرطهای مسأله، جابه‌جاکرد . وقتی‌که جابه‌جاکردن‌را، ازگروه دوم یاسوم هم‌شروع کنیم،به‌همین‌مشکل‌برخورد

می‌کنیم.

حالا خودتان حالت ۴گروه سه‌تایی راآزمایش‌کنید.

تعمیم مسأله. کمترین‌تعداد چوب‌کبریتها، چقدرباید باشد تابتوان با عبور هرچوب‌کبریت، از روی n چوب‌کبریت دیگر،گروههای n تایی تشکیل داد؟

۵۸. ساعت ازکار افتاده است

من ساعتم را به تعمیرگاه داده‌ام و ساعت‌دیواری هم ایستاده است . من به‌منزل دوستم‌که ساعت دقیقی دارد ، رفتم ، وقت را پرسیدم و بدون معطلی به‌منزل برگشتم.

درمنزل به‌سرعت محاسبهٔ ساده‌ای انجام دادم و عقربه‌های ساعت دیواری خودرا روی وقت صحیح قراردادم.

چگونه‌توانستم‌ساعت‌دیواری‌را روی وقت درست، به‌کاربیندازم، به‌شرطی‌که قبلاً برای من‌معلوم نبوده است‌که برای رفتن ازمنزل‌خودم به‌منزل دوستم، چقدروقت لازم است؟

۵۹. چهارعمل‌حساب

دراینجا در۷ سطرمتوالی، رقمهایی نوشته شده است:

۱ ۲ ۳ = ۱

۱ ۲ ۳ ۴ = ۱

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ = ۱

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ = ۱

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ = ۱

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ = ۱

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ = ۱

بدون اینکه ردیف این رقمها را عوض کنید، علامتهای چهارعمل حساب‌را بین‌آنها طوری قراردهیدکه نتیجهٔ عملها درهرردیف، مساوی ۱ شود. عملها باید به‌ردیف وازچپ به‌راست، طبق قاعدهٔ عملها، انجام شود؛ و البته اگرمثلاً بخواهیم مجموعی را درعدد بعدی یا قبلی‌ضرب کنیم، باید ازپرانتز استفاده‌کنیم. اگربین دوعدد، علامتی قرار ندهید، به‌معنای‌آنست‌که‌آنرا عدد دورقمی به‌حساب‌آورده‌اید.

دوجواب پیداکنید: یکی، بدون‌استفاده ازعلامت تفریق، ودیگری بااستفاده ازهرچهارعمل.

۶۰. عدد کیلومترشمار

وقتی‌که راننده، به‌کیلومترشمار اتومبیل‌خود نگاه‌کرد، دچارحیرت شد. کیلومترشمار این عدد را نشان می‌داد:

۱۵۹۵۱

عددی‌که‌کیلومترشمار نشان می‌داد، عددی متقارن بود، یعنی می‌شدآنرا ازچپ به‌راست و یا ازراست به‌چپ خواند، درهرحال همان عدد۱۵۹۵۱ می‌شد. راننده‌گفت:

ـ چه‌جالب است! وحالا به‌زودی بازهم عدد متقارن دیگری پیدا خواهد شد.

و واقعاً هم، بعداز۲ساعت، کیلومترشمار اتومبیل به عددی رسید که تفاوت نمی‌کردآنرا ازچپ‌به‌راست یا از راست‌به‌چپ بخوانیم.

معلوم‌کنید، راننده دراین۲ساعت، با چه سرعتی حرکت می‌کرده است؟

۶۱. برای شبکهٔ ساختمانهای‌آبی تسیملیانسکی

برای انجام یك دستور فوری مربوط به‌تهیهٔ ابزارهای اندازه‌گیری برای

شبکه ساختمانهای آبی تسیملیانسکی، یك گروه شامل یك سرگروه باتجربه و ۹ کارگر جوان، که به‌تازگی هنرستان صنعتی را تمام کرده بودند، تشکیل شد.

هریك از کارگرهای جوان به‌طور متوسط ، ۱۵ وسیله و سرگروه به‌اندازهٔ ۹ وسیله، بیشتر از مقدار متوسط هریك از ۱۰ عضو گروه ، درست کردند.

رویهم ، همهٔ عضوهای گروه ، چند وسیلهٔ اندازه‌گیری را درست کرده‌اند ؟

۶۲. تحویل به‌موقع غله

ستون کامیونهای گندم از ده به‌طرف شهر حرکت کردند. گندم را باید در ساعت ۱۱ صبح تحویل داد. اگر کامیونها باسرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت حرکت کنند، در ساعت ۱۰ صبح به‌شهر می‌رسند، و اگر باسرعت ۲۰ کیلومتر در ساعت حرکت کنند، ساعت ۱۲ به‌مقصد می‌رسند.

فاصلهٔ بین ده و شهر چند کیلومتر است ؟ کامیونها با چه سرعتی حرکت کنند تا بتوانند به‌موقع، غله را تحویل دهند؟

۶۳. درقطار ییلاق

دو دوست مدرسه‌ای، دریك قطار برقی، ازشهر به‌ییلاق می‌رفتند. یکی از آنها گفت:

ـ من متوجه شده‌ام که قطارهای مقابل ، هرپنج دقیقه یکبار، از کنارما رد می‌شوند. توچه فکر می‌کنی، اگرسرعت قطارها، درهردوجهت یکی باشد، درهرساعت چندقطار به‌شهرمی‌رسد؟

ـ روشن است که ۱۲ تا، زیرا ۱۲ = ۵ : ۶۰ .

ولی دوست اول بااین‌جواب موافق نبود و دراین‌باره دلیلی هم داشت .

شما دراین‌مورد چه‌فکر می‌کنید؟

۶۴. از ۱ تا ۱۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰

حکایت می‌کنند که وقتی گوس[۱] ۹ ساله بود، معلمش از او خواست که همهٔ عددهای صحیح از ۱ تا ۱۰۰ را باهم جمع کند:

$$۱+۲+۳+...+۹۹+۱۰۰$$

گوس کوچك، برای این جمع، راه‌حل ساده‌ای پیدا کرد: باید مجموع عدد اول و عدد آخر، سپس مجموع عدد دوم و عدد ماقبل آخر وغیره را پیدا کرد. هرکدام ازاین مجموعها مساوی ۱۰۱ و تعداد آنها مساوی ۵۰ است؛ بنابراین مجموع همهٔ عددهای صحیح از ۱ تا ۱۰۰ چنین می‌شود:

$$۵۰ \times ۱۰۱ = ۵۰۵۰$$

حالا شما ازهمین روش، برای حل مسألهٔ دشوارتری استفاده کنید: مجموع همهٔ رقمهای عددهای صحیح از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ را پیدا کنید. توجه داشته باشید، دراینجا صحبت از مجموع رقمهای همهٔ عددهاست، نه‌مجموع خود عددها.

۶۵. خواب عجیب «دوستدار» فوتبال

«دوستدار» فوتبال، که به‌خاطرشکست تیم خود دلخوربود، با ناراحتی خوابید. درخواب اطاق مربعی بزرگی دید که بدون مبل است ودروازه‌بان درآن تمرین می‌کند. اوتوپ فوتبال را به‌دیوار می‌زد و سپس آنرا می‌گرفت. ناگهان، دروازه‌بان کوچك وکوچکترشد، تا جایی که به‌صورت توپ کوچك سلولوئیدی تنیس رومیزی درآمد، توپ فوتبال هم مثل یك کرهٔ چدنی به‌نظرمی‌رسید. توپ درحالت جنون‌آمیزی روی سطح صاف زمین می‌غلطید ومی‌خواست توپ کوچك سلولوئیدی را نابودکند. توپ

۱. کارل‌فردریك گوس (۱۷۷۷-۱۸۵۵)، ریاضیدان بزرگ آلمانی.

کوچك بدشانس، درحالی‌که با ناامیدی و ناآرامی ازاینطرف به‌آنطرف می‌رفت، ازقدرت می‌افتاد ودیگرنیروی‌پریدن را نداشت.

آیا این توپ‌کوچك، بدون اینکه ازسطح زمین‌جدا شود،می‌تواند جایی خودرا ازتعقیب توپ چدنی پنهان‌کند؟

قسمت دوم

بـرای حـل مسأله‌های قسمت دوم ، بایـد با عملهای مربوط به‌کسرهای متعارفی و اعشاری، آشنا بـود .کسانی‌کـه باکسرها آشنایی نـدارند ، می‌توانند ازاین‌قسمت صرفنظرکنند وبه‌بخش بعدی بپردازند.

۶۶. ساعت

ضمن مسافرتهای خود به‌شهری رسیدم‌که‌اختلاف درجهٔ حرارت هوای‌آن در روز وشب خیلی‌زیاد بود. من متوجه شدم‌که به‌خاطر این تغییردرجهٔ حرارت هوا، ساعت من روزها $\frac{1}{2}$ دقیقه جلو می‌رود و شبها $\frac{1}{3}$ دقیقه عقب کار می‌کند. اگرصبح اول اردیبهشت ، ساعت من وقت درست را نشان دهد، بعدازچه‌مدتی، ۵ دقیقه جلو می‌افتد.

۶۷. نردبان

خانه‌ای ۶ طبقه دارد. بگوئیدکسی‌که به‌طبقهٔ ششم این‌ساختمان می‌رود، چندبرابرکسی‌که به‌طبقهٔ سوم می‌رود،پله طی می‌کند؟ فرض‌براینست‌که تعداد پله‌هایی‌که بین دوطبقه متوالی وجوددارد،یکی باشد.

۶۸. چیستان

کدام‌علامت را بین عددهای (۳و۲) قراردهیم، تاعددی‌که بدست می‌آید از دو بزرگتر وازسه‌کوچکتر باشد.

۶۹. کسرهای جالب

اگر به‌صورت و مخرج‌کسر $\frac{1}{3}$، مخرج آنرا اضافه کنیم ،کسر مفروض

دوبرابر می‌شود.

کسری پیدا کنید که اگر مخرج آنرا به صورت و مخرجش اضافه کنیم، کسر مفروض a) سه‌برابر، b) چهاربرابر، شود. (آنها که جبر می‌دانند، می‌توانند این مسأله را عمومیت دهند و آنرا در حالت کلی حل کنند.)

۷۰. چه‌عددی

نصف ـ ثلث آنست. چه‌عددی است؟

۷۱. مسیر دانش‌آموز

توکا برای رسیدن به‌مدرسه، راهی نسبتاً طولانی طی می‌کند. در نقطه‌ای که به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۴}$ راه او تا منزلش فاصله دارد، میدانی است که ساعت الکترونی دارد. در نقطه‌ای که به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ تمام راه او، تا منزلش فاصله دارد، ایستگاه راه‌آهن است. وقتی که او به‌میدان رسید، ساعت الکترونی ۷و۳۰ دقیقه را نشان می‌داد و ۲۵ دقیقه قبل از ساعت ۸ به‌ایستگاه راه‌آهن رسید.

توکا چه‌موقع از منزل خارج شده است و کی به‌مدرسه می‌رسد؟

۷۲. در ورزشگاه

در طول مسیر مربوط به‌مسابقهٔ دو، ۱۲ پرچم، که به فاصله‌های مساوی از یکدیگر قرار گرفته‌اند، نصب شده است. مسابقه از کنار پرچم اول شروع می‌شود. ورزشکاری که تمام مسیر را با سرعت یکنواخت پیمود، درست بعد از ۸ ثانیه ، از کنار پرچم هشتم گذشته است. بعد از چند ثانیه به‌پرچم دوازدهم رسیده است؟

مواظب دام باشید!

۷۳. آیا در وقت صرفه‌جویی کرده است؟

مردی به‌منزل خود در شهر برمی‌گشت . او نصف راه را با قطار آمد که

سرعت‌آن ۱۵ برابرسرعت پیاده‌روی بود.نصف بقیه را برپشت‌گاو سوار شدکه سرعتش نصف سرعت پیاده‌روی بود.

آیا این مرد، نسبت به حالتی‌که تمام راه را پیاده می‌رفت ، در وقت صرفه‌جویی‌کرده است؟

۷۴. ساعت دیواری

ساعت دیواری درهرساعت۴دقیقه عقب‌کار می‌کند. ۳/۵ساعت قبل‌ساعت دیواری را روی وقت صحیح، درست‌کرده‌ایم. اکنون درست ساعت ۱۲ است. درچه‌ساعتی، ساعت دیواری، ۱۲ را نشان خواهد داد؟

۷۵. استفاده ازقطعه‌های کوچك

درکارخانه‌های ماشین‌سازی ، حرفهٔ بسیار جالبی وجـود داردکه آنـرا نشانه‌گذاری می‌گویند. نشانه‌گذار،باید روی قطعه‌ها، خطهایی رسم‌کند که بتوان ازآن شکلهای لازم را بدست‌آورد.

نشانه‌گذار، به‌نمونه‌های جالبی برخورد می‌کندکه‌اغلب برای‌حل آنها باید مسأله‌های هندسی‌مشکل‌راکه منجربه‌محاسبه می‌شود، حل‌کند.

۷صفحهٔ‌مستطیل‌شکل‌مساوی‌به‌یك‌نشانه‌گذار دادند وازاوخواستند، طوری‌آنهارا تقسیم‌کندکه بتوان ازآنها ۱۲ قطعهٔ مستطیل‌شکـل مساوی بدست‌آورد.ازنشانه‌گذارخواستند ترتیب‌کاررا طوری بدهدکه تاآنجاکه ممکن است صفحه‌های مفروض به‌قطعه‌های بـزرگتر تقسیم شود و ضمناً قطعه‌های هـردومستطیل جدید یکجورباشد . ساده‌ترین روش اینست‌کـه هریك‌از۷ صفحه را به۱۲ قسمت مساوی تقسیم‌کنیم ، ولی دراینصورت قطعه‌های بدست‌آمده خیلی‌کوچك می‌شود. چه‌بایدکرد؟

آیا می‌توان صفحه‌های مفروض‌را به‌قطعه‌های بزرگتر تقسیم‌کرد؟ نشانه‌گذارکمی فکرکرد، قلمی بدست‌گرفت و مقداری محاسبه‌کرد و باـ

صرفه‌ترین روش تقسیم را پیداکرد.

بعدها، نشانه‌گذار توانست از ۵ صفحه، شش صفحه با قطعه‌های مساوی درست‌کند، ۱۳ صفحه را به۱۲صفحه تبدیل‌کند، ۱۳ صفحه را برای ۳۶ صفحه تقسیم‌کند ، ۲۶ صفحه را برای ۲۱ صفحه نشانه‌گذاری کند وغیره.

نشانه‌گذار به‌چه‌ترتیب عمل می‌کند؟

مربوط به‌مسألهٔ ۷۵. باید از هفت صفحه‌ای‌که به این شکل است، دوازده صفحه باقطعه‌های مساوی ساخته شود.

۷۶. قطعهٔ صابون

دریك‌ظرف، یك قطعه صابون و درظرف دیگر $\frac{۳}{۴}$ آن به‌اضافهٔ $\frac{۳}{۴}$ کیلوگرم صابون‌گذاشته‌ایم. اگر وزن هردوبرابر باشد، وزن هرقطعه صابون‌چقدر است ؟

۷۷. بازی باعدد

مسألهٔ ۱. بادورقم، کوچکترین عدد صحیح مثبت را بنویسید.

مسألهٔ ۲. عدد ۳۷ را می‌توان به‌این‌ترتیب ، با پنج‌بار استفاده از رقم ۳ نوشت:

$$۳۷=۳۳+۳+\frac{۳}{۳}$$

روش دیگری، برای‌نوشتن عدد۳۷ با پنج‌بار استفاده از رقم۳، پیداکنید.

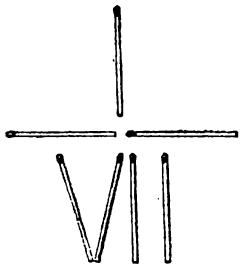
مسألهٔ ۳. عدد۱۰۰را بااستفاده از۶ رقم‌مساوی، بنویسید. جوابهای زیادی وجوددارد.

آیا می‌توانید برای این مسأله ، جواب‌کلی پیداکنید ؟ برای این منظور ازاین‌نکته‌استفاده‌کنید: $۱۰a+a$، عدد دورقمی‌است‌که هردورقم آن مساوی a است(مثلاً برای $a=۵$: $۱۰a+a=۱۰\times۵+۵=۵۵$) $۱۰۰a+۱۰a+a$ ، نمایندهٔ عدد سه‌رقمی است‌که سه‌رقم‌آن مساوی a است (که مثلاً برای $a=۵$، عدد۵۵۵بدست می‌آید). جواب‌کلی‌را باید به‌صورتی بدهیدکه درآن از $۱۰a+a$ و $۱۰۰a+۱۰a+a$ برای بدست‌آوردن ۱۰۰ استفاده‌کرده باشید که بتوان‌به‌جای a هر رقم دلخواه قرارداد.

مسألهٔ ۴. عدد ۵۵ را بااستفاده ازپنج‌بار رقم۴، بنویسید.

مسألهٔ ۵. عدد۲۰ را بااستفاده‌ازچهاربار رقم ۹، بنویسید.

مسألهٔ ۶. با هفت چوب کبریت، می‌توان عدد $\frac{۱}{۷}$ را درست کرد (شکل‌را ببینید).



مربوط به‌مسألهٔ ۶-۷

بدون اینکه چوب‌کبریتها راکم یازیاد کنید، آنـرا به‌کسر $\frac{۱}{۳}$ تبدیل کنید.

مسألهٔ ۷. عدد ۲۰را بدون‌استفاده ازعمل تفریق و تنها با رقمهای ۱، ۳، ۵ و ۷ بنویسید، ضمناً ازهررقم درست سه‌بار استفاده‌کنید.

مسألهٔ ۸. مجموع دوعددی‌کـه از رقمهـای ۱، ۳، ۵، ۷و۹ تشکیل شده‌اند برابر است بامجموع دوعددی‌که‌ازرقمهای ۲، ۴، ۶و۸ درست‌شده است. این عددها را پیداکنید ، به‌نحوی‌که از هررقم تنها یکبار استفاده شود. استفاده ازکسرهای بزرگتر ازواحد، مجازنیست.

مسألهٔ ۹. کدام دوعدد است‌که حاصلضرب‌آنها با تفاضلشان‌برابر است؟ تعداد چنین زوج عددها ، بسیارزیاد است . صورت‌کلی‌آنهاکدام است؟

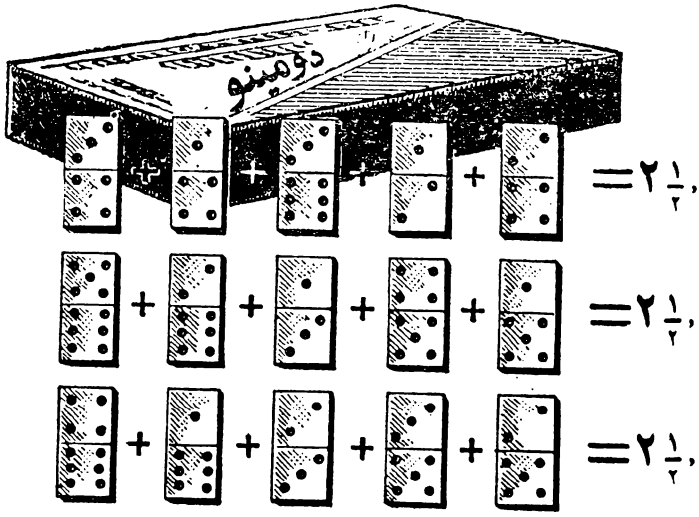
مسألهٔ ۱۰. با رقمهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸و۹، دوکسر مساوی درست‌کنیدکه مجموع‌آنها مساوی واحد شود. باید ازهمهٔ این رقمها و ضمناً ازهرکدام تنها یکبار، استفاده شود. جواب بیش‌ازیکی است.

مسألهٔ ۱۱. بایکبار استفاده از رقمهای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸و۹، دوکسر مـرکب درست‌کنیدکـه مجموع‌آنها مساوی ۱۰۰ شود. مسأله بیش‌ازیك جواب دارد.

۷۸. کسرهای دومینو

ازجعبهٔ دومینو، همهٔ سنگهایی راکه تعداد خالهای دونیمهٔ‌آنهایکی‌است

وهمهٔ آنها که لااقل دریکی از دونیمه، خالی ندارد، کناربگذارید، ۱۵ سنگ باقی می‌ماندکه می‌توان آنها را در ۳ ردیف طوری قراردادکه مجموع کسرهایی که درهریك ازسنگها وجوددارد، مساوی $۲\frac{۱}{۲}$ شود (شکل رابببینید).



مربوط به‌مسألهٔ ۷۸

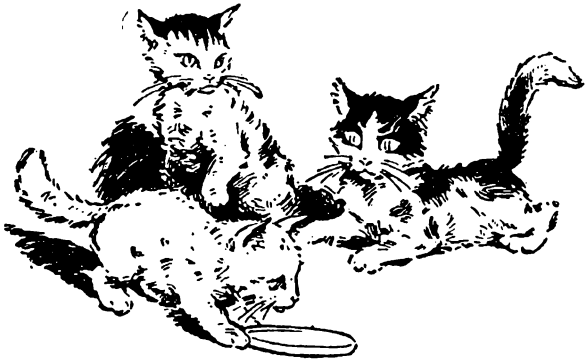
می‌توان این ۱۵ سنگ دومینو را درسه‌ردیف طوری قراردادکه مجموع کسرهای هرردیف مساوی با عددی درست شود (والبته درحالت کلی، این سه‌عدد یکی نیستند).

آیا می‌توانید ۱۵ سنگ را درسه‌ردیف و هرردیف ۵ سنگ طوری قراردهیدکه مجموع کسرهای هرردیف مساوی ۱۰ شود؟

ممکن است، بار اول موفق نشوید، ولی کمی فکرکنید وعملاً هم تجربه کنید، آنچه که می‌خواهید بدست خواهیدآورد.

۷۹. بچه‌گربه‌های میشا

میشا بچه‌گربه‌ای راکه تنها مانده بود، به‌خانه برد. ازآن‌به‌بعد هم



هروقت‌بچه‌گربه‌ای می‌دید باخود برمی‌داشت وبه‌خانه می‌برد. یکروزکه ازاوپرسیدند:حالا چند بچه‌گربه داری؟ جواب داد: سه‌چهارم تعدادآنها به‌اضافهٔ سه‌چهارم یك‌بچه‌گربه.

میشا چند بچه‌گربه دارد؟

۸۰. سرعت متوسط

اسب نیمی‌ازراه را، باسرعت ۱۲کیلومتر درساعت پیمود، ولی نیم‌دیگر راکه به‌ارابه بسته شده بود،باسرعت ساعتی ۴کیلومتر درساعت‌طی‌کرد.

سرعت متوسط اسب چقدر است، یعنی تمام راه را باکدام سرعت یکنواخت حرکت‌کند، تا درهمان‌زمان به‌مقصد برسد؟

۸۱. خواب مسافر

وقتی‌که نیمی‌ازراه طی‌شده‌بود، مسافربه‌خواب رفت. وقتی‌که بیدارشد به‌اندازهٔ نیمی‌ازمقدار راهی‌که درخـواب بود، باقی مانده بود . مسافر چه قسمتی ازتمام راه را خوابیده بود؟

۸۲. طول قطارچقدر است؟

دوقطار روی دوخط موازی ، اولی با سرعت ساعتی۳۶کیلومتر و دومی باسرعت ساعتی۴۵کیلومتر، حرکت می‌کنند. مسافرهایی‌که درقطاردوم نشسته بودند،دیدندکه ۶ ثانیه‌طول‌کشید تاقطار اول ازکنارآنهاگذشت. طول قطار اول چقدر است؟

۸۳. دوچرخه‌سوار

وقتی‌که دوچرخه‌سوار $\frac{۲}{۳}$راه را پیموده بود، لاستیك چرخش ترکید.بقیهٔ راه را پیاده رفت وبه‌اندازهٔ دوبرابرمدتی‌که بادوچرخه رفته بود،صرف وقت‌کرد.

سرعت دوچرخه، چندبرابر سرعت پیاده است؟

۸۴. مسابقه

دوتراشکار A وB ـ شاگردان مدرسهٔ حرفه‌ای فلزکاری ـ از استاد خود دستورگرفتندکه دوقطعهٔ شبیه هم را درست‌کنند ؛ قرارشد آنهاکار را باهم شروع‌کنند تا معلوم شود چه‌کسی زودترتمام می‌کند . بعدازمدتی معلوم شدکه B به اندازهٔ نصف‌کاری‌که برای A باقی‌مانده ، انجام داده است، وبرای A به‌اندازهٔ نصف‌کار انجام‌داده‌اش، باقی‌مانده است.

تراشکار B ، حالا سرعت‌کار روزانهٔ خودرا نسبت به‌Aچقدر باید زیادکند تا همزمان با A،کاررا تمام‌کند؟

۸۵. حق باکیست؟

مژده مسألهٔ حساب حل می‌کرد. عمل‌آخر او مربوط به‌محاسبهٔ حجمی از زمین می‌شد وبرای این‌منظور لازم بود، سه‌عدد را درهم‌ضرب‌کند.

مژده ، دوعدد اول را درهم ضرب‌کرد و برای ضرب عدد سوم

دراین حاصلضرب، آماده شده بودکه متوجه شد این حاصلضرب با عددی که درفرض داده شده است تفاوت دارد و به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ آن بیشتر است. مژده، برای اینکه عملها را دوباره انجام ندهد، تصمیم گرفت، عددسوم را به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ کوچك کند تا نتیجهٔ کل درست درآید. ولی دوستش گفت:

ـ تو به‌این‌ترتیب درست ۲۰ مترمکعب اشتباه خواهی کرد.

ـ چطور! این‌اشتباه ازکجا پیدا می‌شود؟ یکی‌ازعددها را بزرگتر و دیگری را به‌همان اندازه کوچکتر گرفته‌ام، بنابراین فکر می‌کنم، حاصلضرب تغییری نکند.

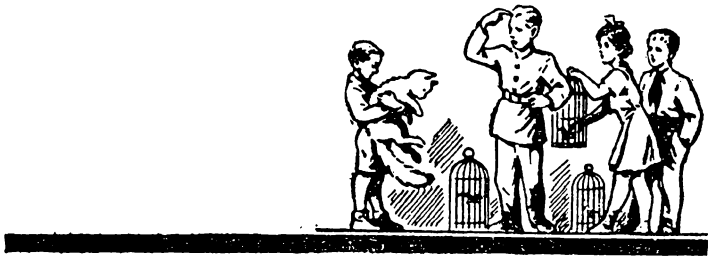
حق باکدام است؟

وآیا می‌توانید باهمین مفروضات، جواب مسأله را پیداکنید؟

۷۶ـ سه‌قطعه نان برشته برای شام

مامان قطعه‌های نان را بااستفاده ازیك تاوهٔ کوچك، برشته می‌کند. ابتدا یکطرف نان را روی تاوه قرارمی‌دهد، و بعد آنرا برمی‌گرداند تا طرف دیگرش برشته شود. برای برشته‌شدن هرطرف نان، ۳۰ ثانیه وقت لازم است، ضمناً روی تاوه بیش‌از دوقطعه نان هم نمی‌توان‌گذاشت.

توضیح بدهیدکه بچه‌ترتیب، مامان توانسته است هردوطرف ۳ قطعه نان را به‌جای ۲ دقیقه در $۱\frac{۱}{۲}$ دقیقه برشته‌کند؟



بخش دوم

موقعیتهای دشوار

۸۷. اندیشهٔ آهنگر

ما در تابستان گذشته، به گرجستان سفر کرده بودیم. گاهی، سرگرمی ما این بود که دربارهٔ همهٔ انواع ممکنهٔ تاریخهای غیرعادی دربارهٔ آثار گذشته‌ها، فکر کنیم.

یکبار، به‌یك برج قدیمی تنهایی رفتیم. بعداز تماشای برج، چند دقیقه‌ای برای استراحت نشستیم. بین‌ما، یك دانشجوی رشتهٔ ریاضی بود، او درآنجا هم یك مسألهٔ سرگرم‌کننده طرح کرد:

«۳۰۰ سال قبل در اینجا شاهزاده‌ای زندگی می‌کرد که کین‌توز و متکبر بود. شاهزاده، دختر دم‌بختی، بنام دریجان داشت. شاهزاده به‌همسایهٔ ثروتمند خود قول داده بود، که دخترش‌را به‌او بدهد، ولی دختر به‌آهنگر محله دل بسته بود. دریجان وآهنگر، کوشش کردند ازناچاری فرار کنند وبه‌کوه بروند، ولی نوکرهای شاهزاده، آنهارا دستگیر کردند.

شاهزاده که بی‌اندازه خشمگین شده بود، تصمیم گرفت که هردوی آنهارا، صبح فردا اعدام کند، او دستورداد که شب آنها را دربرج تاریك

مربوط به‌مسألهٔ ۸۷. ما به‌یك برج قدیمی تاریکی رسیدیم...

وبلند ومتروکی به‌زندان بیندازند، ندیمهٔ دریجان هم،که دختر نابالغی بود ودرفرار به‌آنهاکمك‌کرده بود، همراه‌آنها بود.

جوان‌آهنگر، بی‌آنکه روحیهٔ خودرا باخته باشد، به‌دور و برخود

نگاه‌کرد و از پله‌های برج تاآخرین قسمت بالا رفت، ازپنجره به‌بیرون نگاه‌کرد، غیرممکن بودکه بشود ازآنجا به بیرون پرید. آهنگر متوجه ریسمان‌کهنه وفراموش‌شده‌ای شدکه‌ازروی قرقره‌ای رد می‌شد وبه‌بالای پنجره محکم شده بود. درهریك از دوانتهای ریسمان زنبیلی خالی‌بسته بودند. آهنگرمتوجه شدکه بناها، به وسیلهٔ این زنبیلها، آجـر را به‌بالا می‌آوردند و خاك و شنهای اضافی را به‌پائین مـی‌فرستادند؛ ضمناً اگر وزن بار دریکی از زنبیلها ۵ یا ۶کیلوگرم بیشتر ازدیگری باشد:زنبیل سنگین‌ترکاملاً آرام به‌سمت زمین ودیگری به‌بالابه‌طرف پنجره می‌رود.

آهنگر جـوان براندازی‌کرد و متوجه شدکـه دریجان حدود ۵۰ کیلوگرم وندیمهٔ اوحدود۴۰کیلوگرم وزن دارند،خود اوهم۹۰کیلوگرم وزن داشت. علاوه‌برآن،آهنگر۱۳گندم‌کوب پنج‌کیلوگرمی دربرج پیدا کرد. چون درهرزنبیل می‌شد چندگندم‌کوب یا یك‌آدم و یك‌گندم‌کوب، یا دوآدم قـرارداد، هرسه‌نفر موفق شدند خودرا به‌زمین برسانند، ضمناً زنبیلی‌که به‌طرف زمین می‌آید نباید بیش از ۵کیلوگـرم از زنبیلی‌کـه به‌طرف بالا می‌رود، سنگین‌تر باشد.

آنها چگونه ازبرج خارج شدند؟»

۷۸. گربه وموشها

«نازی»،گـربهٔ ملوس، تازه ازکمك به بچه‌هایش فراغت پیداکرده بود. او خوابید وبه‌خواب شیرینی فرورفت، درخواب دیدکه سیزده‌موش اورا احاطه‌کرده‌اند. دوازده موش خاکستری ویك موش سفید. صدای‌آشنایی می‌گفت: «نازی، تو باید ازیك موش شروع‌کنی وهربارموش سیزدهم را بخوری؛ موشها باید روی یك دایره در نظرگرفته شوند و همیشه دریك جهت حرکت‌کنی، ضمناً نوبت موش سفید هم‌آخرکار است».

مربوط بمسألهٔ ۸۸. نازی خواب می‌بیند.

نازی ازکدام موش شروع کندکه مسأله را درست حل کرده‌باشد؟ به‌نازی کمك کنید.

۸۹. سهره وگلوقرمز

در پایان اردوی تابستانی، پیش‌آهنگان تصمیم گرفتند پرندگانی راکه صیادان جوان، ازدشت وجنگل گرفته بودند، آزادکنند. رویهم ۲۰ پرنده بودکه هرکدام را درقفس جداگانه‌ای، جا داده بودند. (شکل صفحهٔ ۷۹ را ببینید.) سرگروه پیشنهادکرد:

ـ همهٔ قفسهارا دریك‌ردیف قراردهید وازچپ‌به‌راست شروع کنید وهربار پنجمین قفس را بازکنید. هروقت‌که ضمن‌شمارش به‌آخررسیدید دوباره از اول شروع کنید، هرقفسی هم‌که خالی می‌شود، ازردیف‌خارج کنید. دوپرنده‌ای راکه باقی بماند، می‌توانید باخود به‌شهر ببرید.

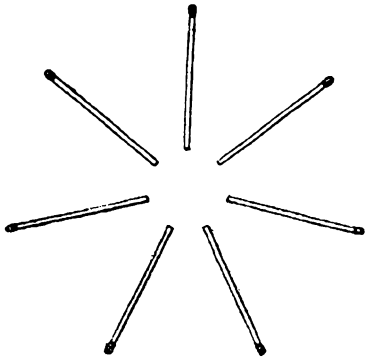
برای بیشتر بچه‌ها تفاوتی نداشت‌که‌کدام پرنده‌آزاد شود وکدام پرنده باقی بماند، ولی‌دونفرازآنها به‌سهرهٔزرد وگلوقرمزعلاقمند بودند. به‌همین مناسبت‌این‌دوقفس را درردیف، جائی‌گذاشتندکه‌آخرکار باقی بمانند.

شماهم به‌سادگی می‌توانید جای این‌دونفررا با قفسهای سهرهٔزرد وگلوقرمز معین‌کنید. امتحان‌کنید.

۹۰. سکه‌ها را تقسیم‌کنید

۷چوب‌کبریت و۶سکه تهیه‌کنید. کبریتهارا روی میز به‌صورت‌ستاره‌ای شبیه‌شکل‌صفحهٔ ۸۰ بچینید. ازچوب‌کبریت‌دلخواهی‌شروع کنیدوباشمارش درجهت حرکت عقربه‌های ساعت، یکی‌از سکه‌هاراکنارچوب‌کبریت‌سوم قرار دهید. بعد دوباره ازچوب‌کبریتی‌که درکنار آن سکه وجود ندارد،

مربوط به مسألهٔ ۸۹. می‌خواستند که قرعه به سبزه و گلوقرمز نیفتد



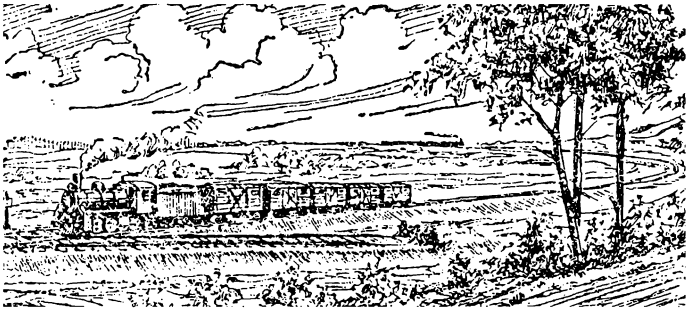
مربوط به‌مسألهٔ ۹۰

شروع کنید و درهمان‌جهت‌بشمارید و سکه دوم را روی چوب‌کبریت سوم قرار دهید. باید به‌همین‌ترتیب عمل‌کنید تا هرکدام از۶ سکه‌کنار یکی از چوب‌کبریتها، قرارگیرد. وقتی‌که‌کبریتها را می‌شمارید، آنهایی‌را هم‌که درکنارشان‌سکه‌ای وجود دارد، به‌حساب بیاورید، ولی حتماً باید از چوب‌کبریتی شروع کنیدکه درکنارآن سکه‌ای وجود ندارد؛ ضمناً دوسکه راکنار یك چوب‌کبریت نمی‌توان‌گذاشت.

با چه روشی باید عمل‌کردکه مسأله درست حل شود؟

۹۱. قطار مسافری چگونه عبورکند؟

دریك ایستگاه‌کوچك یك خطی راه‌آهن، قطاری‌که از لکوموتیو و پنج واگن تشکیل شده‌است، ایستاده است. این قطارگروه‌کارگرانی را باخود



مربوط به‌مسألهٔ ۹۱

آورده است که باید خط تازه‌ای بسازند. دراین ایستگاه کوچك، یك خط فرعی کوتاه وجوددارد که سه واگن یایك لکوموتیو و دو واگن‌را می‌توان با حرکت ازعقب، درآن جا داد.

همان‌وقت که قطار گروه کارگران دراین ایستگاه ایستاده است ، یك‌قطار مسافری ازراه می‌رسد. چگونه می‌توان راه را برای قطارمسافری بازکرد؟

پرسش اضافی (برای اینکه‌خودتان حل‌کنید). حالا فرض‌کنید خط بن‌بست اضافی در جهت حرکت قطارکارگری باشد، یعنی به‌جای اینکه قطار ازعقب وارد آن شود، تنها بتواند از طرف لکوموتیو به‌آن وارد شود. دراین‌حالت، به‌چه‌ترتیب می‌توان قطارمسافری را عبور داد؟ برای حل مواظب باشیدکه لکوموتیو قطارکارگران نباید بین واگونهای آن قرارگیرد.

۹۲. مسأله‌ای ناشی‌از شیطنت سه‌دختر

این یك‌مسألهٔ قدیمی است[1]. سه دختر، هرکدام با پدر خود، گردش می‌کردند. هرشش‌نفر، به‌کنار رودخانه‌ای رسیدند وتصمیم گرفتندکه به‌طرف دیگر ساحل رودخانه بروند. آنها، یك قایق، بدون قایق‌ران، در اختیار داشتندکه تنها دونفر می‌توانست درآن بنشیند. عبور از رودخانه باید طوری انجام شودکه هیچ دختری در غیاب پدرخود، با یکی‌از پدرهای دیگر نباشد. دخترها آنقدرکوچك نبودند که نتوانند به تنهایی قایق را برانند.

چگونه باید از رودخانه عبورکنند؟

---

۱. با مختصر اختلافی، دریکی ازنوشته‌های سدهٔ سیزدهم، به‌این‌مسأله برخورد می‌کنیم.

۹۳. تکامل بعدی مسأله

گروه سه‌زوجی مسألهٔ قبل، به‌سلامت از رودخانه عبورکردند و درساحل دیگر به استراحت پرداختند. پرسشی پیش می‌آید: آیا می‌توانیم با همان شرطها، روش عبور چهار زوج را تنظیم کنیم؟ به‌سادگی روشن می‌شود که اگرشرطهای مسألهٔ قبل را درنظرداشته‌باشیم، تنها با قایقی‌که جای سه‌نفررا داشته‌باشد، می‌توان چهارزوج را به‌طرف دیگررودخانه رساند، وضمناً برای انجام‌کار، پنج رفت وآمدکافی است.

به‌چه‌ترتیب؟

حالامسأله‌را به‌ترتیب دیگری درنظر می‌گیریم: مسافرهای ما تنها همان قایق دونفری را دراختیار دارند، چگونه می‌توانیم این‌چهار زوج را با همین قایق به‌طرف دیگر رودخانه منتقل‌کنیم، به‌شرطی‌که دروسط رودخانه جزیرهٔ‌کوچکی باشدکه بتوان بین راه درآن توقف‌کرد؟ دراین حالت، برای انجام جابه‌جائی باید لااقل ده رفت‌آمد داشت، با این‌شرط که هیچکدام ازدخترها نباید نه‌درساحلها ونه‌درجزیره، درغیاب‌پدرخود، با یکی‌ازپدرهای دیگرباشد. ضمناً وقتی‌که دختری، بدون پدر خود، در جزیره است، بازهم نباید یکی‌ازپدرهای دیگر، ازکنار اوعبورکند.

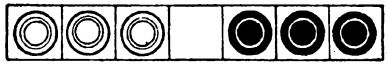
دراین‌مورد چگونه باید عمل‌کنند؟

تبصره. درحالت اخیر مسأله، می‌توان بدون‌هیچ محدودیتی ازنظر تعداد زوجها، باهمان قایق دونفری، از یك ساحل به‌ساحل دیگر رفت. دراین حالت، برای اینکه n زوج ($n\geqslant 4$) را از رودخانه عبور دهیم، لااقل $2n-3$ رفت وآمدلازم است. آنهاکه مایل‌باشند، می‌توانند درستی این رابطه راآزمایش‌کنند.

۹۴. مهره‌ها را جابه‌جاکنید

سه‌مهرهٔ سفید درخانه‌های ۱، ۲و۳ وسه‌مهرهٔ سیاه درخانه‌های ۵، ۶و۷قرار

دهید وخانهٔ ۴ را خالی بگذارید (شکل‌را ببینید). با استفاده ازخانهٔ‌آزاد ۴، جای مهره‌های سفیدوسیاه را، بااین‌شرطها،باهم عوض‌کنید: هرمهره می‌تواند به‌خانهٔ‌کنارخود، اگر خالی باشد، برود، ضمناً هرمهره می‌تواند



ازروی تنها یك مهرهٔ ناهمرنگ خود، به‌خانه‌آزاد بپرد. مهره‌های سفید تنها به‌طرف مهره‌های سیاه، ومهره‌های سیاه تنها به‌طرف مهره‌های‌سفید می‌توانند حرکت‌کنند. حرکت درجهت عکس،ممکن نیست. مسأله‌در۱۵ حرکت حل می‌شود.

۹۵. سفید وسیاه

چهارمهرهٔ سفید وچهارمهرهٔ سیاه انتخاب‌کنید وآنهارا یك‌درمیان روی میز، دریك ردیف بچینید : اول سفید، بعد سیاه، دوباره سفید، بعد سیاه تاآخر. درسمت چپ یا سمت راست، جای‌آزادی بگذاریدکه تنهادومهره را بتوان درآن قرارداد. با استفاده از جای‌آزاد، می‌توان هربار دومهرهٔ کنارهم را، بدون‌آنکه ردیف‌آنهارا عوض‌کنیم، جابه‌جاکرد. مهره‌ها را نمی‌توان ازهم دور یا به‌هم نزدیك‌کرد.

چهار حرکت‌کافی‌است، برای‌اینکه بتوانیم مهره‌هارا درردیف‌هم طوری قرار دهیم‌کـه چهارمهرهٔ سیاه پهلوی‌هم و چهـار مهرهٔ سفید هم پهلوی‌هم، قرارگیرند.

راه‌حل را پیداکنید.

۹۶. بازهم مهره‌ها

اگر پنج مهره سفید و پنج مهرهٔ سیاه را یـك‌درمیان پهلوی هم بچینیم،

پنج جابه‌جایی لازم است تا مهره‌های سفیدکنارهم، و مهره‌های سیاه کنارهم قرارگیرند . درحالتی‌که شش زوج مهره داشته باشیم، شش حرکت، و درحالتی‌که هفت زوج مهره داشته باشیم، هفت حرکت لازم است وغیره.

راه‌حل مسأله را برای پنج، شش وهفت زوج مهره پیداکنید.

به‌خاطرداشته باشیدکه همیشه جای‌آزاد، تنها برای دومهره‌است و دومهره را، بدون به‌هم‌زدن ردیف‌آنها، می‌توانیم جابه‌جاکنیم.

۹۷. تعمیم مسأله

حالا می‌خواهیم راه‌حلی برای حالت‌کلی، یعنی وقتی‌که با n زوج مهره سروکار داریم، فکرکنیم. یك حکم اساسی هم داریم وآن اینکه، اگر با n مهرهٔ سفید و n مهرهٔ سیاه سروکار داشته باشیم (n زوج) ، برای حل‌مسأله، به n حرکت نیازداریم (به‌دومسألهٔ قبل‌مراجعه‌کنید). ولی‌این حکم احتیاج به‌اثبات دارد.

درعمل دیدیم‌که وقتی n مساوی۴،۵،۶یا۷ باشد، این‌حکم‌درست است، یعنی اگر۴ زوج مهره داشته باشیم، ۴ حرکت لازم است و اگر ۵ زوج مهره داشته باشیم، ۵ حرکت و غیره. برای حالت‌کلی، مثلاً می‌توان به‌این‌ترتیب عمل‌کرد:

۱) فرض می‌کنیم‌که برای(۴- n) زوج‌مهره، مسأله با (۴- n) حرکت حل شود؛

۲) بااین‌فرض‌ثابت می‌کنیم‌که‌اگر۴ زوج مهرهٔ بیشترداشته‌باشیم (یعنی رویهم n زوج مهره وجود داشته‌باشد)، ۴حرکت اضافی لازم‌است تا مسأله حل شود؛

۳) باتوجه به‌اینکه مسأله برای $n=۴$ ، $n=۵$ ، $n=۶$ و $n=۷$

زوج مهره حل شده است، براساس آنچه که ثابت شده است، حکم اصلی برای همهٔ حالتها درست از آب درمی‌آید؛ یعنی برای حالتهای:

$$n=۴،۸،۱۲،۱۶، \ldots$$

$$n=۵،۹،۱۳،۱۷، \ldots$$

$$n=۶،۱۰،۱۴،۱۸، \ldots$$

$$n=۷،۱۱،۱۵،۱۹، \ldots$$

یعنی برای هرمقدار دلخواه n .

حکم موردنظر را بااین روش (که روش استقراء ریاضی نام دارد) ویا به‌هرطریق دیگری که مایلید، ثابت کنید.

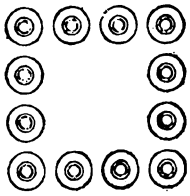
۹۸. کارتها را به‌ردیف شماره بگذارید

از مقوا، ۱۰ کارت ۴در۶ سانتیمتر ببرید وآنهارا از ۱تا۱۰، شماره‌گذاری کنید. کارتهارا روی هم بگذارید ودر دست بگیرید. از کارت بالاشروع کنید، اولی را روی میز بگذارید، طوری که شمارهٔ آن معلوم باشد، کارت دوم را زیرستون کارتها در دستتان ببرید، دوباره کارت سوم را روی میز (روی کارت قبلی) وکارت چهارم را زیر کارتها در دستتان قراردهید. این روش را ادامه دهید تا همهٔ کارتها روی میز قرارگیرد.

روشن است که اگر ازقبل کارتهارا به‌ترتیب خاصی در دست نگرفته باشید، کارتهای روی میز، به‌ردیف شماره نخواهند بود. فکر کنید که کارتهارا درابتدا به‌چه‌ترتیب روی هم دردست بگیریم، تا با روش مذکور به‌ترتیب شماره از ۱تا۱۰ روی میزقرارگیرند.

برای حل مسأله، روشی پیداکنید که برای تعداد دلخواه کارت هم قابل استفاده باشد. همچنین برای حالتی هم که یك کارت روی میز بگذاریم و دوکارت، یا سه کارت وغیره، زیر کارتها در دستمان قرار دهیم، قابل

عمل باشد.



مربوط به‌مسألهٔ ۹۹- معمای اول

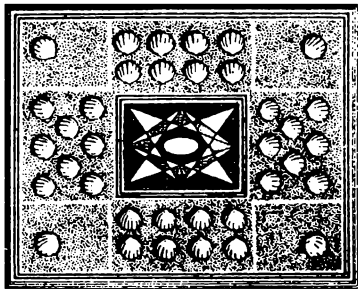
۹۹. دومعما

معمای اول. دوازده مهره (یا سکه، یاقطعه کاغذ و غیره) را می‌توان به‌سادگی روی میز به‌شکل مربع چید، به‌نحوی که درهرضلع آن چهارمهره قرارگرفته باشد (شکل را ببینید). حالا کوشش کنید باهمین دوازده مهره، مربعی درست کنید که درهرضلع آن پنج‌مهره وجود داشته‌باشد.

معمای دوم. ۱۲ مهره را روی میز درسه‌ردیف وسه‌ستون طوری‌بچینید، که درهرردیف وهرستون، چهارمهره وجود داشته باشد.

۱۰۰. جعبهٔ اسرارآمیز

مژده که برای تابستان به‌مسافرت رفته بود، جعبهٔ زیبایی برای خواهر کوچکترش، توکا، به‌عنوان‌هدیه فرستادکه ۳۶ دکمهٔ صدفی داشت. روی جعبه، خطهایی رسم شده بودکه‌آنرا به ۸ قسمت می‌کرد. توکا هنوز به مدرسه نمی‌رفت، ولی‌می‌توانست تا ۱۰بشمارد. توکا به‌این‌مناسبت‌هدیهٔ خواهرش‌را پسندیده بودکه می‌دید در هرضلع جعبه درست۱۰ دکمه قرارگرفته است (شکل را ببینید). توکا هربار، دکمه‌های هرضلع را می‌شمرد تا مطمئن شودکه چیزی گم نشده است . البته، دکمه‌هایی راکه درگوشه‌ها قرارگرفته‌بودند،



مربوط به‌مسألهٔ ۱۰۰

دوبار به‌حساب می‌آورد.

یك روز، مامان، بدون اینکه خواسته باشد، همینطورکـه پارچهٔ جعبه را تمیز می‌کرد، ۴ دکمه را شکست. حالا دیگـر در هرضلع جعبه، ۱۰ دکمه وجودنداشت. چه بد! وقتی توکا ازپارك برگشت‌خیلی‌ناراحت شد، ولی مادرش‌گفت:

ـ هیچ غصه‌نخور، من همه‌چیزرا درست می‌کنم.

آن‌وقت نخ وسوزن‌آماده‌کرد وجای بعضی دکمه‌ها را عوض‌کرد و باهمان ۳۲ دکمهٔ باقیمانده، ترتیبی دادکه درهرضلع بازهم ۱۰ دکمه وجود داشته باشد.

بعدازچند روز دوباره مشکلی پیش‌آمد. جعبه ازدست توکا افتاد وبازهم شش دکمه شکست،حالا۲۶ دکمه باقی مانده بود.ولی‌این‌بارهم، مامان توانست با جابه‌جاکردن دکمه‌ها، ترتیبی‌بدهدکه بازهم درهرضلع ۱۰ دکمه وجود داشته باشد و وقتی‌که توکا می‌دید درهرضلع ۱۰ دکمه وجود دارد،گمان مـی‌کردکه دکمه‌ای ازبین نرفته است. البته ایـن‌بار، دکمه‌هـا متقارن چیده نشده بود، ولـی توکا نمی‌توانست به ایـن نکته توجه‌کند.

راه‌حلهای مامان چگونه بوده است؟

۱۰۱. دفاع ازقلعه

بچه‌ها از یك قلعهٔ برفی،که خود درست‌کرده بودند، شجاعانه دفاع می‌کردند.آنها، ۵ حمله را دفع‌کردند، ولی تسلیم نشدند. «فرماندهٔ»قلعه، درابتدا نیروهای خـودرا به‌ترتیبی‌که درشکل صفحهٔ ۸۹ دیـده می‌شود، آرایش داد (عددی‌که در مربع وسط نوشته شده است، نمایندهٔ تعدادکل

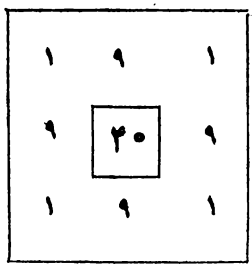
مربوط بمسألهٔ ۱۵۱. ازقلعهٔ برفی شجاعانه دفاع می‌کردند.

افرادی است که ازقلعه دفاع می‌کنند).

«فرمانده» طوری آرایش داده بودکه ازهرضلع قلعه، ۱۱نفر دفاع کند. بنابرشرطی که دربـازی گذاشته بودند، قرار بودکـه درهرکـدام از

حمله‌های اول، دوم، سوم و چهارم، مدافعین، ۴ نفررا «ازدست بدهند». «دشمن» درجملهٔ پنجم هم، دونفر دیگر از مدافعین را از صحنهٔ نبرد «خارج کرد». ولی بعدازهرحمله، باوجودتلفات، بازهم ازهرضلع قلعهٔ، ۱۱نفر دفاع می‌کرد.

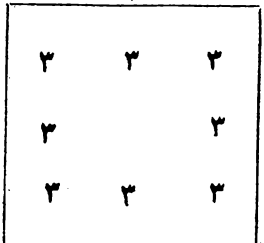
«فرمانده» بعدازهرحمله، نیروهای خودرا چگونه آرایش می‌داد؟



مربوط به‌مسألهٔ ۱۰۱.
آرایش اولیهٔ نیروها

۱۰۲. لامپهای روشنایی اطاق دستگاه انتقال تلویزیونی

برای روشنایی اطاق دستگاه انتقال تلویزیونی، راههای مختلفی برای نصب لامپ آماده کردند. ابتدا، درهریك ازگوشه‌ها ۳ لامپ ودرهریك از چهاردیوار اطاق هم، ۳ لامپ، روی‌هم ۲۴ لامپ قرار دادند (شکل را ببینید). سپس ۴ لامپ، وبعد بازهم ۴ لامپ دیگر اضافه کردند. امتحان کردندکه می‌توانند تعداد لامپها را به۲۰ وحتی ۱۸ کاهش دهند، درتمام این حالتها، وضع طوری بودکه درطول هردیوار، ۹ لامپ وجود داشت.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۰۲

طرح قراردادن‌لامپهارا، وقتی‌که تعدادآنها ۲۸ یا ۳۲ وهمچنین۲۰ یا ۱۸ باشد، پیداکنید،

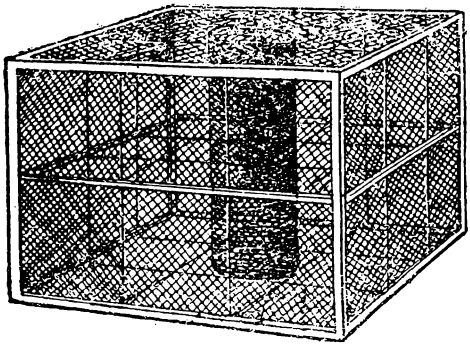
تاکجا می‌توان تعداد لامپها را زیاد یاکم کرد، به‌شرطی‌که به‌هرحال درطول هردیوار اطاق، ۹ لامپ وجود داشته باشد.

چطورفکر می‌کنید، آیا می‌توان تعداد لامپهارا به‌جای ۴ عدد، یك

یا دو یاسه، اضافه یاکم کرد، به‌نحوی‌که درطول هردیوار اطاق، همیشه ۹ لامپ قرارگرفته باشد؟

۱۰۳. جادادن خرگوشهای تحت‌آزمایش

دریك انستیتو، برای‌آزمایش خاصی‌که روی خرگوش انجام مـی‌دادند، قفس دوطبقه‌ای‌آماده‌کردند،که درهرطبقهٔ‌آن، ۹ خانه وجود داشت. برای



مربوط به‌مسألهٔ ۱۰۳. برای‌آزمایش، قفسی‌آماده‌کردند.

خرگوشها، ۱۶ خانه‌آماده شده‌بود (۸تا درطبقهٔ بالا و۸تا درطبقهٔ‌پائین)، در دوخانهٔ مرکزی هم، وسیله‌ای را جا داده بودند.

باتوجه به‌آزمایشی‌که‌مورد توجه بود، می‌بایستی خرگوشهارا طوری درخانه‌ها قراردهیم‌که:

۱) هر۱۶ خانه اشغال‌شود،

۲) در هـرخانه، بیش‌ازسه خرگوش نباشد،

۳) درخانه‌هایی‌که درکنار

هریك از دیواره‌های قفس قرار گرفته‌اند، ۱۱ خرگوش وجود داشته باشد،

۴) تعداد خرگوشها درطبقهٔ دوم، دوبرابر تعداد خرگوشهای طبقهٔ اول باشد.

انستیتو، ۳ خرگوش کمتر از آنچه انتظار داشت ، دریافت کرد . باوجود این، توانستند خرگوشهارا باهمان شرطهای لازم، درقفس جادهند.

معلوم کنید که انستیتو انتظار چند خرگوش را داشته است و چگونه می‌خواسته‌اند آنهارا درقفس جادهند؟ ووقتی که سه خرگوش کمتر بدست آوردند، چگونه آنهارا جا دادند؟

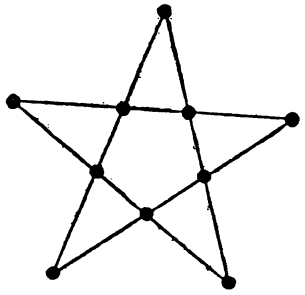
۱۰۴. آمادگی برای جشن

محتوی هندسی پنج مسألهٔ قبل دراینست که چیزهایی را درطول چهارخط راست (ضلعهای مستطیل یا مربع)، به‌نحوی جا می‌دادیم که تعدادآنها درطول هرخط راست، باوجود تغییر تعدادکل آنها، مقدار ثابتی باشد.

علت اینکه می‌توانیم به چنین نتیجه‌ای برسیم، اینست که همهٔ اشیائی‌راکه دریك گوشه قرار گرفته‌اند، برای هردوضلعی که درآنجا به‌هم رسیده‌اند، به حساب می‌آوریم، درست مثل نقطهٔ برخورد دوخط راست، که به‌هردوخط تعلق دارد.

اگر فرض کنیم که هرکدام از اشیائی که درطول یك ضلع شکل قرار گرفته‌اند، نقطه‌ای ازضلع مربوطه را اشغال کنند، دراین‌صورت همهٔ اشیائی که در راس جمع شده‌اند، باید به‌حساب یك نقطه (راس زاویه)، گذاشته شوند.

حالا، ازامکان جمع کردن اشیاء دریك نقطهٔ هندسی، حتی درفرض صرفنظر می‌کنیم وقبول می‌کنیم که هرشیئی جداگانه، به‌نقطهٔ جداگانه‌ای ازصفحه نیاز داشته باشد؛ ضمناً خودرا ازاین‌محدودیت، که تنها باچهار



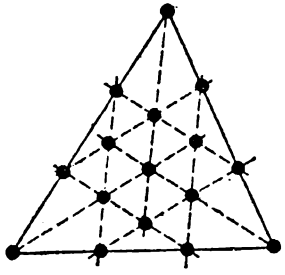
مربوط به‌مسألهٔ ۱۰۴. ۵ ردیف و درهرردیف ۴ تا

خط راست سروکار داشته باشیم، آزاد می‌کنیم.

به‌این‌ترتیب، مسألهٔ مربوط به قراردادن اشیاء درطول خطهای راست، جنبهٔ هندسی‌بیشتری پیدا می‌کند. مثلاً، برای چراغانی جشن می‌توان به‌طریق زیبائی، ۱۰ لامپ را در ۵ ردیف قرار داد، به‌نحوی‌که در هرردیف ۴ لامپ وجود داشته باشد وآرایش‌کلی به صورت یك پنج‌ضلعی ستاره‌ای باشد (شکل را ببینید).

حالا به‌حل مسأله‌هایی دربارهٔ قراردادن اشیاء، در طول خطهای راست، می‌پردازیم . اینگونه مسأله‌ها، معمولاً جوابهای زیادی دارند، که به‌صورت شکلهای مختلفی درمی‌آید. آنچه‌که مورد نظر ماست، جوابهائی است‌که به‌صورت شکلهای متقارن بدست آید (یعنی محور یا مرکزتقارنی‌دارند) وضمناً خطهای راستی‌که ردیفهای موردنظر را تشکیل می‌دهند،تنها درنقطه‌هایی‌که شامل‌یکی‌از اشیاء است، به‌هم‌رسیده باشند.

مسألهٔ ۱. چگونه می‌توان ۱۲ لامپ را در ۶ ردیف قرار داد، به‌نحوی‌که درهرردیف۴ لامپ‌قرارگرفته باشد؟(این‌مسأله، لااقل پنج جواب‌دارد.)



مربوط به‌مسألهٔ۱۰۴. ۱۲ردیف و درهرردیف ۴تا

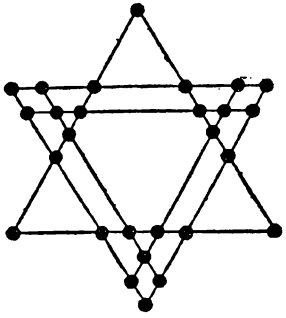
به ۷ ردیف چطور؟

مسألهٔ ۲. ۱۳گل تزیینی را در۱۲ ردیف طوری قرار دهیدکه درهرردیف ۳ گل قرارگرفته باشد.

مسألهٔ ۳. باغبان، در یك سطح

مثلثی‌شکل، ۱۶ بوتهٔ گل‌سرخ را در ۱۲ ردیف کاشت، که درهر ردیف ۴ بوته بود (شکل صفحهٔ ۹۲ را ببینید). سپس تپهٔ کوچکی درست کرد و روی آن ۱۶ بوتهٔ گل‌سرخ را در ۱۵ ردیف و درهر ردیف ۴ بوته، کاشت. باغبان چگونه این کار را انجام داد؟

مسألهٔ ۴. ۲۵ درخت را در ۱۲ ردیف قرار دهید، طوری که درهر ردیف ۵ درخت باشد.



مربوط به مسألهٔ ۱۰۵

۱۰۵. درختهای بلوط را به‌هم نزدیك کنید

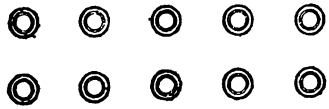
برای اینکه ۲۷ درخت بلوط را به‌طریق زیبائی در ۹ ردیف وهرردیف ۶ درخت بکارند، طرحی شبیه شکل را تهیه کردند. ولی جنگلدار این‌طرح را ردکرد: بلوط تنها ازبالا به‌آفتاب احتیاج دارد. بلوط، به‌اصطلاح در پوست خز می‌روید، ولی کلاه به‌سر ندارد. دراین‌طرح، شما ۳ درخت بلوط را جداکرده‌اید وتنها گذاشته‌اید.

حالا، شما طرحی تهیه کنیدکه این ۲۷ درخت بلوط در ۹ ردیف ۶ درختی قرارگیرند، به‌نحوی‌که همهٔ آنها درسه گروه نزدیك به‌هم جمع شده باشند وحتی یکی ازآنها هم خارج ازگروه قرارنگیرد؛ ضمناً تقارن هم باید حفظ شود.

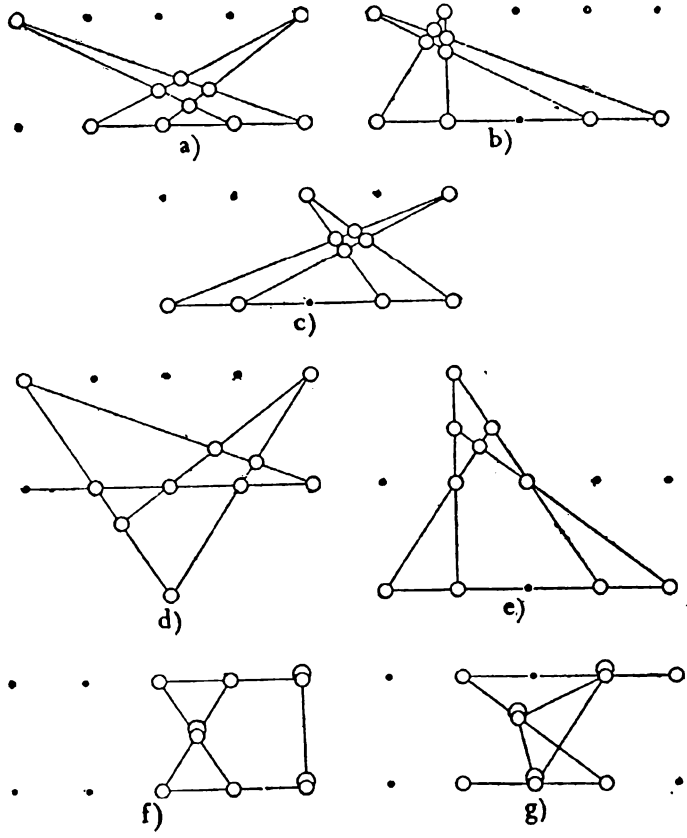
۱۰۶. بازیهای هندسی

بازی اول. ۱۰ مهره (یاسکه، دکمه یا چیز دیگر) را روی میز در دو ردیف، مطابق شکل، بچینید. ۳ مهره را از یك ردیف و یك مهره را از ردیف دیگر، طوری جابه‌جاکنیدکه بتوانیم ازتمام مهره‌ها، پنج ردیف

مستقیم ۴ مهره‌ای درست کنیم. وقتی که چهارمهره را جابه‌جا می‌کنید، نه‌جای بقیه را عوض کنید و نه‌مهره‌ای را روی مهرهٔ دیگر قراردهید.



اینجا، برخلاف مسأله‌های قبل، لزومی نداردکه تقارن حفظ‌شود. به‌عنوان مثال، پنج جواب مختلف در زیر داده شده است.



مربوط به‌مسألهٔ ۱.۵۶. راه‌حلهای ممکن

توضیح . جوابها، وقتی مختلف به حساب می‌آیندکه از ۱۰ مهرهٔ مفروض ، شکلهای مختلفی بدست آید ، مثل نمونه‌هایی‌که درشکل صفحهٔ ۹۴ دیده می‌شود.

ممکن است گمان کنید که با رسم این ۵ شکل ، جواب دیگری باقی نمی‌ماند. ولی‌البته اینطورنیست! برای پیداکردن جوابهای‌مختلف،می‌توان چهارمهره‌ای راکه جابه‌جا می‌کنیم،به‌طریقه‌های‌مختلف‌انتخاب‌کرد(شکلهای e،c،b،a را ببینید) و یا خود این چهار مهره را در جاهای متفاوت قرارداد (شکلهای a و d را ببینید). فرض را براین گرفتیم‌که سه‌مهره را از ردیف اول ویك مهره را از ردیف دوم، بردارید . انتخاب ۳ مهره از بین ۵ مهره، به۱۰طریق مختلف ممکن‌است. (امتحان‌کنید!) هریك ازاین‌حالتهارامی‌توان با یکی‌از۵حالتی‌که برای برداشتن‌یك مهره از ردیف دوم وجود دارد، درنظر گرفت . به‌این‌ترتیب ۵×۱۰، یعنی ۵۰ حالت برای برداشتن ۴ مهره ، بدست می‌آید.

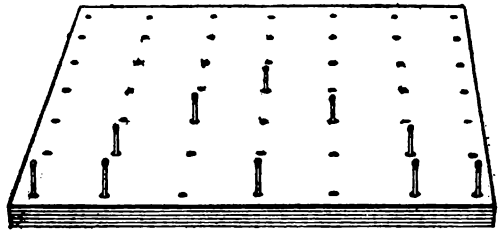
ضمیمه‌ای به‌بازی اول. مسابقه‌ای به‌این‌ترتیب درست‌کنید : جلو هرکدام ازکسانی‌که درمسابقه شرکت دارند، ۱۰ مهره (یا۱۰ تکهٔ مقوا) در دو ردیف بچینید وازهمه بخواهید،بدون‌آنکه دیگران ببینند،۴مهره را (۳تا از ردیف اول ویکی از ردیف دوم) جابه‌جاکنند، به‌نحوی‌که ۵ ردیف۴مهره‌ای بدست‌آورند.سپس جوابهارا باهم‌مقایسه‌کنید. به‌کسانی که جوابهای شبیه هم دادند یك امتیاز و به‌کسانی‌که جواب‌آنها،باهمهٔ بقیه تفاوت دارد، ۲ امتیاز بدهید، بازی را چند دور ادامه دهید،حساب امتیازهای هرکسی را نگه‌دارید وبرنده را اعلام‌کنید.

بازی را بدون مهره هم می‌توان انجام داد. به‌هر بازی‌کن، مداد وکاغذ وخط‌کشی بدهید. به‌جای مهره، روی‌کاغذ ۱۰نقطه در دو ردیف و هرردیف ۵ نقطه، علامت بگذارید. برای ادامهٔ بازی، باید ۳ نقطه از ردیف اول ویك نقطه را از ردیف دوم حذف‌کرد (خط زد)، درعوض، ۴ نقطه درجای دیگرکاغذطوری قراردادکه بانقطه‌های حذف‌نشده، ۵ردیف

۴نقطه‌ای درست کنند.

ضمیمهٔ دیگری برپازی ۱ول. می‌توان ۲مهره از ردیف اول و۲مهره از ردیف‌دوم انتخاب کرد وقراردادن یك مهره را روی مهرهٔ دیگر،مجاز دانست . دراین‌صورت جوابها، مثلاً شبیه شکلهای f وg درصفحهٔ ۹۴ درخواهد آمد . ضمناً دراین‌حالت ، تعداد جوابهای ممکن خیلی بیشتر می‌شود.

بازی دوم. روی یك صفحهٔ مقوائی، ۴۹ سوراخ کوچك، به‌صورت یك شبکهٔ مربعی درست می‌کنیم. در۱۰ سوراخ ، شبیه شکل، چوب‌کبریتهایی قراردهید. بازی را می‌توان، مثلاً به‌این‌ترتیب انجام داد .



مربوط به‌مسألهٔ ۱۰۶. ۱۰ چوب‌کبریت روی صفحهٔ مقوا

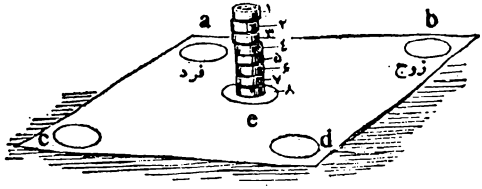
۳ چوب‌کبریت را ازجای خود بردارید و درسوراخهای دیگری از صفحه طوری قراردهیدکه ۵ ردیف و درهرردیف ۴ چوب‌کبریت درست شود.

ابتدا مسأله را روی همین‌شکلی‌که رسم کرده‌ایم،حل‌کنید وسپس با تغییر وضع اولیهٔ چوب‌کبریتها وتعداد ردیفهای جدیدی‌که بایدبدست آید، مسأله‌های جدیدی درست‌کنید.

۱۰۷. زوج وفرد (معما)

۸ مهرهٔ شماره‌دار را در دایرهٔ مرکزی به‌صورت ستونی و روی هم قرار

دهید؛ ازشمارهٔ ۸ درپائین تا شمارهٔ ۱ دربالا. مسأله اینست که باکمترین تعداد حرکت، مهره‌های باشماره‌های ۱، ۳، ۵ و ۷ را از دایرهٔ مرکزی به دایره‌ای که با علامت «فرد» (دایرهٔ a) مشخص شده است، و مهره‌های با شماره‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ را در دایره‌ای که باعلامت «زوج» مشخص شده‌است (دایرهٔ b)، منتقل کنیم. درصورت لزوم، می‌توان از دایره‌های c و d هم، برای قراردادن مهره‌ها استفاده کرد. حرکت را عبارت از هرگونه جابه‌جائی یك مهره ازجایی به‌جای دیگر می‌دانیم. بایك حرکت می‌توان



مربوط به‌مسألهٔ ۱۰۷

تنها یك مهره را از دایره‌ای به دایرهٔ دیگرمنتقل کرد (وهمیشه مهرهٔ بالا را باید برداشت)، ضمناً مهرهٔ با شمارهٔ بزرگتر را روی مهرهٔ با شمارهٔ کوچکتر نمی‌توان قرارداد. همچنین‌نمی‌توان مهرهٔ باشمارهٔ زوج‌را روی مهرهٔ با شمارهٔ فرد یا مهرهٔ با شمارهٔ فرد را روی مهرهٔ با شمارهٔ زوج قرار داد.

می‌توان، مثلاً، مهرهٔ باشمارهٔ ۱ را روی مهرهٔ باشمارهٔ۳، یامهرهٔ شمارهٔ ۳ را روی مهرهٔ با شمارهٔ۷، یا مهرهٔ شمارهٔ ۲ را روی مهرهٔ شمارهٔ ۶ قرارداد. ولی نمی‌توان مهرهٔ شمارهٔ ۱ را روی مهرهٔ شمارهٔ ۲، یامهرهٔ شمارهٔ ۴ را روی مهرهٔ شمارهٔ ۷ قرارداد.

شما با چند حرکت این مسأله را حل می‌کنید؟

۱۰۸. مرتب‌کردن مهره‌ها

درخانه‌های مربعی، ۲۵ مهره‌ای که‌ازقبل شماره‌گذاری‌شده‌است، شبیه‌شکل‌بچینید. جای هردومهره‌را باهم‌طوری عوض‌کنید که به‌ردیف قرارگیرند، یعنی شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴و۵، ازچپ به‌راست، درردیف اول ، شماره‌های ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰، ازچپ به‌راست، در ردیف دوم و... قرارگیرند. می‌توان مثلاً شماره‌های ۷و۱ را باهم، شماره‌های ۲ و۲۴ را باهم وغیره، عوض‌کرد.

۷	۲۴	۱۰	۱۹	۳
۱۲	۲۰	۸	۲۲	۲۳
۲	۱۵	۲۵	۱۸	۱۳
۱۱	۲۱	۵	۹	۱۶
۱۷	۴	۱۴	۱	۶

مربوط به‌مسألهٔ ۱۰۸

حداقل تعدادی‌که برای جابه‌جائی لازم است، پیداکنید.

برای اینکه‌گرفتار جابه‌جائی نامطبوع نشویم،باید قاعده‌ای‌برای آن پیداکرد. دربارهٔ وجود چنین قاعده‌ای فکرکنید.

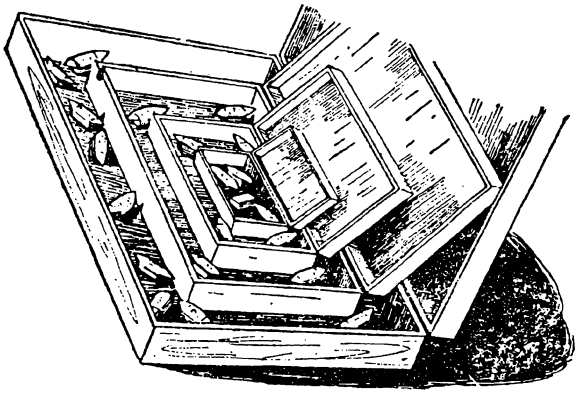
۱۰۹. هدیهٔ معمایی

جعبه‌ای‌انتخاب‌کنید،آن‌را بازکنید وجعبهٔ‌کوچکتری داخل‌آن‌قراردهید؛ جعبه دوم را بازکنید و بازهم داخل‌آن جعبه دیگری بگذارید.

به‌این‌ترتیب ۴ جعبه داخل‌هم قرار دهید . در جعبه‌ای‌که از همه کوچکتر است۴ شکلات‌بگذارید درهرکدام از دوجعبهٔ بعدی هم۴شکلات و درجعبهٔ‌آخر،که ازهمه بزرگتر است، ۹ شکلات قراردهید.

به‌این‌ترتیب، رویهم درچهار جعبه، ۲۱ شکلات وجوددارد (شکل صفحهٔ۹۹ را ببینید).

این‌جعبه را باشکلاتهای‌آن،به‌عنوان هدیهٔ تولد به‌دوستتان‌بدهید، ولی با او شرط‌کنیدکه تنها وقتی می‌تواند شکلاتها را بخوردکه‌آنها را در جعبه‌ها طوری قراردهد ،که اگر تعداد شکلاتهای هرجعبه را



مربوط به‌مسألهٔ ۱۰۹. هدیهٔ معمایی

بر۴ تقسیم کنیم، باقیماندهٔ تقسیم مساوی ۱ شود.

البته، قبل‌از آنکه این‌هدیه را به‌دوستتان بدهید، باید راه‌حل‌معمای آنرا پیداکنید. توجه داشته‌باشیدکه برای حل‌آن به‌هیچگونه محاسبه‌ای نیاز نیست، تنهاکمی اندیشه و اندکی تیزهوشی لازم است.

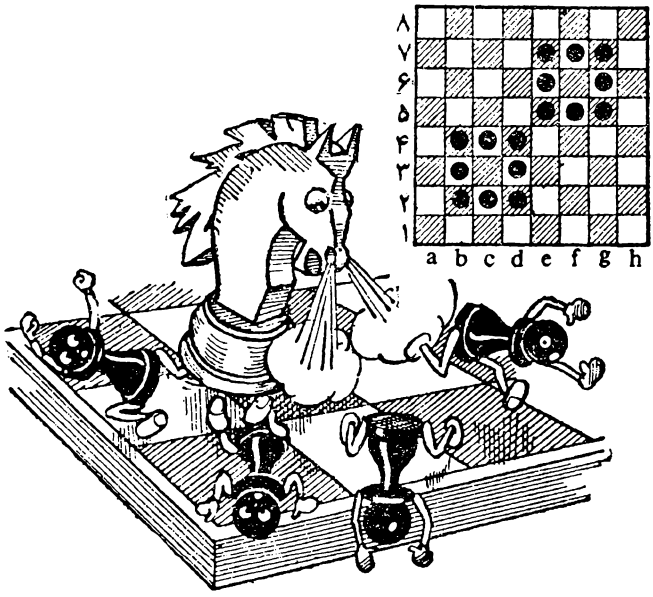
۱۱۰. با حرکت اسب

برای حل این مسألهٔ جالب، نیازی به‌دانستن قواعد بازی شطرنج نیست. تنهاکافی است بدانیم‌که اسب درصفحهٔ شطرنج چگونه حرکت می‌کند. پیاده‌های‌سیاه‌را روی صفحهٔ شطرنج‌مطابق شکل‌صفحهٔ۱۰۰بچینید. اسب سفیدرادریکی ازخانه‌های‌آزادصفحهٔشطرنج، طوری قراردهیدکه این اسب بتواندهمهٔ پیاده‌های سیاه را بزند، ضمناً برای زدن پیاده‌ها، کمترین تعداد حرکت‌اسب چقدر است؟

۱۱۱. جابه‌جاکردن مهره‌ها (دومعما)

معمای ۱ول. ۹ مهره را از۱تا۹، شماره‌گذاری‌کنید. مهره‌ها را درخانه‌هایی‌که مطابق شکل پائین‌صفحهٔ۱۰۰درست شده‌اند، بگذارید، طوری‌که

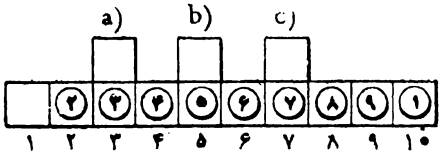
کتابخانه مجازی ریاضیات



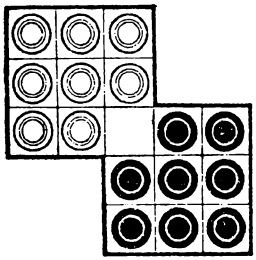
مربوط به‌مسألهٔ ۱۱۰. اسب باید همهٔ پیاده‌ها را بزند.

هرمهره درخانهٔ هم‌شماره‌اش‌قرارگیرد، به‌جزاینکه مهرهٔشمارهٔ ۱ درخانهٔ ۱۰ قرارگیرد وخانهٔ شمارهٔ ۱، آزادباشد.

بدون اینکه مهره‌ای را از خانه‌ای بیرون‌آورید، تنها با لغزاندن آنها به خانهٔآزاد مجاور، مهرهٔ ۱ را به خانهٔ ۱ ببرید. می‌توان موقتاً از خانه‌های a ، b و c ، برای قراردادن یك مهره استفاده‌کرد، ضمناً یك مهره نمی‌تواند از روی مهرهٔ دیگر عبورکند. وقتی‌که مهرهٔ ۱، در جای خودش، خانهٔ شمارهٔ ۱، قرارگرفت، باید تمام مهره‌هـای دیگر، درجای



فعلی خود، یعنی درخانه‌هایی‌که شمارهٔ مهره را دارند، باقی بمانند.



معمای دوم. برای این مسأله، ۸ مهرهٔ سیاه و ۸ مهرهٔ سفید انتخاب‌کنید وآنهارا آنطورکه درشکل دیده می‌شود، بچینید. باید، بدون‌آنکه مهره‌ها را از محدودهٔ خود خارج‌کنیم، با۴۶ حرکت، مهره‌های‌سیاه را جای مهره‌های سفید، و مهره‌های سفید را جای مهره‌های سیاه قرار دهیم. هرمهره را می‌توان به طرف راست، به‌طرف چپ، به‌طرف بالا یابه‌طرف پایین حرکت داد،ولی نمی‌تواند به‌صورت قطری تغییرجا بدهد. دراین جهتها، پرش از روی یك مهره، به خانهٔ‌آزاد هم مجاز است. دومهره را نمی‌توان دریك خانه قرارداد. لزومی نداردکه خودرا ناچارکنیم بعدازجابه‌جاکردن یك‌مهره، به حرکت مهرهٔ رنگ دیگربپردازیم، واگرلازم باشد، می‌توان‌پشت‌سرهم چندبار، مهره‌های ازیك رنگ را جابه‌جاکرد.

راه‌حل را پیداکنید.

۱۱۲. گروه‌بندی خاص عددهای صحیح از ۱تا۱۵

ببینید، به‌چه‌ترتیب قشنگی، عددهای از ۱تا۱۵ را در ۵گروه ۳ عددی تنظیم‌کرده‌ایم:

$$\left.\begin{matrix}11\\12\\13\end{matrix}\right\}d=1;\quad \left.\begin{matrix}3\\5\\7\end{matrix}\right\}d=2;\quad \left.\begin{matrix}2\\6\\10\end{matrix}\right\}d=4;\quad \left.\begin{matrix}4\\9\\14\end{matrix}\right\}d=5;\quad \left.\begin{matrix}1\\8\\15\end{matrix}\right\}d=7;$$

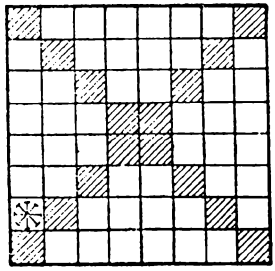
عددهای هرگروه چنانندکه تفاضل عدد اول و دوم، برابر است با تفاضل عدد دوم وسوم: مثلاً $۷=۱-۸$، $۷=۸-۱۵$ و $۵=۴-۹$، $۵=۹-۱۴$ و غیره (درحقیقت هرسه عدد یك‌گروه، تشکیل یك تصاعد

عددی می‌دهند). اینگونه تنظیم پانزده عدد صحیح اولیه، به ۵ گروه، باهمین تفاضلها، منحصربه‌فرد نیست.

اولین گروه (۱،۸،۱۵) را دست نزنید و با ۱۲عدد دیگر(۲،۳،۴، ۵،۶،۷،۹،۱۰،۱۱،۱۲،۱۳،۱۴) می‌توان گروههایی سه‌تایی جدیدی درست کرد که تفاضلهای ثابت درهرکدام (قدر نسبتهای تصاعدها) همان عددهای d=۵،d=۴،d=۲ و d=۱ باشد.

این گروههای جدید را پیدا کنید.

اگر بخواهید، می‌توانید همین عددهای از ۱تا۱۵ را درگروههای تصاعد عددی، با قدرنسبتهای دیگری، تنظیم کنید.



مربوط به‌مسألهٔ۱۱۳

۱۱۳. هشت ستاره

در یکی از خانه‌های سفید این شکل، ستاره‌ای گذاشته شده‌است. ۷ستارهٔ دیگر، درخانه‌های سفید، طوری قراردهید که از این ۸ ستاره، هیچ‌دوستاره‌ای‌روی‌دوخانه افقی یا دوخانه عمودی، یا دوخانه‌قطری واقع نباشد.

البته،مسأله را باید به‌صورت جستجو وآزمایش‌حل کرد، بنابراین خوب است که روشی برای این‌جستجو پیدا کنید.

۱۱۴. دومساله دربارهٔ جادادن حرفها

مسألهٔ اول. مربعی را به۱۶مربع مساوی‌تقسیم کنید و۴ حرف درخانه‌های آن طوری قراردهید که درهرردیف افقی، هرردیف قائم وهریك ازدوقطر اصلی مربع، تنها یك حرف وجود داشته باشد. مسأله چند جواب دارد ،

هم درحالتی که ازیك حرف برای چهارخانه استفاده کنیم وهم برای حالتی که چهارحرف مختلف را به کار بگیریم؟

مسألهٔ دوم. مربعی را به ۱۶ مربع مساوی تقسیم کنید و حرفهای a،b،c،d را از هرکدام چهاربار، درخانه‌های مربع طوری قرار دهید که درهرردیف افقی، هرردیف قائم و هریك از دوقطر اصلی ، چهارحرف مختلف وجود داشته باشد. این مسأله چند جواب دارد؟

۱۱۵. تقسیم مربعهای با رنگهای مختلف

۱۶ مربع مساوی به‌چهاررنگ مختلف، ومثلاً سفید، سیاه، قرمز وسبز، تهیه کنید: هرچهارمربع به‌یك رنگ. ازهرچهارمربع با رنگهای مختلف، یك مجموعه درست کنید، به‌این‌ترتیب چهارمجموعه خواهید داشت. روی هریك ازمربعهای مجموعهٔ اول، عدد ۱؛ روی هریك ازمربعهای مجموعهٔ دوم، عدد ۲؛ روی هریك از مربعهای مجموعهٔ سوم، عدد ۳؛ و بالاخره روی هریك ازمربعهای مجموعهٔ چهارم، عدد ۴ را بنویسید.

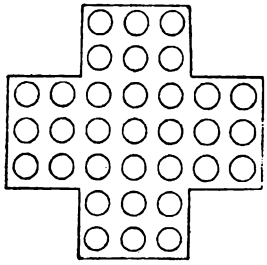
می‌خواهیم این ۱۶ مربع را به‌صورت یك مربع، طوری‌پهلوی‌هم قرار دهیم که درهرردیف افقی،هرردیف قائم وهریك از دو ردیف‌قطری، مربعهایی ازهرچهاررنگ و باچهارشمارهٔ ۱،۲،۳ و۴ قرارگرفته باشد (لازم نیست شمارهٔ مربعها، ردیف باشد).

مسأله، جوابهای زیادی دارد. قاعده‌ای فکر کنید، که به‌وسیلهٔ آن بتوان جوابها را بدست‌آورد.

۱۱۶. مهرهٔ آخر[1]

ازیك مقوا، ۳۲ مهرهٔ یك شکل ببرید (به‌هرشکلی که مایلید) وهرکدام از

۱) یك بازی معمائی قدیمی که به‌نامهای «کرم‌کدو» یا «تارك دنیا»، درابتدای سدهٔ هجدهم نیز دیده شده است.



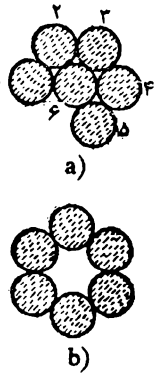
مربوط به‌مسألهٔ ۱۱۶

آنهارا دریکی‌از دایره‌های شکل‌قراردهید (درشکلی‌کـه خودتان رسم مـی‌کنید ، اندازه‌هارا بزرگتر بگیرید). چون‌دایره‌ها مساوی ۳۳ عدد است ، بنابراین یکی از آنها (هرکدام‌کـه شما بخواهید) خـالی می‌ماند .

مسأله اینست کـه همهٔ مهره‌هـا، به‌جز یکی ازآنهارا، بردارید. این‌مهره باید درخانه‌ای باقی بماند،که در ابتدای‌کار خالی بود. برای برداشتن یك مهره، بایـد آن‌را از روی یك مهره دیگربه‌خانهٔ آزاد پرش دهیم؛ حرکت می‌تواند به‌طرف بالا، پائین، راست یا چپ انجام‌گیرد، ولی حرکت به صورت قطری ممکن نیست. با هرحرکت، مهره‌ای‌که پرش از روی آن انجام‌گرفته است، برداشته می‌شود، بنابراین، مسأله باید در۳۱ حرکت، حل شود.

۱۱۷. ساختن حلقه از سکه‌ها

شش سکهٔ مساوی انتخاب‌کنید وآنهارا تنگ هم،آن‌طورکه در شکل a نشان داده شده است، روی میز قـراردهید . بایـد در ۴ حرکت،آنهارا به‌صورت حلقه درآورد (شکل b را را ببینید). «حـرکت» باید اینطور انجام بگیرد: بـا ثابت نگه‌داشتن ۵ سکه، سکهٔ ششم را، بدون‌اینکه از بقیهٔ سکه‌ها جـدا شود، حرکت می‌دهیم تـا در وضع جدید قرارگیرد. در وضع جدید بایـد لااقل بردوسکهٔ دیگر مماس باشد حل این مسأله با ۴ حرکت،آنطور که به‌نظر می‌رسد، خیلی ساده نیست.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۱۷

حل این‌مسأله، با جابه‌جاکردن سکه‌هابدست می‌آید. باتغییرردیف جابه‌جائیها، می‌توان جوابهای مختلف مسأله را بدست‌آورد. سعی کنید همهٔ جوابهای معما را پیداکنید. برای اینکه کارتان‌ساده‌ترشود، حرکتها را مثلاً به‌صورت (۲،۳ــ۱) نشان دهیدکه به معنای آنست‌کـه سکهٔ ۱ حرکت می‌کند تا به سکه‌هـای ۲ و۳ مماس شود . همچنین (۶،۵ــ۲)، یعنی سکهٔ ۲ حرکت می‌کند تا مماس برسکه‌های ۶ و۵ قرارگیرد.

این یکی‌ازجوابهای معماست:

۵،۲ــ۱ ؛ ۱،۳ــ۶ ؛ ۶،۵ــ۲ ؛ ۲،۳ــ۱

۲۳ جواب دیگررا پیداکنید.

۱۱۸. رقص روی یخ

دانش‌آمـوزان «مدرسهٔ بـالهٔ روی یخ»، نمایشی را روی میدان یخ‌بازی تمرین می‌کردند. هنرمندی‌که‌طرح نمایش‌را ریخته‌بود، نیمی‌ازمیدان یخ را به‌شکل‌قالی پرنقش ونگاری با۶۴گل(شکل a صفحهٔ۱۰۶) ونیم دیگر رابه‌صورت۶۴خانهٔ سیاه وسفید (شکل b ـ شبیه صفحهٔ شطرنج) درآورد.

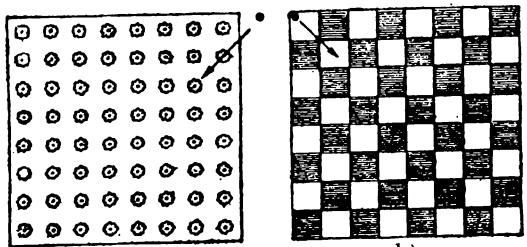
حالا، فاصلهٔ بین دوتمرین است . دختر و پسری که خستگی‌ناپذیر بودند ، در جریان تنفس هم بازی را ادامه دادند ومنحنی‌هایی را روی میدان یخ، که مثل آینه صاف بود، رسم‌کردند.

دختر به‌گلهای قالی یخی‌علاقمند بود ومی‌خواست بایك حرکت (البته، با چرخشهایی‌که دربعضی ازنقطه‌های‌میدان می‌کند)، از همهٔ ۶۴گـل عبورکند . او

تصمیم گرفت که تنها روی خطهای راست حرکت کند ، ضمناً آخرین خط راست، اورا به‌همان نقطه‌ای رساندکه از اول شروع کرده بود (این نقطه را روی شکل، بایك نقطهٔ سیاه مشخص کرده‌ایم).

او،باعبور از۱۴پاره خط راست،تصمیم خودرا اجراکرد (ازبعضی ازگلها، چندبار عبورکرد).

روی کاغذ خود، طرح حرکت دختررا رسم کنید.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۱۸. مسیرحرکت دختر وپسر را پیداکنید.

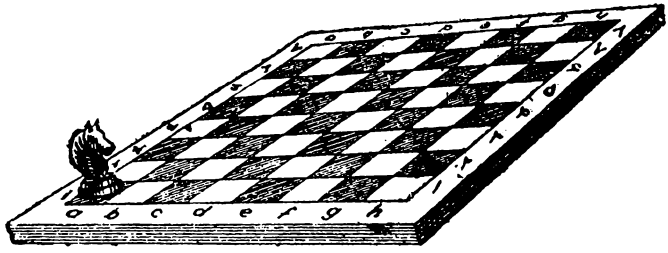
پسر روی نیمهٔ دیگرمیدان تمرین می‌کرد. او ازموفقیتهای‌هندسی دوستش اطلاع داشت وچون نمی‌خواست ازاوعقب بماند، مسألهٔ هندسی پیچیده‌تری برای خود طرح کرد: تنها ازخانه‌های سفید عبورکند وبه‌هیچ رأسی بیش‌ازیکبار برخورد نکند؛ او از خانهٔ سفیدگوشهٔ چپ بالا شروع کرد و با رعایت‌آنچه‌که شرط‌کرده بود، با عبور از ۱۷ پاره‌خط راست، به‌گوشهٔ سفید مقابل‌آن رسید.

مسیر حرکت پسررا هم معین‌کنید.

۱۱۹. مساله‌ای ازشطرنج

وقتی‌که شروین، سال چهارم دبستان را می‌گذراند؛ یك روز، اسب‌را در گوشه چپ وپائین صفحهٔ شطرنج (درخانهٔ a۱) قرارداد وکوشش‌کرد با

عبوردادن آن تنها یکبار ازهمهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنج ، آن‌را به‌خانهٔ سیاه‌گوشهٔ راست وبالای صفحهٔ شطرنج (خانه h۸) برساند.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۱۹. آیا می‌توان اسب‌را ازخانه a۱ به‌خانه h۸ رساند، به‌نحوی که ازهمهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنج عبورکند؟

شروین موفق به‌انجام این‌عمل نشد. آیا فکر نمی‌کنیدکه اومسألهٔ غیرقابل حلی را درجلوخودگذاشته بود؟

مسأله را ازلحاظ نظری حل‌کنید وبه‌شروین کمك‌کنید.

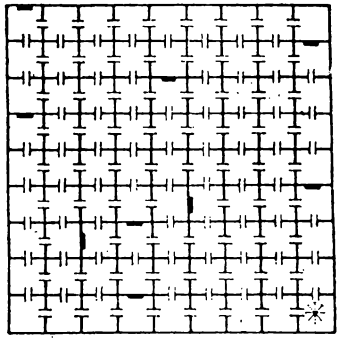
۱۲۰. صدوچهل وپنج در

زمین‌داران بزرگ سده‌های میانه، اغلب زیرزمین قصر خودرا به‌زندان تبدیل می‌کردند. دراین زیرزمین، راهروهای‌تودرتوی زیاد و اسرارآمیزی تعبیه می‌دیدند ؛که به وسیلهٔ دیوارسلولها ازهم جدا می‌شدند . راههای عبور، رمزی و پرازدامهای مختلف بود.

وقتی‌که‌آدم به‌یکی از قصرهای قدیمی می‌رود، بی‌اختیار به فکر فرومی‌رود.

فرض‌کنید، یکی‌ازکسانی‌که بافئودال مبارزه می‌کرده‌است، به‌یکی ازاین زیرزمینها، که طرح‌آن درشکل‌صفحهٔ۱۰۸ داده‌شده‌است، افتاده‌باشد. درساختمان این زیرزمین، رازی وجود دارد. از۱۴۵ دری‌که وجوددارد، تنها ۹تا قفل است (که ماآنها را به‌وسیلهٔ پاره‌خط‌کلفتی نشان داده‌ایم)

وهمهٔ بقیهٔ درها، کاملاً بازهستند. بنظر می‌رسدکه به‌سادگی می‌توان خودرا به‌دری‌که به‌بیرون بازمی‌شود، رسانید وسپس کوشش کرد تا این در بازشود. ولی این کارممکن نیست. هیچ در قفل شده‌ای را نمی‌توان باز کرد؛ ولی اگر در قفل‌شده، درست نهمین در باشد، خودبه‌خود بازمی‌شود. به‌این‌ترتیب، باید قبلاً از ۸ در باز (نه‌کمتر و نه بیشتر) عبورکرد تا در نهم (که قفل‌شده است)، خودبه‌خود بازشود. ضمناً باید همهٔ درهای قفل‌شدهٔ قبلی باز شود، تا دری‌که به بیرون باز می‌شود، قابل‌عبور باشد. ضمن راه هم نمی‌توان از ۲ یا ۳ در عبورکرد تا بشود تعداد درها را شمرد و سپس اشتباه را اصلاح‌کرد. به هرسلولی‌که پا بگذاریم، تمام درهائی‌که قبل ازآن بازشده‌اند، دوباره بسته می‌شوند و دیگر عبور ازآنها ممکن نیست. فئودال، برای اینکه وسیله‌ای برای تفریح داشته باشد، زیرزمین را به‌این‌ترتیب ساخته بود. زندانی‌که‌ازاین رمز اطلاع داشت، بردیوار سلول خود (که روی شکل با ستاره مشخص شده است)، نقشه دقیق زیرزمین را رسم‌کرد و طرح عبور خودرا طوری مشخص‌کردکه هر در قفل‌شده، درست نهمین دری باشدکه ازآن عبور می‌کند. وبه‌این‌ترتیب توانست راه فرار را پیداکند وخودرا نجات دهد. راه‌حل زندانی را پیداکنید.



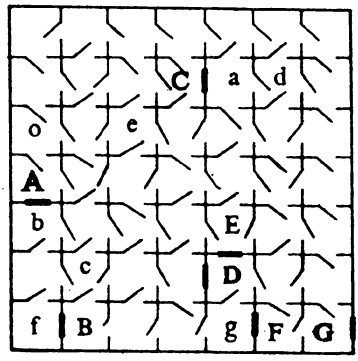
مربوط‌به‌مسألهٔ ۱۲۰. چگونه از راهروها نجات پیداکند؟

۱۲۱. چگونه راه فرار را پیداکند؟

کسانی‌که به‌نوع مسألهٔ قبل علاقمندند، می‌توانند روی این مسأله هم

فکر کنند.

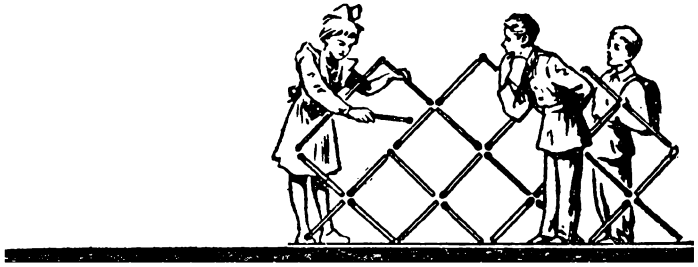
فرض کنید، زندانی موردنظر در زندانی که ۴۹ سلول دارد، عذاب می‌کشد. درهفت سلول، که روی شکل با حرفهای A، B، C، D، E، F و G نشان داده‌ایم ، دری وجود داردکه تنها با کلید باز می‌شود. ضمناً کلید A در سلول a قرار دارد، همچنین کلید B در سلول b وکلیدهای درهای C، D، E، F و G به‌ترتیب در سلولهای c، d، e، f و g گذاشته شده است . بقیهٔ درها ، با فشار دستگیره بازمی‌شوند، ولی دستگیره تنها دریك طرف در وجود دارد وقتی که ازآن عبورکنیم، خودبه‌خود بسته می‌شود ودرطرف دیگرآن، دیگر دستگیره‌ای وجودندارد.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۲۱. طرح زیرزمین

درطرح زیرزمین، نشان داده شده است که ازهریك از درهای بدون قفل، ازکدام‌طرف می‌توان عبورکرد ، ولی معلوم نیست که به‌چه‌ترتیبی باید درهای قفل‌شده را بازکرد. از دری که قفل‌آنرا بازکرده‌اید، هرچندبار که بخواهید، می‌توانید عبورکنید.

زندانی درسلول O جا داده شده است. راه فرار اورا پیداکنید.



بخش سوم

هندسهٔ چوب‌کبریتها

قوطی‌کبریت، یا قطعه‌چوبهای‌کوتاه مساوی، وسیلهٔ خوبی برای سرگرمیهای هندسی است،که تنها به‌کمی تیزهوشی و حاضرجوابی نیاز دارد.

از چوب‌کبریتها ، می‌توان همهٔ انـواع شکلهای مستقیم‌الخط را درست‌کرد؛ با جابه‌جاکردن‌آنها، می‌توان شکلی را به‌شکل دیگر تبدیل کرد؛ حتی قضیه‌ها را هم می‌توان به‌کمك چوب‌کبریتها، ثابت‌کرد.

برای نمونه، این‌مسأله را بررسی می‌کنیم:

با ۲۴ چوب‌کبریت، چندمربع مساوی می‌توان درست‌کرد، بدون اینکه چوب‌کبریتی‌را خم‌کنیم وضمناً همهٔ‌آنهاهم‌مورداستفاده‌قرارگیرد.

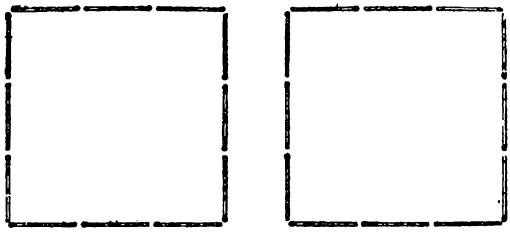
اگر درهرضلع مربع، ۶ چوب‌کبریت بگذاریم (بیشتر نمی‌شود)، یك مربع بدست می‌آید.

با ۲۴ چوب‌کبریت، نمی‌توان مربعهای مساوی ، به‌ضلع ۵ یا ۴ چوب‌کبریت درست‌کرد. ولی اگر ضلع مربع را مساوی ۳ چوب‌کبریت بگیریم، با۲۴چوب‌کبریت، دومربع مساوی بدست می‌آید (شکل a صفحهٔ

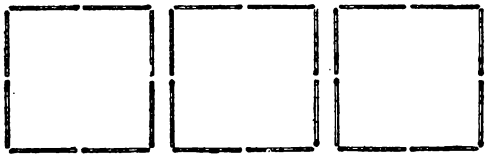
۱۱۱ را ببینید).

اگر درهرضلع، دوچوب‌کبریت قراردهیم، سه مربع مساوی‌بدست می‌آید (شکل b).

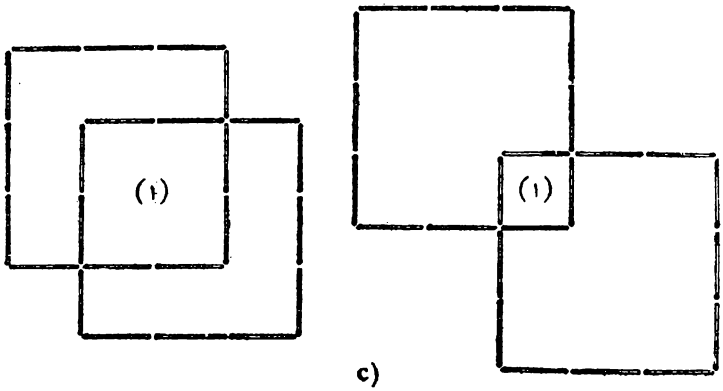
به‌این نکته‌توجه کنید که‌از مربعهای به‌ضلع ۳ و ۲چوب کبریت، می‌توان‌مربعهای‌اضافی‌هم، که‌اندازهٔ‌دیگری‌دارند، پیدا کرد(شکل‌cصفحهٔ ۱۱۱



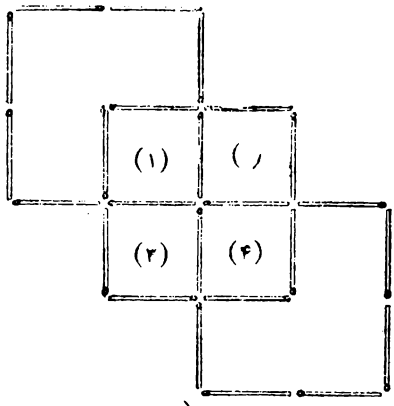
a)



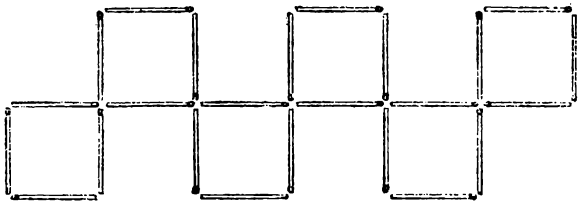
b)



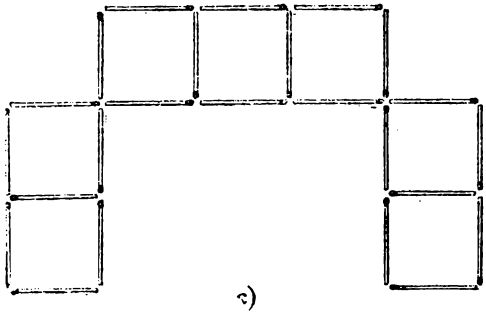
c)



a)



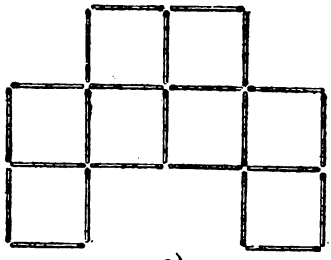
b)



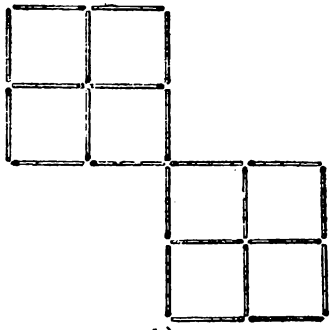
c)

و شکل a درصفحهٔ ۱۱۲ را ببینید). ازمربعهای به‌ضلع۳چوب‌کبریت، یك مربع اضافی (شکل c صفحهٔ۱۱۱) و از مربعهای به‌ضلع ۲ چوب کبریت، چهارمربع اضافی بدست می‌آید (شکل a صفحهٔ۱۱۲).

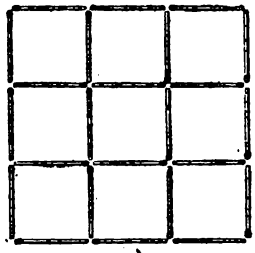
اگر با هرچهارچوب‌کبریت، یك مربع درست‌کنیم، با ۲۴ چوب کبریت می‌توان ۶ مربع مساوی پیداکرد (شکل b درصفحهٔ۱۱۲).



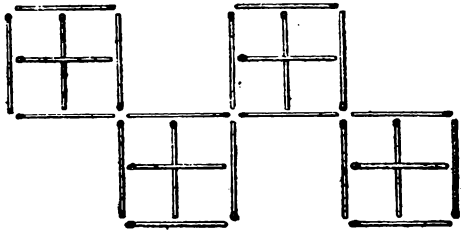
a)



b)



c)

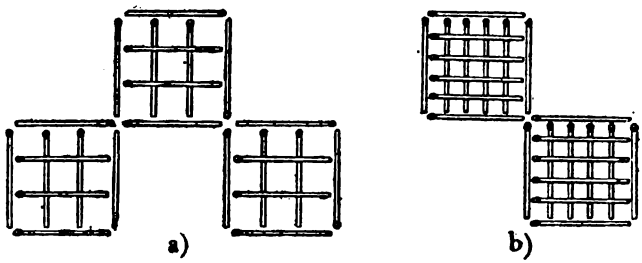


d)

اگربعضی از چوب‌کبریتها را به‌عنوان ضلع دومربع به حساب بیاوریم، آنوقت با ۲۴ چوب‌کبریت می‌توان ۷ مربع مساوی (شکل c در صفحهٔ۱۱۲)، یا ۸ مربع مساوی (شکلهای a و b درصفحهٔ ۱۱۳) ویا ۹ مربع مساوی (شکل c درصفحهٔ۱۱۳) بدست‌آورد.

درمورد سه‌شکل‌اخیر، می‌توان مربعهای اضافی‌بااندازه‌های‌دیگری هم بدست آورد : یکی در شکل a ، دوتا درشکل b و پنج‌تا درشکل c . خودتان‌آنهارا درست‌کنید.

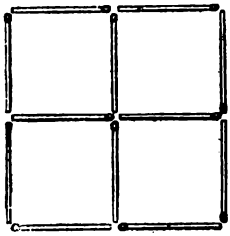
اگرضلع مربع را مساوی $\frac{۱}{۲}$ چوب‌کبریت بگیریم (با قراردادن یك چوب‌کبریت به صورت قطری عمودبرچوب‌کبریت دیگر)، می‌توان ۱۶ مربع بااندازه‌های مساوی و۴ مربع اضافی بدست‌آورد. روی‌هم ۲۰ مربع (شکل d درصفحهٔ۱۱۳).



با ۲۴چوب‌کبریت ، می‌توان ۲۷ مربع مساوی به‌ضلع $\frac{۱}{۳}$ چوب کبریت و ۱۵ مربع اضافی به اندازه‌های دیگر، روی‌هم ۴۲ مربع بدست آورد (شکل a درهمین صفحه)، و بالاخره، اگرضلع مربع را مساوی $\frac{۱}{۵}$ چوب‌کبریت‌بگیریم، ۵۰مربع‌مساوی‌بدست می‌آید (شکل b همین‌صفحه)، که اگرمربعهای اضافی را هم به حساب بیاوریم (تعداد آنها ۶۰ است)، روی‌هم ۱۱۰ مربع بدست می‌آید.

حالا به‌حل مسأله‌های معمایی زیر بپردازید[1].

۱۲۲. پنج معما


مربوط به‌مسألهٔ ۱۲۲

با ۱۲ چوب‌کبریت، ۴ مربع مساوی درست کرده‌ایم (شکل را ببینید)، ضمناً یك مربع اضافی (مربع بزرگ) هم بدست‌آمده‌است. می‌خواهیم:

a) با برداشتن دو چوب‌کبریت و دست‌نزدن به‌بقیه، دو مربع نامساوی بدست‌آید؛

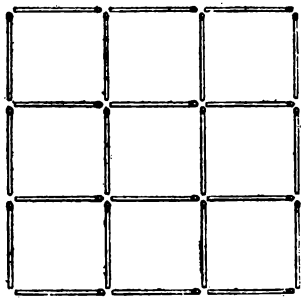
b) با جابه‌جاکردن سه چوب‌کبریت، سه‌مربع مساوی بدست‌آید؛

c) باجابه‌جاکردن چهارچوب‌کبریت، سه‌مربع‌مساوی‌بدست‌آید؛

d) با جابه‌جاکردن دوچوب‌کبریت، ۷ مربع بدست‌آید (می‌توان یك چوب‌کبریت را به‌صورت قطری عمودبردیگری قرارداد)؛

e) با جابه‌جاکردن ۴ چوب‌کبریت، ۱۰ مربع بدست‌آید (دوچوب کبریت را به‌صورت قطری، عمودبرهم می‌توان قرارداد).

۱۲۳. بازهم هشت معما


مربوط به‌مسألهٔ ۱۲۳

با ۲۴ چوب‌کبریت مربعی ساخته‌ایم که ۹ خانه دارد. می‌خواهیم:

a) با جابه‌جاکردن ۱۲ چوب کبریت، دومربع مساوی بدست‌آید؛

b) با برداشتن ۴ چوب‌کبریت، یك مربع بزرگ و چهار مربع کوچك

---

۱. مسأله‌هایی راکه وضع اولیهٔ چوب‌کبریتها، دربارهٔ آنها یکی است، دریك مسأله گردآورده‌ایم. هرمسأله، بدون ارتباط با مسأله‌های قبل‌ازآن حل می‌شود.

باقی بماند؛

c) ۵ مربع مساوی با برداشتن ۴ چوب کبریت، یا ۶چوب کبریت (دوجواب)، یا ۸ چوب کبریت (۳جواب)، بدست آید؛

d) با برداشتن ۸ چوب کبریت، ۴ مربع مساوی باقی بماند (دوجواب)؛

e) با خارج کردن ۶ چوب کبریت، ۳ مربع تشکیل شود؛

f) با برداشتن ۸ چوب کبریت، ۲ مربع باقی بماند (دوجواب)؛

g) با برداشتن ۸ چوب کبریت، ۳ مربع باقی بماند؛

h) با برداشتن ۶ چوب کبریت، ۲ مربع و دو شش‌ضلعی نامنظم بدست آید.

۱۲۴. با ۹ چوب کبریت

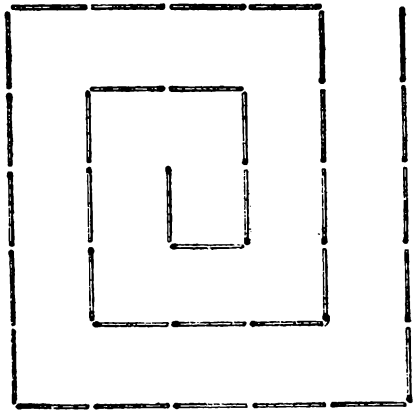
با ۹ چوب کبریت، ۶ مربع بسازید (گذاشتن یك چوب کبریت به‌صورت قطری عمودبردیگری مانعی ندارد).

۱۲۵. مارپیچ

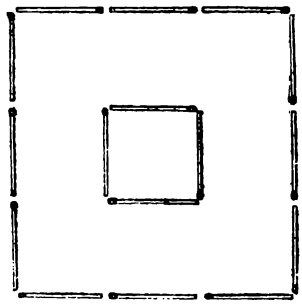
با ۳۵ چوب کبریت، شکلی ساخته‌ایم که مارپیچ را به خاطرمی‌آورد (شکل صفحهٔ ۱۱۷را ببینید). باجابه‌جاکردن ۴چوب کبریت، ۳مربع درست کنید.

۱۲۶. شوخی

باشانزده چوب کبریت، طرح قلعه‌ای‌راکه به‌وسیلهٔ یك خندق عمیق‌احاطه شده است، ریخته‌ایم (شکل صفحهٔ ۱۱۷ را ببینید). چگونه به‌کمك دوتخته (چوب کبریت) که طولی‌مساوی عرض‌خندق دارد، می‌توان ازخندق عبور کردوبه‌قلعه رسید؟

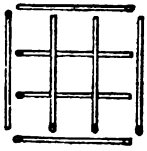


مربوط به‌مسألهٔ ۱۲۵



مربوط به‌مسألهٔ ۱۲۶

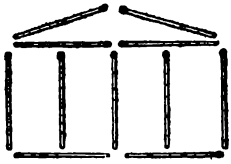
۱۲۷. دوچوب‌کبریت بردارید



مربوط به‌مسألهٔ ۱۲۷

شکلی را که می‌بینید به‌کمك ۸ چوب‌کبریت، درست شده است. دوچوب‌کبریت را طوری بردارید که سه‌مربع باقی بماند.

۱۲۸. نمای منزل



مربوط به‌مسألهٔ ۱۲۸

نمای منزل را با ۱۱ چوب‌کبریت، نشان‌داده‌ایم (شکل را ببینید). با جابه‌جاکردن ۲ چوب کبریت، می‌توان ۱۱ مربع بدست آورد و با جابه‌جاکردن ۴ چوب‌کبریت، می‌توان شکلی بدست آورد که ۱۵ مربع داشته باشد.

۱۲۹. شوخی

شش چوب‌کبریت را طوری قرار دهید که یك مربع درست کنند.

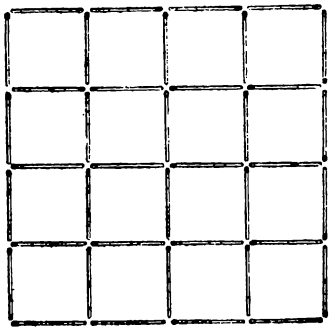
۱۳۰. مثلثها

اگر بخواهیم چوب کبریتها شکسته یا خم نشوند، با ۳ چوب کبریت می‌توان یک مثلث متساوی‌الاضلاع ، و با ۱۲ چوب کبریت ، ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع ومساوی باهم درست کرد. چطور؟

بعداً، ۴چوب کبریت را ازجائی به‌جای دیگرمنتقل کنید،طوری که سه‌مثلث متساوی‌الاضلاع بدست‌آیدکه از بین‌آنها ، تنها دومثلث باهم برابر باشند.

۱۳۱. چند چوب کبریت باید برداشت؟

۱۶ مربع‌مساوی درست کنید(شکل را ببینید) . البته اگر بخواهیم همهٔ مربعهائی را که در این شکل وجوددارد، به‌حساب‌آوریم، تعداد آنها خیلی بیشترمی‌شود (خودتان حساب کنید). حداقل ، چند چوب کبریت‌را باید برداریم، تا درشکل حتی‌یک مربع هم وجود نداشته باشد (نه ازمربعهای کوچک ونه ازمربعهای بزرگتر)؟

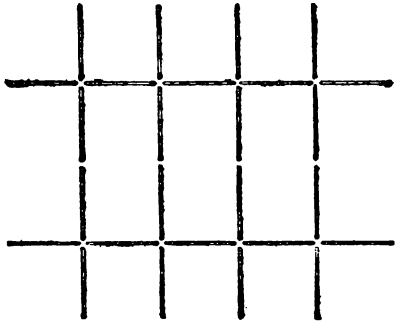


مربوط به‌مسألهٔ ۱۳۱

۱۳۲. شوخی

هرچوب کبریت طولی مساوی ۴/۵ سانتیمتردارد. چگونه می‌توان از۱۴ ویا حتی ۵ چوب کبریت، بدون شکستن‌آنها، یک متر درست کرد؟

۱۳۳. حصار



مربوط به‌مسألهٔ ۱۳۳

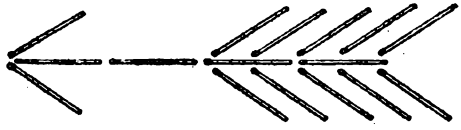
از «حصاری» که درشکل دیده دیده‌می‌شود، ۱۴ چوب‌کبریت را طوری جابه‌جا کنیدکه ۳ مربع بدست‌آید: مربع اولی داخل مربع دومی و هردوی آنها داخل مربع سومی. هرچوب‌کبریت باید قسمتی ازضلع یك یا چند مربع باشد.

۱۳۴. شوخی

به‌کمك دوچوب‌کبریت، بدون اینکه‌آنها را بشکنید و یا از طرف طول دوقسمت‌کنید، یك مربع درست‌کنید.

۱۳۵. پیکان

با شانزده چوب‌کبریت، یك پیکان ساخته‌ایم.



a) ۸ چوب‌کبریت را طوری جابه‌جاکنیدکه ۸ مثلث مساوی بدست آید؛ b) ۷ چوب‌کبریت را طوری جابه‌جاکنیدکه ۵ چهارضلعی مساوی بدست‌آید.

۱۳۶. مربعها و لوزیها

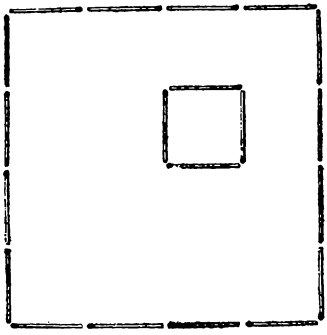
با ۱۰ چوب‌کبریت، سه مربع بسازید. سپس یك چوب‌کبریت راکنار

بگذارید وبقیه را طوری بچینیدکه یك مربع و دولوزی بدست‌آید.

۱۳۷. چندضلعی‌های مختلف روی یك شکل

هشت چوب‌کبریت‌را طوری بگذاریدکه یك هشت‌ضلعی، دومربع وهشت مثلث، روی یك شکل، بدست‌آید.

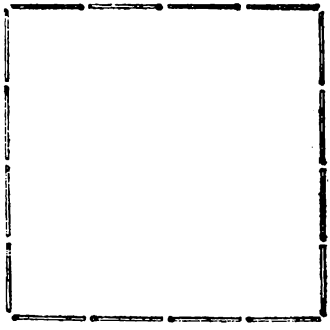
۱۳۸. طرح‌ریزی باغ



مربوط به‌مسألهٔ ۱۳۸

با شانزده چوب‌کبریت، حصارباغ را به شکل مربع، درست‌کرده‌ایم (شکل را ببینید). قسمتی از سطح باغ را برای ساختمان اختصاص داده‌ایم‌که درشکل به‌صورت‌مربعی به‌ضلع یك چوب‌کبریت نشان‌داده شده‌است. بقیهٔ سطح‌باغ را به‌کمك ۱۰ چوب‌کبریت به ۵ قسمت طوری تقسیم‌کنیدکه هم ازجهت شکل وهم ازلحاظ مساحت، برابرباشند.

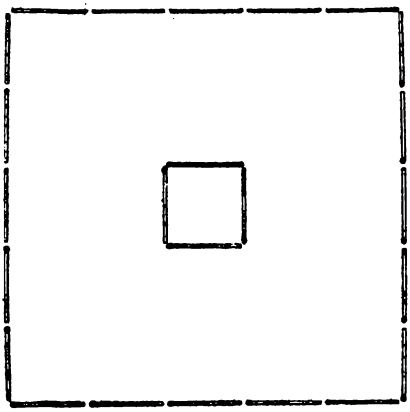
۱۳۹. تقسیم به‌قسمتهای هم‌ارز



موبوط به‌مسألهٔ ۱۳۹

به‌کمك یازده چوب‌کبریت، مربعی راکه از۱۶چوب‌کبریت درست‌شده است، به‌چهارقسمت هم‌ارز (یعنی بامساحتهای مساوی) طوری‌تقسیم کنیدکه هرقسمت به‌سه‌قسمت‌دیگر راه داشته باشد.

۱۴۰. قسمت آزاد باغ



مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۰

دورهٔ باغ را به‌کمك ۲۰ چوب‌کبریت، به شکل مربع نشان داده‌ایم. در وسط باغ، چاهی وجود دارد که ما آنرا به صورت مربعی به ضلع مساوی یك چوب‌کبریت مشخص کرده‌ایم. می‌خواهیم: a) قسمت آزاد باغ را به‌کمك ۱۸ چوب‌کبریت، به ۶ قسمت هم‌ارز و هم‌شکل تقسیم کنیم؛ b) به‌کمك ۲۰ چوب‌کبریت، آنرا به ۸ قسمت هم‌شکل و هم‌ارز تقسیم کنیم.

۱۴۱. پارکت

اگر طول متوسط یك چوب‌کبریت را ۵ سانتیمتر بگیریم، چند چوب‌کبریت لازم است تا مربع به‌ضلع ۱ متر را به‌مربعهای مساوی به‌ضلع یك چوب‌کبریت تقسیم کنیم؟

۱۴۲. نسبت ثابت مساحتها

با ۲۰ چوب‌کبریت، دو مستطیل درست کنید: یکی با ۶ چوب‌کبریت و دیگری با ۱۴ چوب‌کبریت.

خطهای نقطه‌چین، مستطیل اول را به ۲ مربع، و مستطیل دوم را به ۶ مربع تقسیم کرده است. بنابراین مساحت مستطیل دوم، سه‌برابر مساحت

مستطیل اول است.

حالا همین ۲۰ چوب‌کبریت را به دوگروه ۷ و ۱۳ چوب‌کبریتی تقسیم‌کنید. با هرگروه یك‌شکل‌بسازید (نوع شکل مهم نیست)، به‌نحوی که بازهم مساحت یکی سه‌برابرمساحت دیگری باشد.

۱۴۳. شکل را پیداکنید

۱۲چوب‌کبریت داریم‌که طول هرکدام‌را یك واحد می‌گیریم. می‌خواهیم با این ۱۲ چوب‌کبریت، شکلی بسازیم‌که مساحت آن مساوی سه واحد مربع باشد.

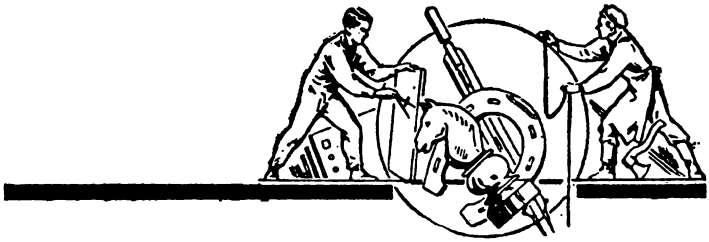
متوجه باشید که با ۱۲ چوب‌کبریت مـی‌توان سه‌مربع جداگانه ساخت، به‌نحوی‌که طول هرضلع یك واحد ومساحت هرکدام مساوی یك واحد مربع بشود، ولی ما می‌خواهیم یك شکل (ونه چند شکل جداگانه) بسازیم‌که مساحتی مساوی سه‌واحد مربع داشته‌باشد.

۱۴۴. بسازید وثابت‌کنید

به‌کمك چوب‌کبریتها، این شکلها را بسازید:

a) دوچوب‌کبریت را در امتداد هم قراردهید، طوری‌که یك‌خط راست درست‌کنند وبه‌کمك استدلال، درستی ساختمان خودرا ثابت‌کنید (برای اثبات، به‌ساختمانهای‌اضافی نیازدارید وبرای این‌منظورمی‌توانید ازهرچند چوب‌کبریت‌که بخواهید، استفاده‌کنید).

b) به‌کمك چـوب‌کبریتها، یـك شش‌ضلعی منتظم درست‌کنید . درستی ساختمان را ثابت‌کنید.

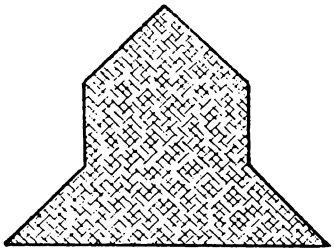


بخش چهارم

هفت‌بار گز کن، یکبار پاره کن

۱۴۵. به‌قسمتهای مساوی

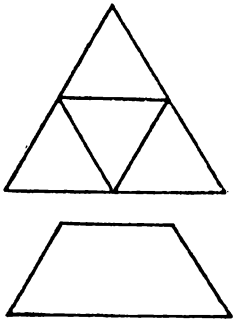
مسألهٔ ۱. این شکل را روی صفحهٔ کاغذ رسم کنید و از آن ۴ چهارضلعی مساوی بدست آورید (شکلهایی را مساوی گوئیم که قابل انطباق بریکدیگر باشند).



a)

مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۵-۱

مسألهٔ ۲. راه تقسیم یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به‌چهار قسمت مساوی، می‌توان در شکل (قسمت بالا) دید. اگر مثلث بالا را ازاین‌شکل جداکنیم، شکلی بدست می‌آید که در هندسه به‌آن ذوزنقه گویند. حالا این ذوزنقه‌راهم به‌چهارقسمت مساوی تقسیم کنید.

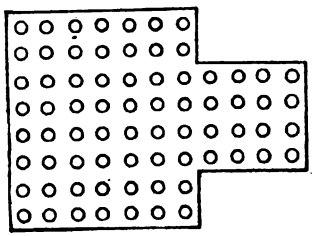


b)

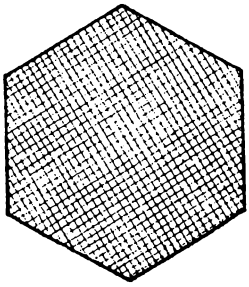
مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۵-۲

مسألهٔ ۳. صفحه‌ای را که

به‌شکل زیر (شکل c) داده شده است، به‌شش قسمت مساوی تقسیم کنید.



c)



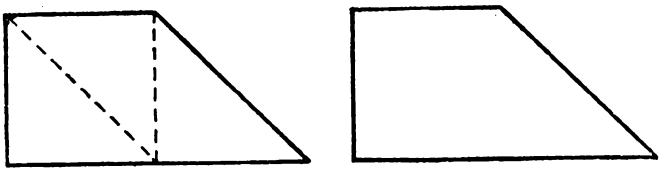
d)

مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۴-۴ مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۵-۳

مسألهٔ ۴. اگر دریك چندضلعی، همهٔ زاویه‌ها باهم و همهٔ ضلعها باهم مساوی باشند، چندضلعی را منتظم گویند.

شش‌ضلعی منتظم شکل d را به۱۲ چهارضلعی‌مساوی تقسیم کنید (دوجواب). آیا این‌چهارضلعی‌ها هم منتظم، یعنی‌مربع‌اند؟

مسألهٔ ۵. همیشه نمی‌توان یك ذوزنقه را به ۴ ذوزنقهٔ کوچکتر مساوی باهم تقسیم کرد. آیا این درست نیست؟ ولی ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ شکل e راکه از سه‌مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه تشکیل شده است، می‌توان به‌سادگی به‌چهار ذوزنقهٔ مساوی قائم‌الزاویه، تقسیم کرد.

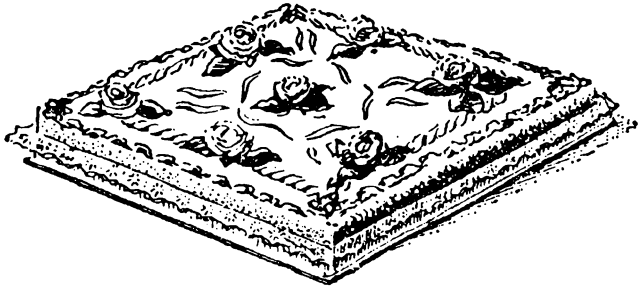


e)

مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۵-۵

۱۴۶. هفت‌گل روی نان شیرینی

برای چای عصرانه، نان شیرینی بزرگی خریده شد. با سه‌خط راست،آنرا چنان تقسیم کنیدکه درهرقسمت یکی از۷گل واقع باشد.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۶

۱۴۷. شکلی‌که خطهای تقسیم‌آن پاك شده است

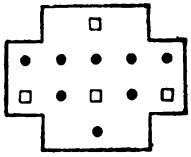
مربعی‌که در بعضی از خانه‌های‌آن، عددهایی نوشته شده است (شکل را ببینید)، برای تقسیم به چهارشکل مساوی،آماده شده بود. این شکلها، نسبت به مرکز مربع متقارن بودند؛ علاوه‌برآن، برای اینکه یکی از شکلهای مساوی،کاملاً بردیگری قرارگیرد،کافی بودکه‌آنرا به‌اندازهٔ ۹۰ درجه دور مرکزمربع،دوران‌دهیم. متأسفانه، علامتهای‌خطهای تقسیم را کسی از بین برده است، ولی عددها باقی مانده‌اند و من می‌دانم که این‌عددها طوری نوشته شده‌اند که ازهرعدد تنها یکبار درهرشکل واقع می‌شود.

			۳		۱	۱	
			۳	۴			
				۲			
	۱		۴	۲			
	۱						
		۳	۳				
					۴	۲	۲
					۴		

مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۷

من‌گمان می‌کنم‌که همین

برای ما کافی است تابتوانیم، جای خطهای تقسیم را، که پاك شده است، پیدا کنیم، به‌شرطی که این‌را هم بدانیم کـه خطهای تقسیم تنها در طول ضلعهای خانه‌های مربع قرار دارند.


مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۸

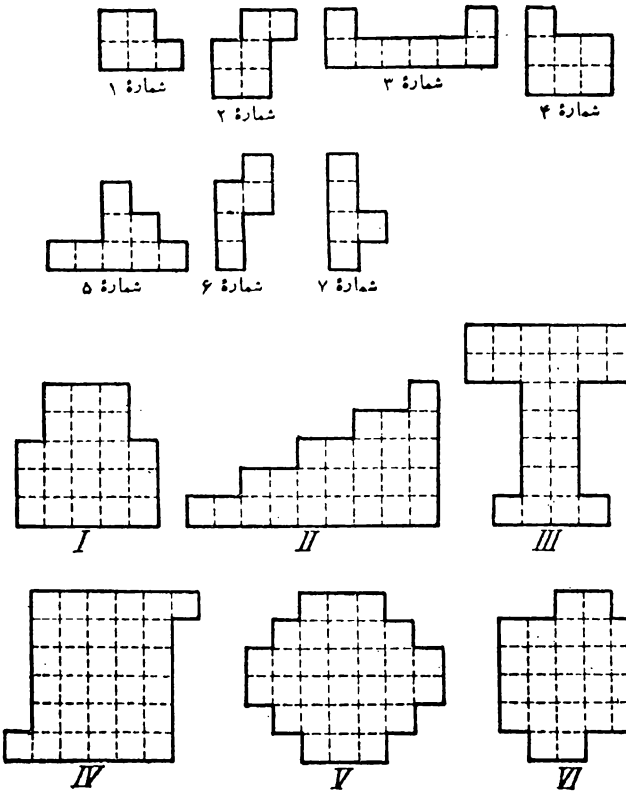
۱۴۸. توصیه کنید

روی شکل، طـرح یك وسیله داده شده است. توصیه کنید که چگونه آنـرا به۴ قسمت تقسیم کنیم که به‌یك شکل ویك اندازه باشند، ضمناً درهرقسمت ۲ میخ (که روی شکل بانقطه‌های سیاه‌نشان داده شده است) ویك سوراخ (که با مربعهای کوچك مشخص شده‌اند) قرار گرفته باشد.

۱۴۹. بدون تلف کردن

شما می‌دانید که درکارخانه‌ها، برای تهیه سفارشها، یکباره مادهٔ خام را جلو دستگاه تراش یا چرخ سوراخ‌کن نمی‌گذارند، بلکه ابتدا روی آنها جای برشها و سوراخها را با خط و نقطه، علامتگذاری مـی‌کنند. فکر و تلاش نشانه‌گذار، اغلب دراین‌جهت‌است که تاحد ممکن دربه‌کاربردن‌مواد اولیه صرفه‌جوئی بشود.

درکارخانه‌ای لازم بود تعداد زیادی‌صفحه‌های برنجی به‌هفت‌نوع ساخته‌شود. انواع این‌صفحه‌ها درشکل‌صفحهٔ۱۲۷ داده شده‌است (شمارهٔ۱، شمارهٔ۲، شمارهٔ۳، شمارهٔ۴، شمارهٔ۵، شمارهٔ۶ وشمارهٔ۷). نشانه‌گذارمتوجه شدکه‌اگریکی‌ازاین‌قطعه‌ها را ۶بار به‌طورمناسب پهلوی‌هم قراردهد(آنرا پیدا کنید)، یـك صفحهٔ برنجی مستطیل‌شکل بدست می‌آیـد. نشانه‌گذار، برای تهیهٔ بقیهٔ قطعه‌ها، صفحه‌های برنجی را به‌شکلهای I تا VI برید، طوری‌که از هرکدام ازآنهامی‌توان یکی‌ازقطعه‌های مورد نیاز را، بدون تلف‌کردن حتی یك سانتیمتر مربع برنج، درست‌کرد.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۹. چگونه می‌توان‌ازقطعه‌های I تا VI وضمناًصفحهٔ مستطیلی، قطعه‌های ۱ تا ۷ را، بدون تلف‌کردن مصالح، بدست‌آورد؟

مثلاً ازصفحهٔ به شکل I می‌توان ۳ قطعه ازشمارهٔ ۴ و از صفحهٔ به‌شکل II، ۵ قطعه ازشمارهٔ ۷ را بدست‌آورد و غیره. از بقیهٔ صفحه‌ها، کدام قطعه‌ها را می‌توان بدست‌آورد، مطلبی‌است‌که شما باید پیداکنید.

این راهنمائی‌را می‌کنیم‌که ازصفحهٔ III می‌توان۳ قطعهٔ‌هم‌شکل، ازIV، ۴ قطعهٔ هم‌شکل، ازV ، ۶ قطعه و از VI، ۴ قطعهٔ هم‌شکل‌بدست

آورد. فراموش نکنید که یکی از انواع این قطعه‌ها را می‌توان با تقسیم یك صفحهٔ برنجی مستطیل‌شکل بدست آورد (از هر مستطیل، ۶ قطعه).

برای اینکه کارتان ساده شود، شکلهای I تا VI را روی کاغذ شطرنجی رسم کنید و بعد خطهای تقسیم را بدست آورید.

۱۵۰. وقتی که فاشیستها به‌سرزمین ما تجاوز کردند

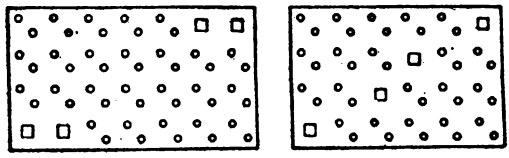
در آن زمان، در شهرهایی که به جبهه نزدیك بود، ناچار بودند از استتار نور استفاده کنند. در یکی از ساختمانها، وقتی که زمان تاریکی فرارسید، برای پنجره‌ای که به‌شکل مربع و به‌ضلع مساوی ۱۲۰ سانتیمتر بود، پرده‌ای پیدا نکردند. به‌جز یك صفحهٔ تخته‌سه‌لایی، چیز دیگری در دسترس نبود؛ ولی این تخته سه‌لایی، اگرچه مساحتی مساوی پنجره داشت، ولی اندازه‌هایش ۱۶۰ × ۹۰ سانتیمتر مربع بود.

ابتدا همه دستپاچه بودند و نمی‌دانستند چه کنند، ولی واسیای پیش‌آهنگ، با خط‌کش و مداد و اره‌ای از راه رسید و به‌سرعت روی تخته سه‌لایی را علامتگذاری کرد و آنرا با اره تنها به دو قسمت کرد و از قسمتهای آن، مربعی درست به‌اندازهٔ پنجره ساخت.

راه‌حل واسیا را پیدا کنید.

۱۵۱. خاطرهٔ متخصص برق

در هر ساختمانی که برق داشته باشد، لوحی با سرپوشهای پیش‌گیری کننده وجود دارد، در هر کارخانه هم از این لوحها، به‌تعداد زیادی می‌بینید. این لوحها، معمولاً به‌شکل مستطیل یا مربع‌اند، ولی در زمان جنگ جهانی دوم، برای صرفه‌جوئی، اغلب آنها را از لوحهای موجود درست می‌کردند. به‌خاطر دارم که ما دو لوح بزرگ داشتیم (شکل صفحهٔ ۱۲۹ را ببینید) که سوراخهای کوچکی به شکل دایره و مربع در آنها به وجود آمده بود. می‌خواستیم



مربوط به‌مسألهٔ ۱۵۱

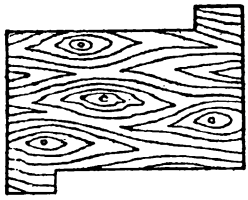
ازاین‌دولوح، ۸ لوح کوچك تهیه کنیم.

بعدازآنکه سیم‌کش کمی‌فکرکرد ولوحهارا ازاین‌طرف وآن‌طرف نگاه‌کرد، فهمیدکه می‌توان‌لوح اول (شکل a) را به‌چهارقسمت‌مساوی طوری تقسیم‌کرد که در هرقسمت یك سوراخ مربعی و ۱۲ سوراخ‌گرد، وجود داشته باشد. همچنین‌لوح دوم (شکل b) را به‌چهارقسمت مساوی تقسیم‌کردکه درهرقسمت یك‌سوراخ مربعی و۱۰سوراخ‌گرد وجودداشته باشد (منظور ما ازتساوی لوحها، تساوی شکل‌آنهاست).

آیا شما می‌توانید، لوحهارا به‌این‌ترتیب تقسیم کنید؟

۱۵۲. همه‌آن به‌کار می‌آید

یك قطعهٔ چوب‌گردوی صاف مستطیل‌شکل با دو زائده‌ای‌که آنها هم به شکل مستطیل بودند (شکل را ببینید)، جلومن قرارداشت وپیش‌خود فکر می‌کردم «آیا می‌شود از این قطعه چوب، یك صفحهٔ شطرنج با ۶۴ خانه ساخت؟» با اندازه‌گیری‌آن متوجه شدم‌که این‌کار ممکن است،ضمناً از تمام چوب هم به‌طورکامل استفاده می‌شود.



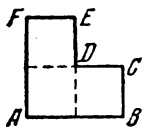
مربوط به‌مسألهٔ ۱۵۲

قطعه چوب‌گردو را به دوقسمت،که از لحاظ شکل و اندازه‌ها مساوی بودند، تقسیم کردم و از دوقسمت‌آن، یك صفحهٔ شطرنجی با ۶۴ خانه درست‌کردم ؛ درهریك از زائده‌های

چوب، دوخانه قرارگرفت. خط تقسیم را پیداکنید.

۱۵۳. معما

شکل ABCDEF از سه‌مربع متصل به‌هم تشکیل‌شده است. می‌خواهیم این شکل را به دوقسمت طوری تقسیم‌کنیم‌که بتوان ازآنها، یك قاب مربع‌شکل درست‌کرد. قسمت خالی داخل قاب هم باید به شکل مربعی باشد که درست مساوی هرکدام از مربعهای شکل اصلی درآید.



مربوط‌به‌مسألهٔ ۱۵۳

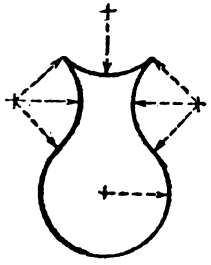
۱۵۴. تقسیم نعل

شکل یك نعل را روی‌کاغذ خود رسم‌کنید وفکرکنیدکه چگونه می‌توان با دوخط راست،آنرا به‌شش‌قسمت تقسیم‌کرد، بدون اینکه بعد از تقسیم اول، قسمتها را رویهم قراردهیم؟

۱۵۵. درهرقسمت، یك سوراخ

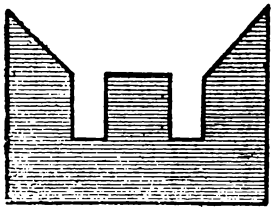
در اینجا نعلی داده شده است‌که درآن شش سوراخ برای میخ‌زدن وجود دارد.آنرا با دوضربه به‌۶قسمت طوری تقسیم‌کنیدکه در هرقسمت یکی از سوراخها واقع باشد، به‌شرط اینکه درهرضربه، نعل روی خط راست تقسیم شود.

۱۵۶. ازیك‌کوزه، مربع بسازید


مربوط به‌مسألهٔ ۱۵۶

روی‌کاغذ،شکلی‌شبیه یك تنگ‌رسم‌کنید (شکل را ببینید)؛ سپس به‌کمك دوخط راست،آنرا به‌سه‌قسمت‌طوری تقسیم‌کنید که ازآنها بتوان یك مربع ساخت.

۱۵۷. بازهم ساختن یك مربع

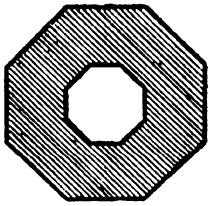


مربوط به‌مسألهٔ ۱۵۷

شکل‌مجاور را روی کاغذ خود رسم کنید. می‌خواهیم این شکل را با رسم چهارخط راست به ۷ قسمت طوری تقسیم کنیم که بتوان ازآنها یك مربع ساخت. هرزاویهٔ حاده در این شکل مساوی ۴۵ درجه و و هرزاویهٔ منفرجهٔآن مساوی ۱۳۵ درجه‌است.

۱۵۸. تبدیل زیبا

روی یك کاغذکلفت، یا روی یك مقوا، یك هشت‌ضلعی منتظم رسم کنید وآنرا جداکنید، سپس دروسط‌آن‌سوراخی، بازهم به‌شکل یك هشت‌ضلعی منتظم به‌وجود آورید. می‌خواهیم‌آنرا به۸قسمت مساوی طوری تقسیم کنیم که ازقسمتهای‌آن‌بتوان یك ستارهٔ هشت‌پر با زاویه‌های حاده در راس، درست‌کرد.

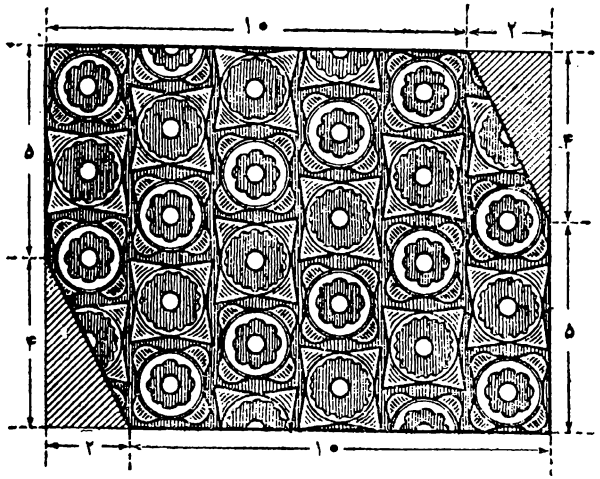


مربوط به‌مسألهٔ ۱۵۸

۱۵۹. تعمیرقالی

ازیك قالی قدیمی و با ارزش، دوقسمت مثلثی‌کوچکی‌که به‌کلی‌خراب شده بود، جداکردند (درشکل‌صفحهٔ۱۳۲، این‌دوقسمت ، با هاشور نشان داده شده است).

دانش‌آموختگان مدرسهٔ هنرهای دستی ، تصمیم‌گرفتند این قالی را طوری تعمیرکنندکه اولاً شکل‌مستطیلی آن باقی‌بماند ، ثانیاً به‌نقش آن لطمه‌ای نخورد، ضمناً حتی یك قطعهٔ‌کوچك‌آن به‌هدر نرود.آنها با یك برش، قالی‌را به دوقطعه تقسیم‌کردند و از دوقطعهٔ‌آن، وبدون‌اینکه چیزی به‌آن‌اضافه‌کنند، قالی‌مستطیلی (که البته مربع‌هم می‌تواند باشد)



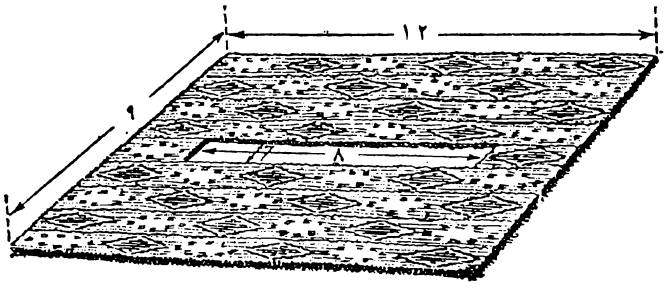
مربوط به‌مسألهٔ ۱۵۹

باهمان نقش درست کردند.

چگونه به‌این کارموفق شدند؟

۱۶۰. پاداش پرارزش

وقتی‌که نودیاساداجهوا، هنوز دوشیزهٔ نوجوانی بود، به‌خاطر ابتکاری‌که درجمع‌آوری پنبه‌کرده بود، یك قالیچهٔ‌کار هنرمندان ترکمن به عنوان



مربوط به‌مسألهٔ ۱۶

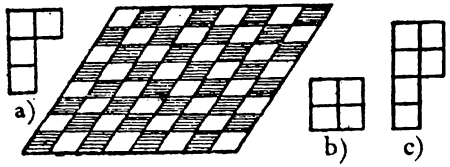
پاداش دریافت کرد . این قالیچه که نخستین جایزه نوبل بود، برای او خیلی ارزش داشت.

نوریا، اکنون در زادگاه خود به‌عنوان مهندس کشاورزی کار می‌کند. البته قالی ترکمن را هنوز نگه داشته وآنرا درآزمایشگاه خودپهن کرده است. یك روز، وقتی که مشغول آزمایشی بود، شیشهٔ پر از اسید، از دستش افتاد و قسمتی از وسط قالیچه را سوخت و درآن سوراخی مستطیلی به‌طول ۸ و عرض ۱ دسیمتر به‌وجودآورد. ولی نوریا، قالیچه را دور نینداخت و با ظرافت، قسمت سالم‌آنرا طوری به‌دوقسمت تقسیم کردکه توانست ازآنها یك قالیچه مربع‌شکل کامل بدست‌آورد. البته در قالیچهٔ یك متر مربعی که بدست آورد ، همان نقش قالیچهٔ اصلی حفظ شده بود.

روش برش اورا پیداکنید.

۱۶۱. نجات ازگرفتاری

آیا مسألهٔ۵۴ را دربارهٔ صفحهٔ شطرنجی‌که قطعه قطعه شده بود، به‌خاطر دارید؟ درآنجا، صفحهٔ شطرنج به۱۴ قسمت شده بود ومی‌بایستی‌ازآنها، صفحهٔ‌کامل شطرنج درست شود. حالاشطرنج‌باز ما تصمیم‌گرفته است‌که هم تعداد وهم شکل‌قسمتهای صفحهٔ شطرنج را تغییردهد. به‌فکر اورسید که صفحهٔ شطرنج‌را به۱۵قسمت‌مساوی به‌شکل Γ (شکل a) ویك‌قسمت مربعی (شکل b)، تقسیم‌کند. ازاین‌زمان، طراح جوان ماآرامش‌خودرا



مربوط به‌مسألهٔ ۱۶۱

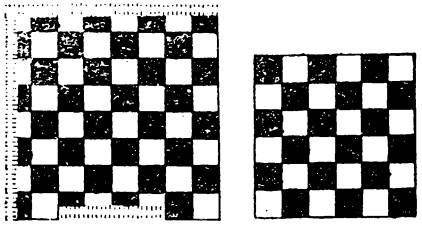
از دست داد و نتوانست راهی برای تقسیم صفحهٔ شطرنج، به قسمتهای موردنظرش پیدا کند. به‌همین‌مناسبت فکر کرد که لابد چنین تقسیمی ممکن نیست و سعی کرد عدم امکان این تقسیم را ثابت کند، ولی دراین کار هم توفیقی پیدا نکرد. باید ازاین گرفتاری نجات پیدا می‌کرد.

به‌شطرنج‌باز ماکمك کنید تا بتواند عدم‌امکان تقسیم موردنظرش را ثابت کند، ضمناً نوع تقسیم‌راعوض کنید وصفحهٔ شطرنج را به ۱۰ شکل مساوی هم، شبیهٔ P (شکل c) ویك‌شکل‌شبیه T (شکل a)، تقسیم کنید.

البته این‌تقسیم هم ساده نیست، ولی‌جواب دارد.

۱۶۲. هدیه به‌مادربزرگ

دختربچه‌ای دوقطعه پارچهٔ شطرنجی ۶۴ خانه‌ای و ۳۶ خانه‌ای داشت و می‌خواست ازآنها یك‌دستمال مربعی، برای هدیه به‌مادربزرگش، درست کند. برای این منظور، باید درمربعی که ساخته می‌شود، تناوب خانه‌های سفیدوسیاه حفظ شود. اشکال کار در اینست که دستمال بزرگتر از دوطرف به‌طورکامل و از یك‌طرف، در قسمتی، منگوله‌دوزی شده‌است(شکل‌را ببینید). ولی اندیشهٔ ساختمانی دختربچه، به‌اوکمك کرد. او هریك از پارچه‌ها را به دوقسمت تقسیم کرد و ازچهار قسمتی که بدست‌آورده بود، دستمال مربعی با ۱۰۰ خانه درست کرد، ضمناً قسمتهای منگوله‌دوزی شدهٔ پارچهٔ بزرگتر، درست درکناره‌های این دستمال قرارگرفت.

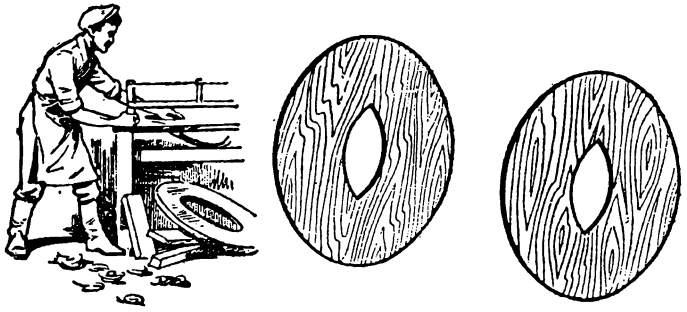


مربوط به‌مسألهٔ ۱۶۲. چگونه می‌توان ازاین دومربع، یك مربع درست کرد؟

روی یك نمونهٔ کاغذی، راه‌حل دختربچه را پیدا کنید.

۱۶۳. مسألهٔ نجار

نجاری دوتختهٔ بیضی‌شکل مساوی ،که هرکدام سوراخ درازی در وسط داشتند، دراختیارداشت (شکل را ببینید) ومی‌خواست ازآنها، تختهٔ‌گرد ویك‌پارچه‌ای برای روی میز بسازد.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۶۳

تخته‌ها، ازنوعی‌چوب‌کمیاب وقیمتی بودند واستادکارمی‌خواست طوری ازآنها استفاده‌کند،که حتی یك تکه‌کوچك هم به‌هدر نرود.

استاد نجار، برای اینکه نسنجیده، تخته‌ها را نبریده باشد ، ابتدا نمونهٔ مقوایی‌آنها را تهیه‌کرد و روی‌آنها راه‌حل مشکل را ، باکمترین تعداد ممکنهٔ برش، پیداکرد.

آیا می‌توانید راه‌حل استادکار را پیداکنید؟

۱۶۴. اشتباه خزدوز

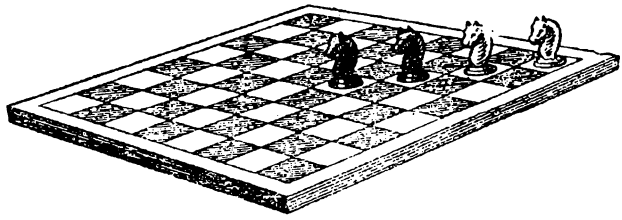
خزدوزی می‌خواست پالتو پوستی راکه سوراخی به‌شکل مثلث مختلف‌الاضلاع داشت، وصله‌کند. او تکه‌ای ازهمین‌نوع خز برید، ولی باکمال تأسف اشتباه‌کرده بود. فقط از طرف پشت می‌شد پوست را در سوراخ پالتو قرار داد. خز خیلی‌گران‌قیمت بود و خزدوز نمی‌خواست آنرا دور

بیندازد. چگونه می‌شود این تکهٔ مثلثی‌شکل را پشت و رو کرد، به‌نحوی که همان شکل لازم بدست‌آید؟

خزدوزمدتی‌فکرکرد ومتوجه شدکه باید این‌تکه خز را درچند جا ببرد وآنها را به‌نحو دیگری به‌هم بدوزد، تاآنرا «پشت ورو» کرده‌باشد. چگونه؟

۱۶۵. هراسبی درجای خودش

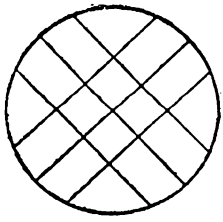
روی شکل، یك صفحهٔ شطرنج با ۴ اسب می‌بینید. می‌خواهیم صفحه را به‌چهارقسمت‌مساوی وهم‌شکل‌تقسیم کنیم، به‌نحوی‌که درهرکدام ازآنها، یکی از اسبها قرارگرفته باشد.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۶۵

۱۶۶. بازهم بیشتر

می‌خواهیم به‌کمك شش‌خط راست، سطح یـك دایره را به حداکثر تعداد قطعه‌هاتقسیم کنیم. درشکلی‌که رسم شده‌است، سطح دایره به‌کمك ۶ خط راست، به ۱۶ قسمت شده است، ولـی‌این، حد تعداد تقسیمها نیست. می‌توان ثابت‌کردکه حدتعداد تقسیمها، ازرابطهٔ $\frac{n^2+n+2}{2}$ بدست می‌آید، که درآن n عبارتست

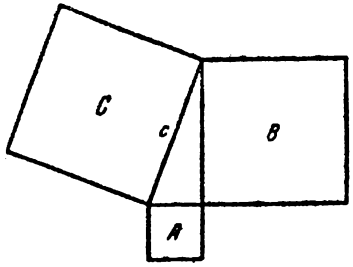


مربوط به‌مسألهٔ ۱۶۶

از تعداد خطهای راست[1]. برای حل مسأله ، سعی کنید در وضع استقرار خطهای راست، تقارن را حفظ کنید.

۱۶۷. تبدیل چندضلعی به‌مربع

آیا می‌توان دومربع دلخواه را، به‌یك‌مربع‌تبدیل کرد؟ این‌پرسش‌به‌معنای آنست که اگر دومربع دلخواه داشته باشیم، آیا می‌توان روشی برای بریدن‌آنها پیداکرد، به‌نحوی که‌از تکه‌های‌آنهابتوان یك مربع‌درست کرد؟



مربوط به‌مسألهٔ ۱۶۷

نخستین راه‌حل عمومی‌این مسأله، بنام فیثاغورث،ریاضیدان یونان قدیم(سدهٔششم‌پیش‌ازمیلاد)، ثبت شده‌است،اما روی مسأله‌های مربوط به‌تبدیل یك شکل‌به‌شکل‌دیگر، ریاضیدانهای هندی هم‌کارکرده‌اند (به‌مناسبت پیشرفتی که در صنایع دستی در هند قدیم‌کرده بودند)،که مربوط به هزار یاهزار و پانصد سال پیش از فیثاغورث است.

---

۱. در توپولوژی (مکان‌شناسی ـ بخشی از ریاضیات عالی) ثابت می‌شودکه n نقطه، یك خط راست را، حداکثر به

$$C_n^1+C_n^0=n+1$$

قسمت؛ n خط راست، یك صفحه را، حداکثر به

$$C_n^2+C_n^1+C_n^0=\frac{n^2+n+2}{2}$$

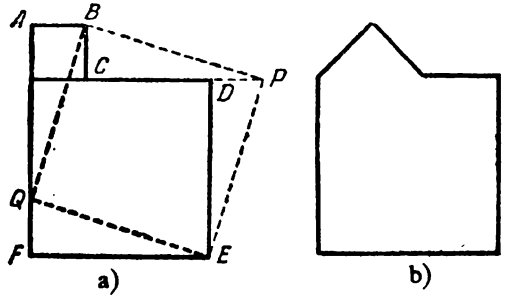
قسمت؛ n صفحه، یك فضای سه‌بعدی را، حداکثر به

$$C_n^3+C_n^2+C_n^1+C_n^0=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

قسمت وغیره، تقسیم می‌کنند.

این مطلب جالب است که با در دست داشتن دو مربع، از قبل بتوانیم مربع سوم را بسازیم، به نحوی که بتوان دو مربع اول را در آن «جاداد». برای این منظور، دو مربع مفروض A و B را طوری قرار می‌دهیم، که یك ضلع اولی در امتداد یك ضلع دیگری قرار گیرد، سپس دو راس این مربعها را، آنطور که در شکل صفحهٔ ۱۳۷ می‌بینید، به‌وسیلهٔ خط راست c به‌هم وصل می‌کنیم. به‌این ترتیب، مثلث قائم‌الزاویه‌ای بدست می‌آید. حالا اگر مربع C را روی ضلع c (وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که به‌وجود آمده است) بسازیم، همان مربعی است که می‌تواند از قطعه‌های دو مربع مفروض بدست آید.

ولی دو مربع مفروض را چگونه تقسیم کنیم؟ از دو هزار و پانصد سالی که اززمان فیثاغورث می‌گذرد، روشهای زیادی برای حل این مسأله فکر کرده‌اند. یکی ازاین راه‌حلها را، که هم ساده و هم زیباست، دراینجا می‌آوریم.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۶۷

دو مربع را به‌صورت شکل ABCDEF قرار می‌دهیم (شکل a). روی ضلع FA، پاره‌خط FQ را مساوی AB جدا می‌کنیم و شکل را روی خطهای راست EQ وBQ جدا می‌کنیم. مثلث BAQ را در وضع BCP ، و مثلث EFQ را در وضع EDP قرار می‌دهیم؛ مربع EQBP

بدست می‌آید که شامل همهٔ قسمتهای دومربع مفروض است. طول ضلع این مربع برابر است با طول وتر EQ از مثلث قائم‌الزاویهٔ EFQ ، که دوضلع پهلوی زاویهٔ قائمهٔ آن - EF و FQ - همان ضلعهای مربعهای مفروض است.

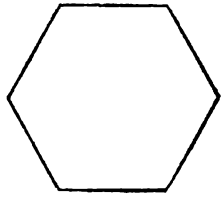
با اطلاع مختصری ازهندسه، می‌توان به‌سادگی تساوی مثلثهای BAQ، BCP، EFQ و EDP، و همچنین مربع‌بودن EQBP را ثابت کرد. واین درحقیقت، راه دیگری برای اثبات قضیهٔ فیثاغورث است.

حالا، روی‌کاغذ خود ، شکلی رسم‌کنیدکه از پهلوی هم‌گذاشتن یك مربع ویك مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین بدست‌آمده‌است (شکل b -صفحهٔ ۱۳۸) . این شکل را تنها به سه‌قسمت، طوری تقسیم‌کنیدکه بتوان ازآنهایك مربع ساخت.

۱۶۸. تبدیل یك شش‌ضلعی منتظم به‌مثلث متساوی‌الاضلاع

مسأله‌های هندسی مربوط به‌تشکیل یك شکل، به‌کمك تکه‌های یك شکل دیگر، هم مورد علاقه ریاضیدانهاست و هم به‌کار طـراحان و معماران می‌آید، به‌همین‌مناسبت سرگرمی جالب چند هزارسالهٔ ریاضیدانهاست.

برای تبدیل‌یك شکل به‌دیگری، ازراه تقسیم شکل اول وقراردادن قسمتهای‌آن به‌نحو دیگری درکنارهم، راه‌حلهای‌کلی وجود دارد، ولی استفادهٔ از ایـن راه‌حلهای‌کلی، اغلب درعمل، مفصل ونامطبوع است.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۶۸

همیشه این موضوع جـالب است ،کـه بتوانیم شکل مفروض‌را به‌کمترین تعدادممکن، تقسیم‌کنیم؛ ولی رسیدن به این هدف هم ساده نیست وبه‌تجربه وتیزهوشی نیاز دارد.

مثلاً، بهترین راه تقسیم یك شش‌ضلعی منتظم، به‌کمك خطهای راست، برای تبدیل آن به‌یك مثلث متساوی‌الاضلاع، کدام است؟

برای‌این‌مسأله،چند راه‌حل وجوددارد‌که درهرحال بایدشش‌ضلعی را تنها به۶ قسمت، تقسیم کرد. این راه‌حل را پیداکنید.

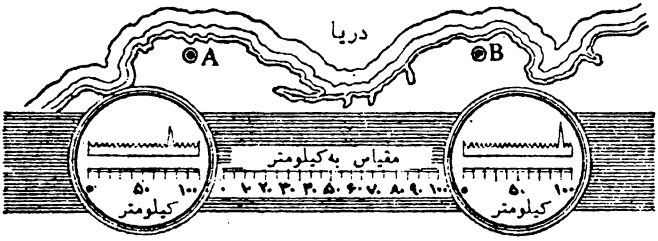
تا حالا،کسی نتوانسته است باتقسیم شش‌ضلعی به ۵ قسمت،آنرا به‌مثلث متساوی‌الاضلاع‌تبدیل‌کند، ولی‌کسی‌هم نتوانسته‌است‌عدم‌امکان این تقسیم را ثابت‌کند.

بخش پنجم

هرهنری زمانی به‌کار می‌آید

۱۶۹. هدف کجاست؟

درشکل،طرح‌صفحهٔ دوایستگاه رادار به‌صورت دایره‌هایی داده شده‌است. روی صفحهٔ رادار خط موج‌داری،مثل دندانه‌های یك اره، روشن است و زیرآن، اندازهٔ فاصله‌ها قرارگرفته است.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۶۹. کشتی کجاست؟

ازایستگاه، امواج رادیوئی فرستاده می‌شود. دراین‌حالت، صفحهٔ رادار، صفر را نشان می‌دهد. بعدازمدتی، امواج رادیوئی پس‌از برخورد به هدف (ومثلاً یك کشتی در دریا) برمی‌گردد و به ایستگاه می‌رسد.

دراین‌موقع، روی صفحهٔ رادار، روشنائی باریك و بلندی ظاهر می‌شود. دراین‌مدت، موج دوبار فاصلهٔ بین‌ایستگاه وهدف را پیموده است.ولی، مقیاسی‌که روی صفحهٔ رادار نوشته شده، طوری تنظیم شده‌است‌که عدد زیرخط باریك وبلند روشن، درست فاصلهٔ ایستگاه تا هدف را نشان می‌دهد. صفحهٔ سمت چپ مربوط به راداری‌است‌که درنقطهٔ ساحلی A قرار گرفته، و صفحهٔ سمت راست مربوط به راداری است‌که در نقطهٔ ساحلی B قرارگرفته است.

فرض می‌کنیم‌که هردوصفحه دریك‌زمان‌فاصلهٔ ایستگاه خودرا تا هدفی در دریا نشان دهند. فاصله‌ها را روی شکل بخوانید وسپس جای هدف را در دریا پیداکنید.

۱۷۰. پنج دقیقه فکرکنید

یك مکعب چوبی به‌ضلع ۳ دسیمتر درنظر بگیرید وتمام سطحهای‌جانبی آنرا به‌رنگ سیاه درآورید. به‌پرسشهای زیر پاسخ دهید:

۱. چند برش باید داد تا مکعب مفروض، به‌مکعبهای به ضلع ۱ دسیمترتقسیم شود؟

۲. چند مکعب‌کوچك بدست می‌آید؟

۳. چند مکعب بدست می‌آیدکه چهاروجه‌آن رنگی باشد؟

۴. چند مکعب با سه وجه رنگی بدست می‌آید؟

۵. چند مکعب با دو وجه رنگی بدست می‌آید؟

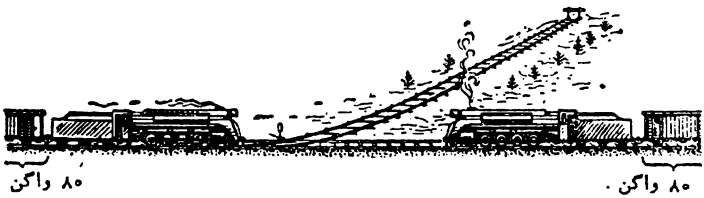
۶. چند مکعب با یك وجه رنگی بدست می‌آید؟

۷. چند مکعب بدون رنگ بدست می‌آید؟

۱۷۱. برخورد پیش‌بینی‌نشده

دوقطارکه هرکدام ۸۰ واگن دارند، دریك مسیر یك‌خطی به‌هم رسیدند؛

درنقطهٔ برخورد، تنها یك خط فرعی کوتاه بن‌بست وجود دارد (شکل را ببینید).

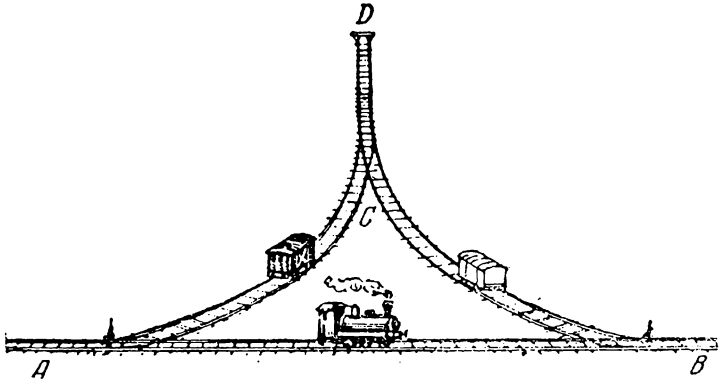


مربوط به‌مسألهٔ ۱۷۱. چگونه قطارها ازکنارهم رد شوند؟

اگر در رشتهٔ بن‌بست فرعی، تنها ۴۰ واگن ویك لکوموتیو بتواند جابگیرد، به‌چه‌ترتیب می‌توان قطارها را ازکنارهم عبورداد؟

۱۷۲. مسیر مثلثی

AB ، مسیر اصلی راه‌آهن و AD و BD، رشته‌های کوتاه و فرعی راه‌آهن، یك مسیر مثلثی تشکیل داده‌اند (شکل را ببینید). اگر دودکش لکوموتیوی که درمسیر اصلی AB قرارگرفته است، به‌طرف راست‌باشد، بعدازآنکه مسیرمثلثی را دوربزند، ودوباره روی مسیر AB قرارگیرد، دودکش‌آن به‌طرف چپ خواهد بود.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۷۲

کافی است خواننده به شکل نگاه‌کند تا متوجه شودکـه چگونه می‌توان دودکش لکوموتیو را به‌طرف راست برگرداند (برای این‌منظور فرض‌کنیدکـه واگن‌ها روی خطهای فرعی نیستند)، ولی حالا ، مسألهٔ دیگری در مقابل لکوموتیوران ما قرارگرفته است . او مـی‌خواهد جای واگنهارا درخطهای AD و BD عوض‌کند: واگن سفیدی‌که روی BD قرارگرفته است به AD ، و واگن قرمزی‌که روی AD قرارگرفته‌است به BD منتقل شود، وسپس لکوموتیو هم به‌جای اولیهٔ خود برگردد.

در بن‌بست D ، تنها یك واگن یا یك لکوموتیو می‌توان جاداد.

اگر هروصل‌کردن و هرجداکردن را، یك حرکت به‌حساب‌آورید، لکوموتیوران توانست، مسألهٔ خود را در ۱۰ حرکت حل‌کند، ولی شما می‌توانیدآنرا با ۶ حرکت حل‌کنید (هل‌دادن واگن، ۲ حرکت به‌حساب می‌آید، زیرا هم‌ارز بایك بستن ویك جداکردن است).

۱۷۳. آیا می‌توانید تقسیم‌کنید؟

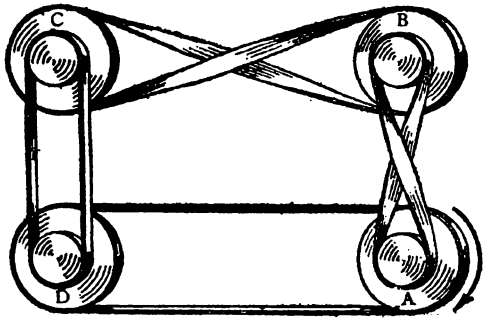
دریك‌کیسه، ۹کیلوگرم‌گندم داریم.آیا می‌توانید به‌کمك دو وزنه۵۰ و ۲۰۰گرمی ،گندمها را در دو پاکت بریزیدکـه دریکی ۲کیلوگرم و در دیگری ۷کیلوگرم باشد. ضمناً تنها سه‌بار باید وزن‌کرد.

۱۷۴. دستگاه انتقال

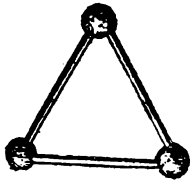
چرخ قرقره‌های A،B،C وD با دستگاههای انتقال، آنطورکـه در شکل صفحهٔ ۱۴۵دیده می‌شود، به‌هم مربوط شده‌اند. اگر، بااین روش اتصال، حرکت هرچهارقرقره ممکن‌باشد،وقتی‌که A درجهت‌مشخص‌شده، حرکت کند، هرکدام ازچرخهای دیگر درچه‌جهتی حرکت می‌کنند؟

اگر هرچهار تسمهٔ اتصال، به صورت متقاطع باشند ، مثلاً شبیه تسمه‌ای‌که A و B را به‌هم وصل‌کرده است،آیا حرکت ممکن است؟اگر

فقط یکی یا سه‌تا ازتسمه‌ها به‌صورت متقاطع باشند، چطور؟



مربوط به‌مسألهٔ ۱۷۴



مربوط به‌مسألهٔ ۱۷۵

۱۷۵. هفت مثلث

سه چوب‌کبریت را در سه‌گلولهٔ کوچك مومی فروکرده‌ایم ویك مثلث متساوی‌الاضلاع‌بدست آورده‌ایم (شکل را ببینید).

آیا می‌توان به‌این‌ترتیب ، به‌کمك ۹ چوب‌کبریت ، ۷ مثلث متساوی‌الاضلاع درست‌کرد؟

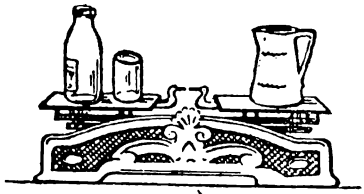
۱۷۶. پردهٔ نقاشی

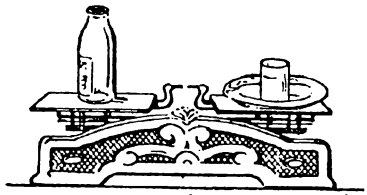
دوست نقاشم، مرا مطمئن می‌کرد که اندازه‌های پردهٔ نقاشی اوچنانست‌که عدد مساحت‌آن باعدد محیط‌آن برابر می‌شود. من، بدون‌آنکه دراین‌باره با او وارد بحث شوم،کوشش‌کردم مستطیلی را پیداکنم‌که عددمساحت آن، با عدد محیطش برابرباشد (آزمایش را تنها روی عددهای صحیح، انجام دادم).

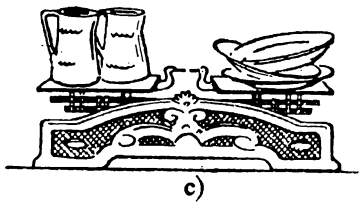
این، مسألهٔ خیلی‌ساده‌ای نیست ویکی از دانش‌آموزان دخترسال ششم (اول متوسطه) درشهر ۱۱ژنی‌کیدزه ، راه‌حل‌ظریفی برای‌آن پیداکرده

است. این دختر، ضمناً ثابت کرد که تنها دو مستطیل وجود دارد که در شرطهای مسأله، صدق می‌کند.

آیا می‌توانید راه‌حل این دختر یازده ساله را پیدا کنید و یا لااقل در ذهن‌خود، جوابهای مسأله را بدست‌آورید؟







مربوط به‌مسأله ۱۷۷

۱۷۷. وزن بطری چقدر است؟

درکفهٔ چپ ترازو، بطری و لیوان و درکفهٔ راست آن پارچ‌آب قرار گرفته است. در این‌حالت ترازو میزان است (شکل a).

لیوان را ازکفهٔ سمت چپ برمی‌داریم و درکفهٔ سمت راست می‌گذاریم وپارچ را هم با بشقاب عوض می‌کنیم، دوباره ترازو میزان می‌شود (شکل b).

ازکفهٔ سمت چپ بطری را برمی‌داریم و به‌جای آن دو پارچ می‌گذاریم، درکفهٔ سمت‌راست‌هم، جای لیوان را با دوبشقاب عوض می‌کنیم (شکل c). معلوم می‌شودکه وزن۲پارچ با وزن۳ بشقاب برابر است.

وزن بطری چندبرابر وزن لیوان است؟

۱۷۸. مکعبهای چوبی

استادکاری‌که برای‌بچه‌ها،اسباب‌بازی چوبی می‌ساخت،تعدادی‌مکعبهای

چوبی هم‌شکل درست‌کرد، تا آنها را برای بازی با حرفها ورقمهاآماده کند. ولی دیدکه سطح‌کلی همهٔ مکعبها ، برای‌کار اوکافی نیست وبه مساحتی دوبرابرآن احتیاج داشت.

استادکار چگونه می‌تواند مساحت وجه‌ها را دوبرابرکند ، بدون اینکه مکعب تازه‌ای بسازد؟

۱۷۹. شیشهٔ پر از ساچمه

یکروز، درساختمان‌کاریزی‌که ازبیابانها عبور می‌کرد، لازم شدکه فوراً یـك صفحهٔ سربی، بـا حجم معینی‌آماده شود . درکارگاه سفری، سرب نداشتیم؛ به‌همین‌مناسبت تصمیم‌گرفتیم ساچمه‌های شکار را ذوب‌کنیم. ما یك‌ظرف شیشه‌ای‌مدرجی دراختیارداشتیم.ساچمه‌ها را درظرف‌ریختیم وآنرا پرکردیم.

ولی،آیا این‌ساچمه‌ها،برای حجم‌موردنظرصفحه‌ای‌که لازم داریم، کافی است؟آخرساچمه‌که‌آب نیست و با ظرف مدرج نمی‌توان‌حجم‌آنرا پیداکرد. پس چگونه حجم این‌ساچمه‌ها را معین‌کنیم؟

یك‌نفرپیشنهادکردکه حجم یك‌ساچمه را بنابرقاعدهٔ محاسبهٔ حجم کره، پیداکنیم و سپس تعداد ساچمه‌ها را هم بشماریم. واین‌کار مشکل وطولانی بود، علاوه‌برآن، اندازهٔ ساچمه‌ها هم یکی نبود.

اگرجسم یکنواخت باشد(یعنی ازیك ماده ساخته شده باشد)،حجم آنرا می‌توان ازتقسیم وزن بروزن مخصوص‌آن پیداکرد، ولی هیچکدام ازما، وزن مخصوص‌سرب را به‌خاطرنداشت،کتاب راهنمایی‌هم‌دراختیار نداشتیم.

با وجود همهٔ اینها، ما توانستیم به‌سرعت و دقت حجم ساچمه‌ها را پیداکنیم، ضمناً تمام محاسبهٔ ما.عبارت ازیك عمل‌بود ـ عمل‌تفریق.

روش کارما چگونه بوده است؟

۱۸۰. گروهبان کجا رفته است؟

گروهبان، برای اجرای دستور فرمانده، از نقطهٔ M ،که درآنجا بودند، باسمت ۳۳۰ درجه خارج شد[۱]. بعدازآنکه به‌انتهای آبادی رسید، باسمت ۳۰درجه راه خودرا ادامه داد تا به‌آخرین درخت رسید. ازآنجا به‌اندازهٔ ۶۰ درجه به طرف راست پیچید. در این‌جهت پیش رفت تا به‌پل رسید، آن‌وقت در ساحل رودخانه، با سمت ۱۵۰ درجه حرکت‌کرد. نیم‌ساعت دراین‌جهت حرکت‌کرد تا به‌آسیا رسید و دوباره جهت خودرا عوض‌کرد و با سمت ۲۱۰ درجه جلورفت تا به‌طرف خانه آسیابان برسد. وقتی‌که به‌خانهٔ‌آسیابان رسید، بازهم به‌راست پیچید و با سمت۲۷۰درجه حرکت کرد تا درست به‌جای اول خود برگردد.

بااستفاده ازنقاله، با دقت مسیرگروهبان را روی‌کاغذ خود رسم کنید ومعلوم‌کنیدکه به‌کجاها رفته است، به‌شرطی‌که بدانیم درهرسمت ۲/۵کیلومتر حرکت‌کرده باشد.

۱۸۱. گرفتاری پیش‌بینی‌نشده

روزی از چاپایف پرسیدند که آیا پیروزیهای جنگی او، تصادفی نبوده است. چاپایف جواب داد: «البته‌که نه، تصادف همیشه و همه‌جا وجود دارد، ولی باید فکرکرد... بایدآنرا جستجوکرد...».

در واقع، تصادف، مبنای‌کاملاً نامطمئنی برای موفقیت، در فعالیتهای ماست. مثلاً، وقتی‌که به بازی شطرنج مشغولیم، بسیار پیش

---

۱. با سمت یك زاویهٔ مشخص، در روی زمین یا دریا، به‌معنای‌آنست‌که ازخط شمالی به اندازهٔ این زاویه در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخیم و درآن جهت حرکت‌کنیم .م.

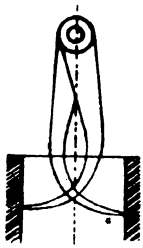
می‌آیدکه به‌نظر می‌رسد در وضع بن‌بستی، گرفتار شده‌ایم. ولی تنها با پافشاری واندیشه می‌توان خودرا ازچنین وضعی نجات داد...

دانش‌آموزی می‌خواست چیزی به شکل استوانه بسازدکه در دو قاعدهٔ آن فرورفتگی‌هایی باشد (شکل‌را ببینید). برای‌اندازه‌گیری عمق‌فرورفتگی‌ها، درچنین‌مواردی از اسباب خاصی استفاده می‌کنند که متأسفانه دراختیار دانش‌آموز ما نبود. او فقط یك پرگار سرکج و یك خط‌کش مدرج داشت[1]. ولی وقتی‌که دانش‌آموز خواست عمق استوانه‌را به‌کمك پرگار سرکج، پیداکند، به‌مشکلی برخوردکه پیش‌بینی نکرده بود، برای اینکه فاصلهٔ بین‌عمیق‌ترین‌نقطه‌های فرورفتگی دوطرف را، درامتداد محور استوانه، پیداکند، لازم‌بودکه پرگارکج را ازاستوانه جداکند(یعنی‌سوزنهای پرگار راکه ازدوطرف داخل فرورفتگی‌ها بودند، از آنها خارج‌کند) و سپس به‌کمك خط‌کش مدرج، فاصلهٔ بین دو نوك سوزنهای آنرا اندازه بگیرد. ولی این عمل را به‌چه‌ترتیب انجام دهد؟ آخر، اگربخواهد پرگار سرکج را از استوانه جداکند، ناچاراست وضع سوزنهای پرگاررا به‌هم بزندکه درنتیجه‌نمی‌تواند به‌نتیجه‌مطلوب‌برسد.

مربوط به مسأله ۱۸۱. اندازه‌گیری عمق فرورفتگی

---

۱. پرگار سرکج، وسیله‌ای شبیه شکل مقابل است، که برای اندازه‌گیری فاصله‌های خطی به‌کارمی‌رود. درمورد اندازه‌گیری‌که درمسأله مطرح است، باید دهانهٔ پرگار را بازکرد و هرکدام از لبه‌های‌کج آنرا داخل یکی از فرورفتگی‌هاکرد. «م.»



کتابخانه مجازی ریاضیات

۱۸۲. داستان دانش‌آموز مدرسه صنعتی

ما درمدرسهٔ صنعتی، با ساختمان دستگاهها و ماشینها آشنا می‌شویم و روش استفاده از ابزارها را یاد می‌گیریم، تا درموقعیتهای دشوار، دست وپای خودرا گم نکنیم. البته درهمهٔ این موارد، دانشی‌که در دبیرستان آموخته‌ایم، به‌ماکمك می‌کند.

یك روز، استادکار، قطعه‌سیمی به‌من داد وپرسید:

ـ قطر این‌سیم را چطور اندازه می‌گیرند؟

ـ روشن است‌که با میکرومتر.

ـ ولی اگر میکرومتر در دسترس نباشد، چطوربایداندازه‌گرفت؟

من در بارهٔ این مطلب، ازکسی نپرسیدم و خودم در بارهٔ آن فکر کردم. من اینگونه مسأله‌ها را دوست دارم!

آیا شما می‌توانید حدس بزنیدکه من چگونه توانستم قطر مقطع سیم را اندازه بگیرم؟

دفعه بعد، وضع عجیب‌تری پیش‌آمد. ازمن‌خواسته شدکه درصفحهٔ آهن شیروانی‌که ضخامتی درحدود یك‌ونیم تا دومیلیمتر داشت، سوراخ گردی به‌وجود آورم. من پرسیدم‌که آیا متهای در اختیار داریم؟ ولی استادکارجواب داد، تنها بایك چکش ویك‌سوهان مسطح می‌توانی‌مسأله را حل‌کنی.

واین مسأله‌ای بودکه من خودم نتوانستم‌آنرا حل‌کنم.

آیا شما می‌توانید راه‌حل‌آنرا برای من پیداکنید؟

۱۸۳. آیا می‌توان ۱۰۰٪ صرفه‌جوئی‌کرد؟

کسی ازسه‌اختراع اطلاع داشت: یکی‌ازآنها۳۰٪ درسوخت صرفه‌جویی می‌کرد، دیگری ۴۵٪ و سومی ۲۵٪. او تصمیم‌گرفت از هرسه‌اختراع

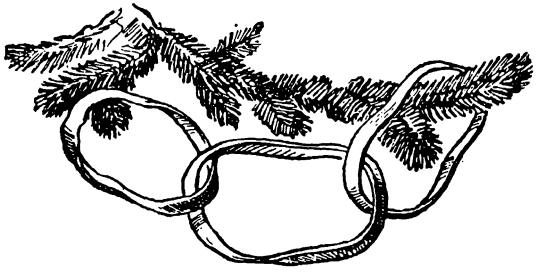
باهم استفاده‌کند ودرنتیجه ۲۵ + ۴۵ + ۳۰، یعنی‌صددرصد، صرفه‌جوئی درسوخت داشته باشد . ولـی آیا واقعاً اینطور است ؟ او در واقع چقدر صرفه‌جویی درسوخت بدست می‌آورد؟

۱۸۴. نیروسنجهای فنری

چند نیروسنج فنری داریم. هرکدام ازآنها،حداکثر می‌تواند ۵ کیلوگرم وزن را تحمل‌کند. چگونه می‌توان ، با استفاده از همین نیروسنجها ، تیرچوبی راکه به‌نظر۱۵ تا ۲۰ کیلوگرم است، وزن‌کرد؟

۱۸۵. اندیشهٔ طراحی

مسألهٔ ۱. چگونه می‌توان‌یك زنجیرسه‌حلقه‌ای ازنوار درست‌کرد، به نحوی‌که با پاره‌کردن هرحلقهٔ دلخواه ، هرسه حلقه ازهم جـدا شود؟ وصل سه حلقهٔ نوار به یکدیگر، به‌صورت عادی،آن‌طورکه درشکل دیده



مربوط به‌مسألهٔ ۱۸۵

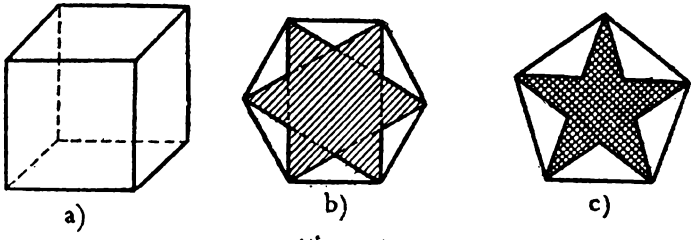
می‌شود،شرطهای‌مسأله‌را تأمین نمی‌کند،زیرا تنها باپاره‌کردن نوار وسط می‌توان سه‌حلقه را ازهم جداکرد، واگریکی‌ازدونوار دیگررا پاره‌کنیم، سه‌حلقه ازهم جدا نمی‌شود.

مسألهٔ ۲. چگونه می‌توان باپنج‌نوار، یك زنجیرپنج‌حلقه‌ای‌درست کرد، به‌نحوی‌که با پاره‌کردن یکی از نوارها، پنج‌حلقه ازهم جدا شود؟

مسألهٔ ۳. ازپنج‌نوار، زنجیری باپنج حلقه درست کنید که باپاره کردن هرحلقهٔ دلخواه، بتوان پنج حلقه را ازهم جداکرد.

۱۸۶. عدم موفقیت میشا

میشا گراسیموف تماشا می‌کرد: ایگور، برادر بزرگترش، یك مکعب‌چوبی برداشت و طوری آنرا اره‌کردکه در مقطع، یك شش‌ضلعی منتظم بدست آورد(شکلهای a و b)، سپس با مداد رأسهای این شش‌ضلعی را یك‌درمیان به‌هم وصل‌کرد ویك شش‌ضلعی ستاره‌ای بدست‌آورد.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۸۶

آن‌وقت، ایگور درمثلثهایی که بین ضلعهای ستاره قرارگرفته بودند (مثلثهایی که درشکل b ، هاشور نخورده است)، با چاقو، قشرنازکی از چوب را برید، سپس روی ستاره ، یك صفحهٔ نایلونی چسباند و با دقت آنرا در دورهٔ ستاره برید وگفت:

ـ مهر آماده شد.

میشا خیلی خوشش‌آمد و تصمیم‌گرفت، به عنوان نقاش روزنامهٔ دیواری کلاس خودش، مهری به‌همین‌صورت، منتهی به‌صورت یك‌ستارهٔ پنج‌پر، داشته باشد.

او می‌دانست که ستارهٔ پنج‌پر را هم می‌توان با همین روش ازیك پنج‌ضلعی منتظم بدست‌آورد (شکل c). به‌این‌منظور، مکعبی برداشت و

کوشش کرد آنرا طوری ببرد که درمقطع، یك پنج‌ضلعی منتظم بدست‌آورد. ولی میشا به‌این کار موفق شد.

او توانست راههایی پیدا کند که با یك برش، مثلث متساوی‌الاضلاع بدست‌آورد (آنهم به‌طریقه‌های مختلف و باندازه‌های مختلف)، همچنین توانست مربع یا شش‌ضلعی منتظم درمقطع بدست‌آورد (که البته همیشه یك‌نوع مربع یا شش‌ضلعی بدست می‌آمد)، ولی حتی یك پنج ضلعی هم نتوانست بدست‌آورد.

میشا، مدتها تلاش کرد، همهٔ مکعبهائی را که در اختیار داشت مصرف کرد، ولی بالاخره نفهمید که آیا او نمی‌تواند روش برش مکعب را پیدا کند، یا اصولاً راهی برای برش یك مکعب به وسیلهٔ یك صفحه وجود ندارد که درمقطع یك پنج‌ضلعی منتظم بدست‌آید؟

و همهٔ این عدم موفقیت در پاسخ به‌این پرسشها برای این بود که میشا گراسیموف هنوز خیلی هندسه نخوانده بود و آنچه را که از هندسه لازم داشت، نمی‌دانست.

باید به‌میشا کمك کرد تا بتواند به‌این پرسشها، پاسخ دهد:

۱. آیا می‌توان ازمقطع یك مکعب، به‌وسیلهٔ یك صفحه، یك پنج ضلعی منتظم بدست‌آورد؟

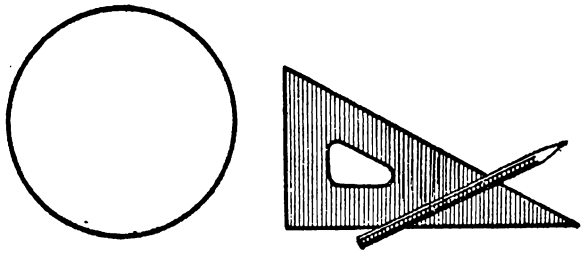
۲. چگونه باید مربع‌را برید تادرمقطع، یك‌مثلث‌متساوی‌الاضلاع، یا یك شش‌ضلعی منتظم بدست‌آید؟

۳. آیا می‌توان با برش مکعب به‌وسیلهٔ یك صفحه، چندضلعی منتظمی که بیش‌از۶ضلع داشته‌باشد، بدست‌آورد؟

۱۸۷. مرکز دایره را پیدا کنید

چگونه می‌توان مرکز دایره‌ای را که روی کاغذ رسم شده است (شکل را

ببینید)، تنها به‌کمك یك‌گونیا ویك مداد پیداکرد (گونیا، تقسیم‌بندی ندارد ومداد هم تنها برای رسم‌خط به‌کار می‌رود)؟



مربوط به‌مسألهٔ ۱۸۷. مرکز دایره را پیداکنید.

۱۸۸. کدام‌جعبه سنگین‌تر است؟

دوجعبهٔ مکعب‌شکل‌مساوی داریم‌که پرازگلوله‌اند. درجعبهٔ اول۲۷گلولهٔ مساوی‌بزرگ، ودردومی۶۴گلولهٔ مساوی‌کوچکترقراردارد. همهٔ‌گلوله‌ها ازیك ماده درست شده‌اند.

فرض می‌کنیم‌که درهردوجعبه، گلوله‌هارا ازپائین تابالا، تنگ‌هم چیده باشند، به‌نحوی‌که درهرردیف به‌یك تعدادگلوله باشد وکناره‌های گلوله‌های هرردیف چسبیده به دیوارهٔ جعبه باشد ، و اگر در جعبه‌ها را هم بگذاریم، سطح در، برگلوله‌های ردیف بالا مماس شود.

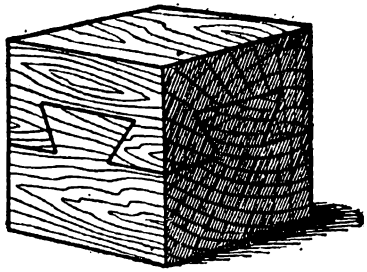
کدام‌جعبه سنگین‌تر است؟

برای اینکه خودتان حل‌کنید. فرض کنید در جعبه‌ها به تعداد دیگری‌گلوله باشد، مثلاً ۸و۲۷، یا۶۴ و۱۲۵، یا ۶۴ و۳۴۳، یا ۲۱۶ و ۷۲۹ و... کدام‌جعبه سنگین‌تر است؟

باحل این مسأله‌های خاص، چه‌نتیجهٔ‌کلی می‌گیرید؟ درستی این نتیجه را ثابت‌کنید.

۱۸۹. مهارت نجار

دانش‌آموزان مدرسهٔ حرفه‌ای، درنمایشگاه کارهای نجارهای‌جوان، مکعب چوبی شگفتی‌آوری به ما نشان دادند. این مکعب، از دوقسمت تشکیل‌شده بودکه به‌کمك دندانه‌هایی از چهارطرف، به‌هم محکم شده بود (شکل را ببینید). قسمتهای مکعب به‌هم‌چسب‌نخورده بود وروشن بودکه قابل بازکردن است. ولی چطور؟



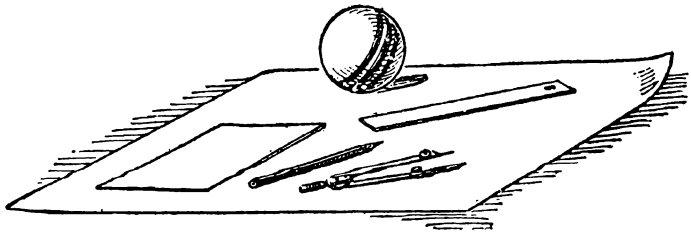
مربوط به‌مسألهٔ ۱۸۹. رمزمکعب

ماآنرا به‌بالا، به‌پائین، به‌چپ، به‌راست، به‌جلو و به‌عقب کشیدیم، ولی بالاخره نتوانستیم آنرا بازکنیم.

آیا شما می‌توانید راهی برای جداکردن قسمتهای مکعب نشان دهید، وضمناً بگوییدکه هرقسمت چه‌شکلی دارد؟

۱۹۰. هندسه روی‌کره

هرکسی‌که هندسه خوانده‌باشد، باحل‌مسأله‌های ساختمانی، به‌کمك پرگار و خط‌کش، یعنی رسم قوس دایره و خط راست، آشناست. ضمناً همهٔ



مربوط به‌مسألهٔ ۱۹۰. پاره‌خطی رسم‌کنیدکه مساوی قطرکره باشد.

ساختمانهای لازم، معمولاً روی صفحه کاغذ یا تخته‌سیاه انجام می‌گیرد.

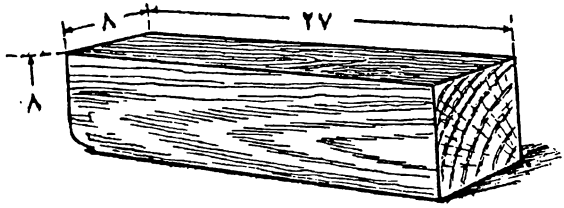
ولی آیا با حل‌مسأله‌هایی ازهندسه هم، که منجربه‌رسم شکل روی یك سطح منحنی، ومثلاً سطح یك کرهٔ واقعی می‌شود، آشنا هستید؟

مثلاً، بااین روش می‌توان قطر کرهٔ واقعی مفروض را، بااستفاده از پرگار وخط‌کش، بدست‌آورد.

کره‌ای، و مثلاً توپ پینگ‌پونگ را روی میز بگذارید، صفحهٔ کاغذ، پرگار وخط‌کش بدون‌تقسیم‌بندی ویك مداد بردارید وفکر کنید که چگونه می‌توان روی کاغذ پاره‌خطی رسم کرد که برابر با قطر کره باشد.

۱۹۱. آیا فکر زیادی لازم است؟

یك قطعه چوب به‌شکل مکعب‌مستطیل و بابعدهای ۸سانتیمتر، ۸سانتیمتر و ۲۷ سانتیمتر در دست است (شکل را ببینید). می‌خواهیم آنرا با اره مویی به۴قسمت چنان تقسیم کنیم که بتوان ازآنها یك مکعب ساخت.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۹۱

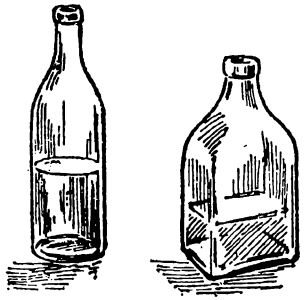
البته، لزومی ندارد که چوبی‌تهیه کنید وآنرا ببرید، کافی است که طرح بریدن‌آنرا روی کاغذ رسم کنید. به‌خاطرداشته‌باشید که برای حل‌این مسأله، باید تصورفضایی خوبی داشته باشید.

۱۹۲. شرطهای دشوار

می‌خواهیم، تنها با استفاده از یك خط‌کش مدرج، حجم یك بطری را (که

ته‌آن به‌شکل دایره، مربع یا مستطیل است) پیدا کنیم. قسمتی از بطری با آب پرشده است. کف بطری را مسطح فرض می‌کنیم. نه‌می‌توانیم به‌آب بطری اضافه‌کنیم و نه حق داریم از آب‌بطری، بیرون بریزیم.

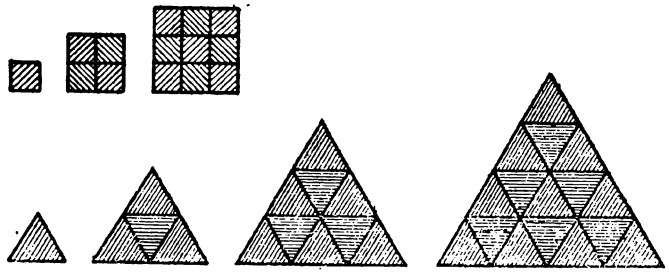
شرطهای دشواری‌است! ولی راه‌حل دشوار نیست، تنها کمی ابتکار می‌خواهد.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۹۲. حجم بطریها را پیداکنید

۱۹۳. اجتماع چندضلعی‌ها

امروزه می‌توانند یك خانهٔ کامل را به‌کمك قطعه‌های آماده‌ای (بلوکها)، که از قبل و درکارخانه آماده شده است، بسازند. ما هم می‌خواهیم ساختمانهای هندسی مشابهی راآماده‌کنیم، با این تفاوت‌که «بلوکهای»



مربوط به‌مسألهٔ ۱۹۳. از مربع ومثلث می‌توان به سادگی شکلهایی مشابه آنها درست‌کرد.

ما عبارتند از چند ضلعی‌هایی‌که از لحاظ شکل و اندازه‌کاملاً مشابه یکدیگرند. فرض‌کنیدتعداد زیادی چندضلعیهای‌مساوی یکدیگر دراختیار داشته باشید. می‌خواهیم آنهارا طوری پهلوی‌هم قرار دهیم‌که چندضلعی

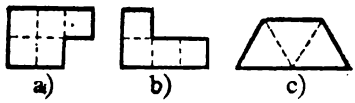
دیگری به‌همان شکل، منتهی با اندازه‌های بزرگتر بدست آید، به‌عبارت دیگر چندضلعی جدید با هر کدام از چندضلعی‌های اصلی متشابه باشد.

وقتی که چندضلعی‌ها را پهلوی هم می‌گذاریم، می‌توانیم آنها را هرچقدر که بخواهیم، بچرخانیم و یا جابه‌جا کنیم، ولی حق نداریم آنهارا تا و یا به‌قسمتهای کوچکتری تقسیم کنیم.

هرچندضلعی غیرمشخصی، به‌درد این کار نمی‌خورد. مثلاً، باشش ضلعی‌های منتظم مساوی می‌توان به خوبی، یک صفحه را پوشاند، ولی تشکیل یک شش‌ضلعی منتظم، به‌کمک آنها ممکن نیست.

از مربعهای مساوی، یا مثلثهای متساوی‌الاضلاع مساوی، به‌سادگی می‌توان شکلهای متشابه آنهارا بدست آورد (شکل صفحهٔ ۱۵۷ را ببینید).

مناسب‌ترین «بلوکها»، برای ساختن شکلهای متشابه خود آنها، چندضلعی‌هائی شبیه شکلهایی است که دراینجا داده شده‌است و به‌طور کلی، چند ضلعی‌هایی که از مربعهای مساوی و یا مثلثهای متساوی‌اضلاع مساوی، درست شده‌باشند.

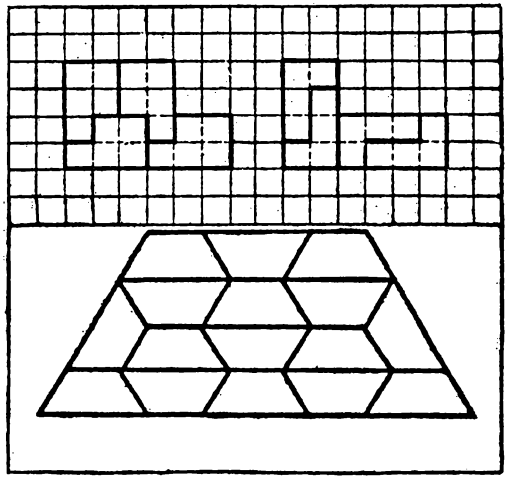


مربوط به‌مسألهٔ ۱۹۳. «بلوکها»

برای ساختن چندضلعی‌هایی متشابه با بلوکهایی که دراینجا داده شده است، می‌توان از ۴ یا ۹ یا ۱۶ و یا تعداد بیشتری از چندضلعی‌های مفروض استفاده کرد.

درقسمت بالای شکلی که درصفحهٔ ۱۵۹ می‌بینید، به‌عنوان نمونه نشان داده شده است که چگونه می‌توان از ۴ بلوک مساوی a یا b، یا از ۱۶ چندضلعی مساوی c، شکلهایی متشابه با آنها ساخت.

برای ساختن چنین شکلهایی، لااقل ۴ عدد از شکل اولیه لازم است، سپس با ۹ یا ۱۶، یا به‌طور کلی n^2 شکل (که n عدد صحیح معینی است)،



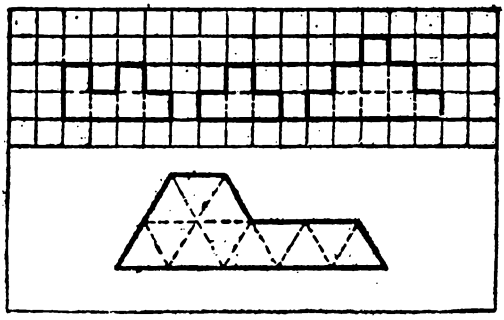
مربوط به‌مسألهٔ ۱۹۳

می‌توان چندضلعی موردنظررا ساخت.

واین یك‌قانون‌است. دراینجا عملاً درستی‌این‌قضیهٔ مشهورهندسی تأیید می‌شود که مساحتهای دوشکل متشابه، برنسبت مجذور اندازه‌های خطی‌آنهاست.

وقتی یك چندضلعی را ازتعدادی چندضلعی مساوی، و متشابه با آن ، درست می‌کنیم ، انتظار داریم‌که ضلع آن ۲یا۳یا۴ یا n برابرطول ضلع چندضلعی اولیه بشود. دراین‌صورت مساحت آن ۲۲ یا ۳۲ یا ۴۲... یا n^2 برابرمساحت چندضلعی اولیه می‌شود و بنابراین برای ساختن‌چنین شکلی ۴یا۹یا۱۶... یا n^2 شکل اولیه را لازم داریم.

مسألهٔ . چندضلعی‌هایی متشابه باشکلهای صفحهٔ۱۵۸درست‌کنید:
۱) از۹شکل‌مساوی a ؛ ۲) از۹شکل‌مساوی b ؛ ۳) از۴شکل‌مساوی c ؛ ۴) از۱۶ شکل‌مساوی b ؛ ۵) از۹شکل مساوی c .



مربوط به‌مسألهٔ ۱۹۳. «بلوکها»

یك کاغذ شطرنجی تهیه‌کنید و به‌تعداد کافی از شکلهای شبیه‌آنچه که درصفحهٔ ۱۵۸ داده‌ایم، ببرید (بهتر است، بااندازه‌های بزرگتر باشد) وببینید ازبین‌شما چه‌کسی سریع‌تر و باتعدادکمتری شکل، می‌تواند چند ضلعی متشابه باآنهارا بسازد.

به‌خاطرداشته باشیدکه ازهرچندضلعی نمی‌توان با ۴ یا۹عدد، یك چند ضلعی متشابه با آن ساخت. ممکن است حداقل تعدادی‌که برای چندضلعی اولیه لازم است ۱۶یا۲۵ یا۳۶یا... باشد، ازقبل نمی‌توان این حداقل تعداد را مشخص‌کرد، به‌همین‌مناسبت به عنوان مسألهٔ جالبی در مقابل‌شما قرار می‌گیردکه چه‌کسی‌زودتر این‌حداقل‌تعداد را پیدا می‌کند. نمونه‌های دیگری از«بلوکها» دربالای‌همین‌صفحه‌داده‌شده‌است. نمونه‌های دیگری هم می‌توانید خودتان درست‌کنید، ولی به‌خاطر داشته باشیدکه ممکن است «بلوکهایی» وجود داشته باشد، که نتوان ازآنها چند ضلعی موردنظررا بدست‌آورد.

۱۹۴. روش‌جالبی برای تشکیل‌شکلهای متشابه

حالاکه به ساختن چند ضلعی، به‌کمك‌کمترین تعداد ممکن از شکلهای

متشابه باآن، پرداخته‌اید، می‌توان روش‌جالبی برای حل‌اینگونه‌مسأله‌ها نشان دادکه‌اساس‌آن استفاده‌ازخطهای‌شکسته‌ای‌است‌که به‌یك‌شکل‌باشند.

کاغذشطرنجی‌انتخاب می‌کنیم وهرخانهٔ‌آنرا،مربع واحد می‌نامیم.

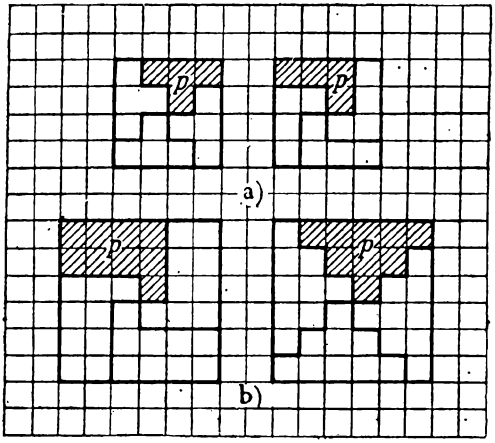
به‌عنوان چند ضلعی مفروض، ابتدا آنرا درنظر می‌گیریم‌که بتواند از مربعهای واحد درست شود. هرکدام‌ازاین‌چند ضلعی‌هارا P ، وچندضلعی متشابه متناظر باآنرا P′ می‌نامیم.

مربعی می‌سازیم‌که شامل تعداد زوجی مربعهای واحدباشد.روشن است‌که تعداد مربعهای واحد مضربی از۴ (۴n) خواهدبود و مرکزچنین مربعی، راس مشترك چهارمربع واحد است. از مرکز این مربع و درطول ضلعهای مربعهای واحد، درجهت یکی از ضلعهای مربع، خط شکسته‌ای رسم می‌کنیم، سپس ازهمین نقطهٔ مرکزی، عمودبرخط شکستهٔ اول، خط شکستهٔ دوم را با دوره‌ای شبیه‌اولی،رسم می‌کنیم.ازهمین نقطهٔ مرکزی، خط شکستهٔ سوم را عمودبردومی وشبیه‌آن، و بعد خط شکستهٔ چهارم را عمودبرسومی و شبیه آن رسم می‌کنیم (آنطورکه در شکل صفحهٔ ۱۶۲ می‌بینید).

این‌خطهای شکسته، مربع را به۴ شکل مساوی هم تقسیم می‌کنند، که هرکدام ازآنها، یکی‌ازچندضلعی‌های P به‌حساب می‌آید.

اگر درهرشکل P ، n مربع واحد وجود داشته‌باشد، بدون شك از n مربع بزرگتر، می‌توان چندضلی P′ را درست‌کرد . وازآنجاکه درهر مربع، ۴ شکل‌مساوی P وجوددارد، چندضلعی P′ را می‌توان به‌کمك۴n شکل‌مساوی P ساخت.

به‌این‌ترتیب ، مثلاً ازا۴ مربع مساوی شکل a ، یعنی از۱۶ شکل مساوی P ، می‌توان به سادگی چندضلعی P′ را ساخت ،که متشابه با



مربوط به‌مسألهٔ ۱۹۴. نمونه‌هایی ازتقسیم به «بلوکها» چندضلعی P باشد.

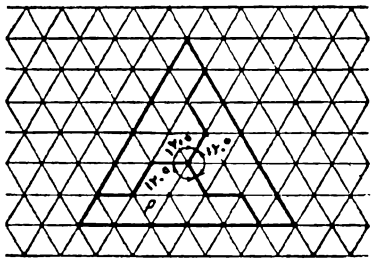
برای ساختن چندضلعی کـه متشابه بـا چند ضلعی نه‌خانه‌ای P (شکل b) باشد، کافی است[۱] ۳۶ عدد از شکل P را داشته باشیم. این‌روش را می‌توان برای چندضلعی‌هایی که از مثلثهای متساوی‌الاضلاع مساوی تشکیل شده‌است؛ تعمیم داد (ازنوع شکل c درصفحهٔ ۱۵۸).

معمولاً، صفحهٔ کاغذی که ازقبل به‌مثلثهای‌متساوی‌الاضلاع تقسیم شده باشد، وجود ندارد، بنابراین باید چنین کاغذی را با دقت، خودتان تهیه کنید. نامگذاریها را مثل‌حالت مربعها، قبول می‌کنیم.

حالا، مثلث بزرگ را طوری انتخاب می‌کنیم که تعداد مثلثهای متساوی‌الاضلاع واحد آن، مضربی از۳ باشد (۳n). مرکزچنین مثلثی،

---

۱) روشی راکه برای ساختن چندضلعی P′، متشابه باچندضلعی مفروضP، ذکر کردیم، شرط‌کافی را برای انتخاب تعداد چند ضلعی‌های P معین می‌کند، ولی ممکن است این تعداد، کمترین نباشد، یعنی برای تشکیل P′، شرط‌لازم را برای انتخاب‌کمترین تعداد ازشکلP، تأمین‌نکند.



مربوط به‌مسأله۱۹۴. روش تقسیم به «بلوکهای» مورب

راس‌مشترك شش‌مثلث واحد است. ازمرکز این مثلث و درجهت ضلع آن ، سه خط شکسته در امتداد ضلعهای مثلثهای واحد رسم می‌کنیم، به نحوی که زاویهٔ هردوتا ازآنها مساوی ۱۲۰ درجه باشد و دورهٔ آنها هم یکجور باشد (شبیه آنچه‌که روی شکل می‌بینید). این خطهای شکسته، مثلث را به۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کند،که هرکدام ازآنها چند ضلعی اولیهٔ P به حساب می‌آید.

اگردرهرشکل P ، n مثلث واحد وجود داشته‌باشد، ومثلث‌بزرگ از۳ شکل مساوی P تشکیل شده باشد، مسلماً از n مثلث بزرگ می‌توان به سادگی شکل P′ را درست‌کرد،که متشابه با شکل P باشد؛ یعنی برای تشکیل شکل P′ ،کافی است به‌انـدازهٔ ۳n شکل مساوی P داشته باشیم (پاورقی مربوط به‌حالت قبل‌را ببینید).

حالا به‌این پرسشها، پاسخ دهید:

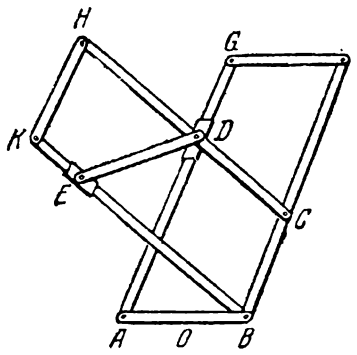
۱. ازچندضلعی‌های Pشکلb صفحهٔ۱۶۲،چندتا لازم است تابرای ساختن چندضلعی P′ کافی باشد؟ به‌کمك آزمایش عملی تحقیق‌کنیدکه آیا این تعداد،کمترین تعداد ممکن است؟

۲. چه‌شکلهای دیگری برای P می‌توان به‌کمك خطهای شکسته‌از مربع‌شکل b (صفحهٔ ۱۶۲) وازمثلث شکل‌بالای‌همین‌صفحه،بدست‌آورد؟

اگر به‌مسألهٔ ساختن یك‌چندضلعی‌که متشابه بااجزاء تشکیل‌دهندهٔ خود باشد، علاقمندهستید، فکرکنیدکه چگونه می‌توان ازاین‌روش،برای

تقسیم مستطیل، ونه‌مربع، استفاده‌کرد.

۱۹۵. استفاده ازیك ساختمان لولایی، برای ساختن چندضلعی‌های‌منتظم بیشتر صنعتگران جوان ، برای ساختن نمونه‌هایی‌که مربوط به رسم پنج ضلعی، هفت‌ضلعی ونه‌ضلعی منتظم است، دچاراشکال می‌شوند . پرگار و خط‌کش بـرای رسم دقیق ایـن شکلها ، کافی نیست ، ولـی شما خودتان می‌توانید وسیله‌ای درست کنیدکـه به‌کمك‌آن بشود هـر n ضلعی منتظم، از $n=۵$ تا $n=۱۰$ را رسم‌کرد.

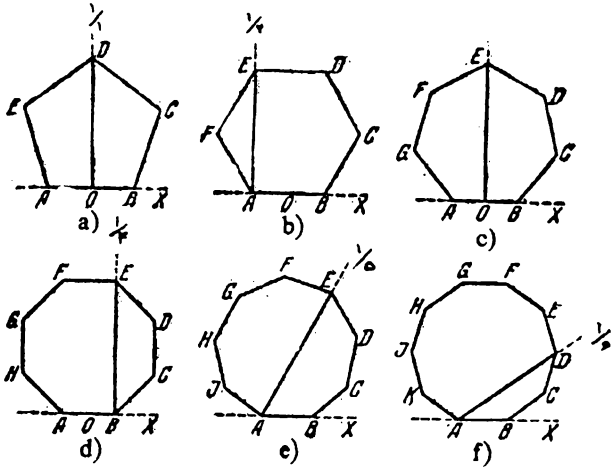


مربوط به مسألهٔ ۱۹۵. طـرحی برای رسم چندضلعی‌های منتظم

این‌وسیله، تشکیل‌شده‌است از میله‌هـای متحرکی کـه اساساً، دومتوازی‌الاضلاع‌مساوی ABFG و BCHK را به وجـود آورده‌اند (شکـل را ببینید) . میلهٔ DE ، به چرخهای D وE متصل است‌که می‌تواندآزادانه حرکت‌کند: D درطول AG و E در طول BK . اندازهٔ میله‌ها طوری است‌که داشته باشیم : $AB=BC=CD=DE$. باتغییروضع D روی AG و E روی BK، متوازی‌الاضلاعهای ABFG و BCHK مساوی هم باقی مـی‌مانند، همچنین ذوزنقه‌هـای ABCD و BCDE هم مساوی می‌مانند ، ضمناً درهروضع، تساوی زاویه‌های n ضلعی راکه چهارضلع متوالی‌آن AB، BC ، CD و DE وزاویه‌های داخلی‌آنABC ، BCD و CDEاست، تأمین می‌کنیم. وصل‌کردن دومتوازی‌اضلاع‌لولایی به‌یکدیگر، به‌ترتیبی که ذکرکردیم، این امکان را می‌دهدکه هر n ضلعی منتظمی‌را از $n=۵$

تا n=۱۰ بسازیم.

برای ساختن مربع هم می‌توان از این وسیله استفاده‌کرد، اگرچه دراین‌مورد نیازی به‌این وسیله نیست، برای این منظور باید نقطهٔ E را روی A قرارداد. درعمل برای ساختن n ضلعی‌منتظم درحالتهای n=۵ تا n=۱۰، به‌کمك ایـن وسیلهٔ لولایی، از خاصیتهای زیـر استفاده می‌کنیم:



مربوط به‌مسألهٔ ۱۹۵. خاصیتهای چندضلعی‌های منتظم

a) درپنج‌ضلعی، زاویهٔ DOB مساوی ۹۰درجه است (شکل a)؛

b) درشش‌ضلعی، زاویهٔ EAB مساوی ۹۰ درجه است(شکل b)؛

c) درهفت‌ضلعی، زاویهٔ EOB مساوی ۹۰درجه است(شکل c)؛

d) درهشت‌ضلعی، زاویهٔ EBA مساوی۹۰درجه است(شکل d)؛

e) در نه‌ضلعی، زاویهٔ EAB مساوی ۶۰ درجه است (شکل e)؛

f) در ده‌ضلعی، زاویهٔ DAB مساوی۳۶ درجه است (شکل f)؛

بـرای اینکه به‌کمك ایـن وسیلهٔ لولایی، n ضلعی منتظم را در

حالتهای $n=5$ تا $n=8$ بسازیم ، باید به‌ترتیب زاویه‌های قائمه Y_1OX ، Y_2AX ، Y_3OX ، Y_4BX را رسم کنیم، سپس میلهٔ AB را روی خط راست AB قرار دهیم، به‌نحوی که نقطه‌های O ، یانقطه‌های B برهم قرارگیرند (شکلهای از a تا d). سپس، ضمن اینکه میلهٔ AB را روی کاغذ ثابت نگه می‌داریم،باید بقیهٔ میله‌ها را طوری جابه‌جاکنیم تا D روی خط OY_1 (برای پنج ضلعی) ، یا E روی خط AY_2 (برای شش ضلعی)، یا E روی OY_3 (برای هفت‌ضلعی) و یا بالاخره E روی BY_4 (برای هشت‌ضلعی) قرارگیرد.

برای رسم n ضلعی منتظم ، در حالتهای $n=9$ و $n=10$، باید به‌ترتیب نیم‌خطهای AY_5 و AY_6 را طوری رسم کردکه زاویهٔ Y_5AX مساوی ۶۰ درجه و زاویهٔ Y_6AX مساوی ۳۶ درجه باشد، سپس میلهٔ AB را روی خط راست AB قرارمی‌دهیم ، طوری‌که نقطه‌های A برهم منطبق باشند،آنوقت ضمن اینکه میلهٔ AB را با فشار دست روی کاغذ ثابت نگه می‌داریم، بقیهٔ میله‌را طوری می‌چرخانیم که E بر AY_5(برای نه‌ضلعی)، یا D بر AY_6 (برای ده ضلعی) قرارگیرد. اگر دراین موقع، لولاهای وسیله را محکم کنیم ، ۴ ضلع متوالی (و۵ راس متوالی) از n ضلعی مجهول بدست می‌آید. وقتی‌که چهارضلع متوالی n ضلعی بدست‌آمد، با تغییرجای وسیله، می‌توان به‌سادگی‌ضلعهای دیگرآنرا هم بدست‌آورد.

روشن است‌که درهرحالت، طول ضلع n ضلعی مساوی طول‌میله AB می‌شود. اگر به‌چند ضلعی با اندازه‌های دیگری نیاز داشته باشیم، می‌توان‌آنرا ازراه رسم چندضلعی متشابه با چند ضلعی مفروض بدست آورد.

از لحاظ نظری، این طریقهٔ ساختمان کاملاً دقیق است؛ ازلحاظ عملی هم، دقت آن بستگی به‌دقیق‌بودن وسیله ودقیق‌بودن کارما دارد.

این‌وسیله را می‌توان ازچوب یا یك فلزسبك درست‌کرد.

مسأله. البته شما می‌توانید به‌کمك پرگار و خط‌کش، زاویه را به‌دوقسمت مساوی تقسیم‌کنید. حالا فکرکنید که به‌کمك وسیله‌ای‌که برای ساختن چندضلعی‌های منتظم درست‌کردیم،وسپس استفاده ازپرگار وخط‌کش،چگونه می‌توان زاویه‌ای مساوی یك درجه ساخت؟

۱۹۶. اندیشهٔ هندسی درکار

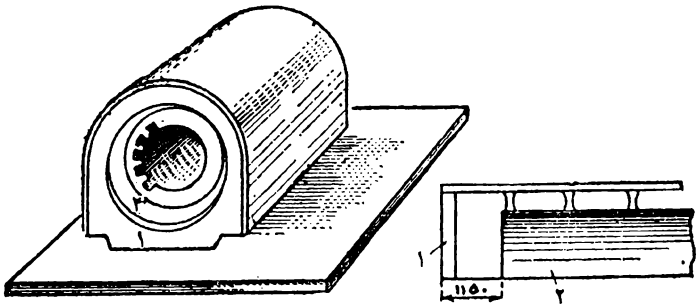
ابتدا،گفتگوئی راکه درمسألهٔ ۷۵ (صفحهٔ ۶۶) شروع‌کردیم، ادامه می‌دهیم. این‌گفتگو، در بارهٔ یکی از حرفه‌های جالبی است که درکارخانه وجود دارد: حرفهٔ نشانه‌گذاری.

نشانه‌گذار چه‌کسی است،کارگر یامهندس؟ او هم‌کارگر است و هم مهندس؛ علاوه‌برآن او هندسه‌دان، نقشه‌کش، طراح وحتی نقاش هم هست.

نشانه‌گذار بیشتر مواقع پشت تختهٔ نشانه‌گذاری‌کار می‌کند. او از وسیله‌هایی استفاده می‌کند، که اغلب خودش آنها را ساخته است. نشانه‌گذار می‌تواند به‌طراح‌کمك‌کند ومورد مشورت‌کارشناس فنی قرار گیرد.اوطرحها،نقشه‌ها ورسمهارا می‌خواند وخودش‌آنهارا می‌کشد،ولی نه‌روی‌کاغذ، نه‌روی تختهٔ‌کلاسی، بلکه مستقیماً روی اشیاء: روی‌چدن، روی‌فولاد ویاروی هرچیزدیگری‌که‌لازم باشد. این‌روش‌اغلب‌دشواریهایی دارد، وتنها مهارت و استادی نشانه‌گذار،درستی‌آنرا تضمین می‌کند.

نشانه‌گذار، روی اجزاء، خطهایی رسم می‌کند ونشانه‌هایی می‌گذارد و سپس‌آنها را به‌تراش‌کار، سوراخ‌کن، خراط و غیره می‌سپارد.

آنها، اضافه‌های فلزرا ازآن جدا می‌کنند وآنرا به‌شکلی درمی‌آورندکه نشانه‌گذارخواسته است.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۹۶. ریخته‌گری قسمت ثابت مولد وبرش‌طولی‌آن

کار نشانه‌گذارخیلی پرمسئولیت‌است. اگر درنشانه‌گذاری‌اشتباه بشود، همان اشتباه راکارگران هم تکرار می‌کنند وکارناقص ومعیوب می‌شود. خود نشانه‌گذار باید بفهمدکه به‌چه‌ترتیب‌کار نشانه‌گذاری را باسرعت ودقت انجام دهد،بهتر است‌که ازکجا شروع‌کند،چگونه وسایل کار خودرا فراهم‌کند، تاکار سریع‌تر و ساده‌ترتمام شود؟ به‌هراندازه‌که آمادگی ریاضی نشانه‌گذار، امری جدی است، بیشتر ازآن، خلاقیت او، برای موفقیتش اهمیت دارد.

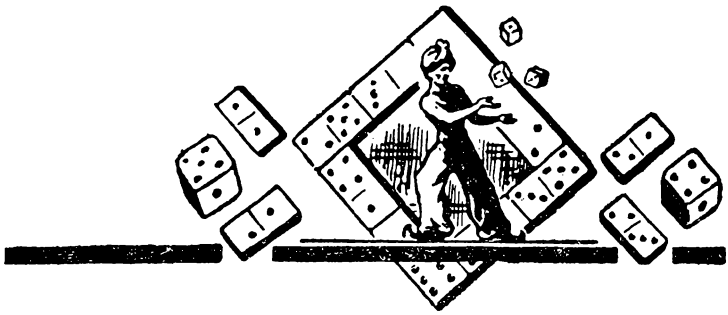
دریك‌کارخانه ، توربینهای مولد برق عظیمی ، با قـدرت زیاد، تولید می‌کنند . قسمت بیرونی و ثابت توربین به طول ۵ متر است و وزن آن به ۱۲ تا ۲۰ تن می‌رسد. در ریخته‌گری قسمت ثابت (شکل را ببینید)، سوراخی به شکل استوانه وجود دارد. حالا به برش طولی این قسمت ثابت توجه‌کنید (شکل را ببینید). درعمق قسمت ثابت، به‌فاصلهٔ ۱۱۵۰ میلیمتر ازلبهٔ‌آن (۱)، سوراخ استوانه‌ای دیگری قرارگرفته‌است

که قطرآن کـوچکتر است و به‌اصطلاح آهن فعال نامیده مـی‌شود (۲). محورهای این‌دوسوراخ استوانه‌ای‌ممکن‌است‌تاحدی برهم منطبق‌نباشند. برجستگی‌های روی‌سوراخ داخلی، که قسمتی‌ازآن درشکل‌دیده می‌شود، شیارهایی به‌وجودآورده است. آنها به‌فاصله‌های مساوی ازیکدیگر و در تمام طول دوره قرارگرفته‌اندکه برای مشخص‌بودن وضع فرض می‌کنیم تعداد این شیارها، مساوی ۴۰ باشد.

نشانه‌گـذار، باید روی لبهٔ (۱) قسمت ثابت ، سوراخهایی بـرای محکم‌کردن سپرهای داخلی و خارجی ایجادکند. اشکال مسأله در اینجا بودکه بعد از محکم‌کردن سپرها به‌لبهٔ قسمت ثابت، باید مرکزهای این سپرها، برمحور استوانهٔ بزرگترقرارنگیرد، بلکه درست برمحور استوانهٔ اصلی درفلزفعال، واقع شود (به‌خاطرداشته باشیم‌که این محورها،ممکن است برهم منطبق نباشند).

مسأله منجربه‌این می‌شودکه روی سطح خارجی لبهٔ(۱)، دایره‌ای رسم‌کنیم‌که مرکزآن برنقطهٔ تصوری برخـورد محور سوراخ استوانه‌ای داخلی باصفحهٔ لبه، واقع شود (توجه‌کنیدکه مرکز دایرهٔ سوراخ داخلی «درهوا» قرارگرفته است ونمی‌توان سوزن پرگاررا درآن فروکرد).

نشانه‌گذارچگونه این‌مشکل را حل می‌کند؟

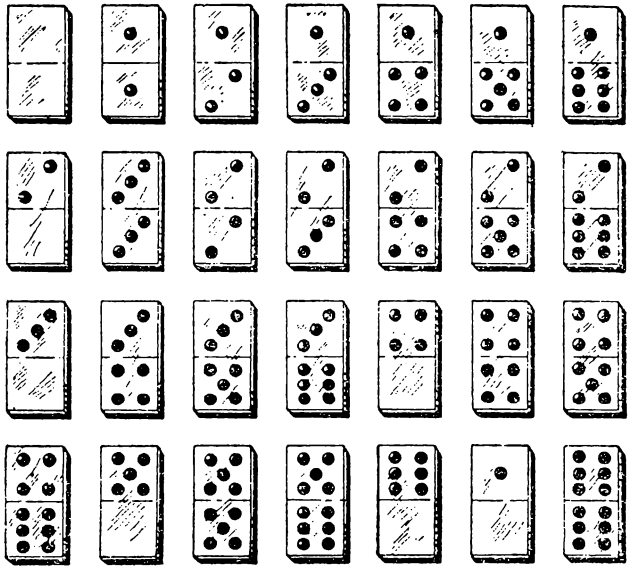


بخش ششم

دومینو و تاس‌بازی

الف. دومینو

بازی دومینو، اغلب به‌کمك ۲۸سنگ مستطیل‌شکل، انجام می‌شود.



هرسنگ دومینو، به‌دومربع‌تقسیم شده است وروی هرکدام‌ازاین‌مربع‌ها، نقطه‌هایی نشانه‌گذاری شده است. نقطه‌ها را روی مربعها، طوری قرار داده‌اندکه‌گروه نقطه‌ها، در هرسنگ یکی از ترکیبهای ممکنه دوتائی از ۷ عدد: ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵و۶ باشد. به‌این‌ترتیب، هرسنگ دومینو، به‌وسیلهٔ دوعدد مشخص می‌شود: تعداد نقطه‌هایی‌که دریکی ازمربعها قراردارد، و تعداد نقطه‌هایی‌که در مربع دیگرقرار دارد. مجموع همهٔ نقطه‌های یک سنگ، تعداد خالهای‌آنرا، معین می‌کند.

وقتی تعداد خالهای دونیمهٔسنگ، باهم برابرباشند، یا هردونیمه بدون خال باشد، سنگ دومینو را، جفت‌گویند.

گاهی، به‌جای نشان‌دادن خود سنگ، به‌طورساده، دوعددرا پشت سرهم می‌نویسیم (بایك خط‌کوتاه‌که بین‌آنها قرارمی‌دهیم)؛ این‌دوعدد، معرف‌تعداد خالهای دونیمهٔ سنگ خواهد بود. مثلاً اگربنویسیم: ۵ــ۰، به‌معنای سنگی است‌که دریکی از مربعهای‌آن خالی وجود ندارد (۰)، و دزمربع دیگرآن ۵ خال وجوددارد؛ همچنین ۶ــ۴، به‌معنای سنگی با ۴ خال و۶خال است وغیره.

روش بازی دومینو به قدری ساده و عمومی است‌که نیازی به شرح آن نیست. تنها قانون اصلی آنرا یادآوری می‌کنیم: درکنار هرکدام از مربعهای سنگی‌که روی میز گذاشته شده است، باید سنگی گذاشته شودکه تعداد خالها در هردومربع مجاور (از دوسنگ مختلف) یکی باشد.

تمام ۲۸ سنگ دومینو را می‌توان به‌ترتیب زیرنشان داد:

۶-۶	۵-۶	۴-۶	۳-۶	۲-۶	۱-۶	۰-۶
	۵-۵	۴-۵	۳-۵	۲-۵	۱-۵	۰-۵
		۴-۴	۳-۴	۲-۴	۱-۴	۰-۴
			۳-۳	۲-۳	۱-۳	۰-۳
				۲-۲	۱-۲	۰-۲
					۱-۱	۰-۱
						۰-۰

بازی دومینو، به‌خودی‌خودجنبهٔ ریاضی ندارد. ولی اگریك‌دست کامل‌سنگ دومینو در اختیار داشته باشید، می‌توانید با حل مسأله‌ها و معماهای جالب زیر، خودرا بیازمایید.

۱۹۷. چندخال

باتوجه به‌قانون اصلی‌بازی دومینو، این‌مسأله را حل‌کنید: هر۲۸سنگ دومینورا، باتوجه به‌قانون بازی،به‌صورت‌یك زنجیربه‌دنبال‌هم بچینید. اگر دریکی از دوانتهای این زنجیر، ۵ خال وجود داشته‌باشد، درانتهای دیگرآن، چند خال خواهد بود؟

ابتدامسأله‌را به‌طور ذهنی‌حل وسپس‌به‌صورت‌عملی‌آزمایش‌کنید.

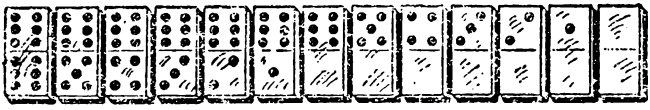
۱۹۸. دو تردستی

تردستی ۱ول. یکی ازسنگهای دومینورا (که جفت‌نباشد) بردارید وپنهان کنید و سعی‌کنید هیچکدام از دوستان شما متوجه نشوندکه به‌جای ۲۸ سنگ، ۲۷سنگ روبروی‌آنهاست. به‌دوستان خود پیشنهادکنیدکه همهٔ سنگها را به صورت یك زنجیر، طبق قانون بازی دومینو، درآورند (می‌توان برای‌ساده‌ترشدن مسأله، به‌آنها اجازه دادکه سنگهای جفت‌را

کناربگذارند). آنچه راکه شما می‌خواهید؛ می‌توانند بدون هیچ اشکالی انجام دهند، ولی‌شما می‌توانید ازقبل به‌آنها بگویید‌که دوانتهای زنجیر آنها به‌چه‌خالهایی ختم می‌شود.

این خالها، همانهایی هستندکه روی دو مربع سنگ پنهان شده، وجوددارد. چرا؟

تردستی‌دوم. ۲۵سنگ‌دومینو انتخاب‌کنید وآنهارا به‌طور وارونه (یعنی به‌نحوی‌که خالهای‌آنها دیده نشود) پهلوی‌هم بچینید. سپس‌روی خودرا برگردانید و یا حتی به‌اطاق دیگر بروید و از دوستانتان بخواهید به‌هرتعدادکه می‌خواهند (ولی‌بیشترازا۱۲تا نباشد) ازسنگهای‌سمت‌راست بردارند و درسمت چپ قراردهند. شما خواهید تـوانست تعداد سنگهای جابه‌جاشده را بگوئید.



مربوط به‌مسألهٔ ۱۹۸. سنگهای دومینو را به‌ترتیب نزولی تعداد خالها، پهلوی‌هم بگذارید.

برای این‌منظورباید۱۳سنگ اولیه را به‌ترتیب تعداد خالهای‌آنها از۱۲تا۰، پهلوی‌هم بچینید وسپس ۱۲سنگ دیگررا درسمت‌راست‌آنها، به‌هرترتیبی‌که مایلید، بگذارید.

وقتی‌که به‌اطاق برمی‌گردید، سنگ وسط، یعنی سنگ سیزدهم، را بردارید. تعداد خالهائی‌که دراین‌سنگ است، مساوی تعداد جابه‌جایی سنگها خواهد بود. چرا؟

۱۹۹. تضمین برد دربازی

فرض می‌کنیم چهارنفر در بازی دومینو شرکت‌کرده باشند : A وC در

مقابل B و D . سنگها را در ابتدا به‌طور مساوی بین بازی‌کنان تقسیم کرده‌اند، یعنی هرنفر۷سنگ دارد.

ببینیم برد بازی به‌چه‌چیزی مربوط است؟

البته تا حد زیادی، برد بازی به‌هنر بازی‌کننده مربوط می‌شود، ولی می‌توان سنگهای بازی را بین دوزوج بازی‌کننده طوری تقسیم کرد که زوج اول حتماً برنده باشد، یعنی‌یکی‌ازبازیکنهای این زوج، زودتر ازدیگران، سنگهای خودرا تمام‌کند.

مثلاً فرض‌کنید، A این سنگهارا داشته‌باشد:

۶-۰، ۵-۰، ۴-۰، ۳-۱، ۲-۱، ۱-۱، ۰-۱

و D صاحب بقیهٔ سنگهایی باشدکه دارای صفر و واحدند،یعنی:

۶-۱، ۵-۱، ۴-۱، ۳-۰، ۲-۰، ۰-۰

ویك سنگ دلخواه دیگر.

بقیهٔ سنگها هم بین B و C، به‌طور دلخواه تقسیم شده باشد.

دراین‌حالت، می‌توان بازی را به‌مبارزهٔ بین A ، اززوج اول، و D ، اززوج دوم، تبدیل‌کرد، به‌نحوی‌که دوبازیکن دیگر (B و C)حتی نتوانند یکی ازسنگهای خودرا مصرف‌کنند.

A ، بازی را با ۱-۱ شروع می‌کند، B و C تماشاگر باقی می‌مانند، زیراآنها سنگی‌که با واحد شروع شود، ندارند، ولی D می‌تواند یکی از سه‌سنگ ۴-۱ ، ۵-۱ و ۶-۱ را قراردهد . دراین‌صورت A باید یکی ازسنگهای ۰-۴، ۰-۵یا ۰-۶ را قراردهد. B و C بازهم خارج‌ازبازی باقی می‌مانند، زیرا بین سنگهای آنها نه‌واحد وجود دارد و نه‌صفر. D می‌تواند یکی از سنگهایی راکه دراختیار دارد مصرف‌کند و A همیشه می‌تواند سنگی به‌زنجیر اضافه‌کند.

درپایان کار، A سنگهای خودرا تمام می‌کند، B و C تمام سنگهای خودرا دراختیار دارند و برای D هم یك سنگ باقی مانده است. زوج A و C این دست بازی را برده‌اند (این بازی را ازابتدا تاانتها ذکر کنید).

برای تقسیم اولیهٔ سنگها، می‌توان به‌جای صفر و واحد، ازترکیب دوعدد دیگر، مثل ۱و۳ یا ۴و۶ وغیره استفاده کرد.

به سادگی می‌توان فهمید که تعداد همهٔ بازیهای مختلفی که به‌این‌ترتیب می‌توان انجام داد، برابراست با ۲۱ (ترکیب ۷ شیئی دوبه‌دو). ولی‌احتمال اینکه، به‌طور تصادفی، به‌اینگونه تقسیم سنگها برخوردکنیم، خیلی کم است.

درنمونه‌ای که آوردیم، دوربازی زمانی تمام می‌شودکه یکی از بازیکنها، سنگهای خودرا تمام‌کرده باشد. ولی این‌حالت هم وجوددارد که هیچکدام ازبازیکنها، نتوانند سنگهای خودرا تمام‌کند، یعنی بعداز چند حرکت، بازی به اصطلاح بسته شود و هیچیك از بازیکنها سنگی دراختیار نداشته‌باشندکه بتوانند طبق‌بازی دومینو، درکنارزنجیرسنگها قراردهند. درچنین‌حالتی تعداد خالهای سنگهایی راکه هریك از زوجها در اختیاردارند، می‌شمارند وآن زوج که تعدادکمتری خال داشته باشد، برنده است.

حالا دربارهٔ این مسأله فکرکنید:

بازهم A و C دریك‌طرف با B و D درطرف دیگر، بازی می‌کنند. به‌هربازیکن ۶ سنگ داده شده است و ۴ سنگ هم باقی‌مانده است که بازیکنها قرارگذاشته‌اند ازاین ۴ سنگ استفاده نکنند.

سنگهای بازیکن A را می‌شناسیم:

۵-۱، ۳-۱، ۳-۲، ۴-۰، ۴-۱، ۴-۲

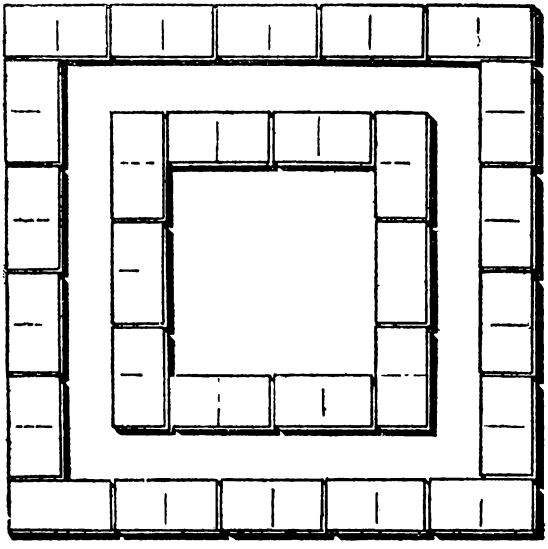
شریك A ، یعنی C ، پنج‌تا ازسنگهای‌جفت‌را دارد. D دارای دوسنگ جفت است و مجموع خالهای همهٔ سنگهای اومساوی ۵۹ است.

A،بازی را ۴-۲شروع می‌کند، B پاس می‌شود، Cبازی می‌کند، Dپاس می‌شود Aبازی می‌کند، B دوباره پاس می‌شود، Cبازی می‌کند وبازی بسته‌می‌شود.زوج B وD بازی را می‌بازند، زیرا حتی یك حرکت هم نکرده‌اند . برای A وC ، ۳۵ خال باقی مانده است، درحالیکه نزد B وD ، ۹۱ خال وجود دارد. مجموع خالهای چهارسنگی‌که بازی شده است، مساوی ۲۲ است.

با این فرضها، معلوم‌کنیدکدام چهارسنگ ازبازی خارج‌گذاشته شده است وکدام چهارسنگ دربازی به‌کاررفته است.

۲۰۰. قاب

مسألهٔ اول. سنگهای دومینو را طبق قاعدهٔ بازی ، طوری بچینیدکه

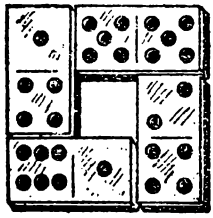


مربوط به‌مسألهٔ ۲۰۰. قابی درقاب دیگر، ازسنگهای دومینو

یك قاب مربع‌شکل به وجودآید. برای این منظور ازهر۲۸سنگ استفاده کنید، به‌نحوی‌که مجموع خالها درهرضلع مربع، مساوی۴۴شود.

مسألهٔ دوم. ۲۸سنگ دومینو را به‌صورت دوقاب داخل هم طوری بچینید (شکل را ببینید)که تعداد خالهای هرکدام از هشت ضلع، مقدار ثابتی باشد.

دراینحالت، لازم‌نیست برای چیدن سنگهای دومینو، قاعدهٔبازی رعایت شود، یعنی‌می‌توان سنگهارا به‌هرترتیب دلخواه، پهلوی‌هم چید.



مربوط به‌مسألهٔ ۲۰۱

۲۰۱. پنجره

از سنگهای دومینو، می‌توان پنجره‌ای ساخت، به‌نحوی‌که تعدادخالها درطول هرضلع آن‌مقدار ثابتی باشد (شکل را ببینید).

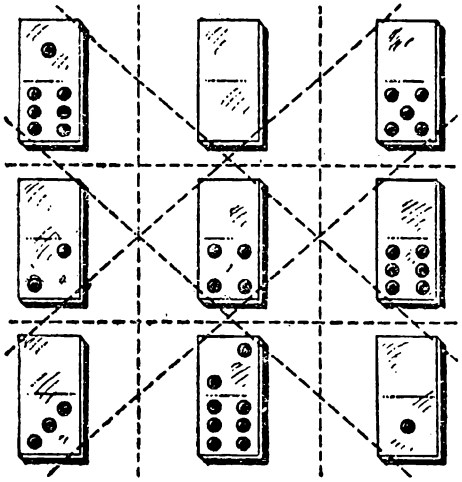
با استفاده از ۲۸ سنگ دومینو،۷پنجرهٔ مساوی، با همین خاصیت، بسازید، به‌شرطی‌که هیچکدام ازآنها شبیه پنجره‌ای‌که دراینجا نشان داده‌ایم، نباشد.

یادآوری. ۱) خالهای هرراس، دوبار به‌حساب می‌آید: یکبار در طول‌ضلع افقی ویکبار درطول ضلع قائم. ۲) مجموع خالها تنهادرطول هرضلع یك مربع، باید یکی باشد؛ مجموع خالهای هرضلع در دومربع مختلف، می‌تواند مختلف باشد.

۲۰۲. مربعهای وفقی (جادویی) ازسنگهای دومینو

علاوه‌برقاب وپنجره، به‌کمك‌سنگهای دومینو می‌توان مربعهای یکپارچهٔ جادویی هم ساخت. اگر عددهای غیرتکراری را به‌شکل مربع پهلوی هم

طوری بچینیم که مجموع عددها درهرردیف، چه افقی و چه‌ستونی و چه هریك از دوقطر اصلی، یکی باشد، چنین مربعی را جادویی یا وفقی گویند[۱].



مربوط به‌مسألهٔ ۲۵۲. مربع وفقی بامجموع ۱۲

مثلاً می‌توان باهفت سنگ سفید (سنگ سفید به سنگی گفته می‌شودکه دریکی یا هردونیمهٔ آن خالی وجود نداشته‌باشد) ودوسنگ دیگر (۶ـ۱ و ۶ـ۲) ، به‌سادگی مربعی وفقی با مجموع ۱۲ درست‌کرد (شکل بالا را ببینید).

یادآوری. چه دراینجا وچه درموارد بعد ، منظور از سطر یا ستون یا قطر، نواری است‌که یك‌ردیف سنگ دومینو را دربرگیرد،آنطورکه‌درشکل بالا می‌بینید.

---

۱) شبیه مربعهای جادویی‌عددی (بخش۱۲ را ببینید)

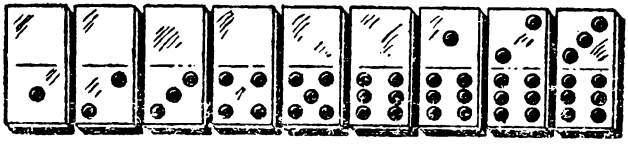
برای مربع وفقی دومینو، راحت‌تر اینست‌که به‌این‌ترتیب نوشته شود.

۵-۰	۰-۰	۶-۱
۶-۰	۴-۰	۲-۰
۱-۰	۶-۲	۳-۰

یا به‌این‌صورت:

۵	۰	۷
۶	۴	۲
۱	۸	۳

جالب اینجاست‌که تعداد خالهای این۹سنگ دومینو، عبارتنداز ۸ عدد طبیعی اولیه وصفر: ۰،۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸.



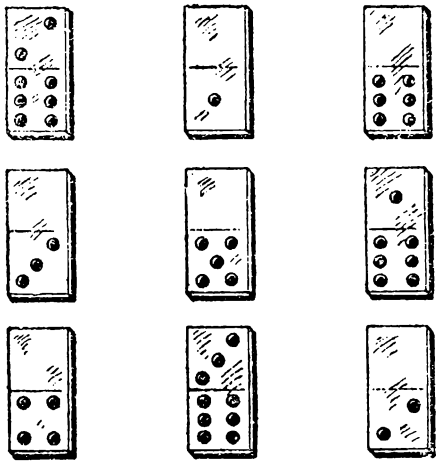
مربوط به‌مسألهٔ ۲۰۲. نه‌عدد طبیعی اولیه

اگرهم، ۹ سنگ را طوری انتخاب‌کنیم‌که تعداد خالهای آنها، ۹عدد طبیعی اولیه را نشان دهند (مثلاً آنطورکه درشکل بالا می‌بینید)، بازهم می‌توان با آنها یك مربع وفقی، بامجموع ثابت ۱۵ درست‌کرد (شکل‌صفحهٔ بعد را ببینید.)

شبیه همین‌مربعهای وفقی‌رامی‌توان باانتخاب‌همهٔ‌خالهای۲،یاهمهٔ خالهای ۳، یاهمهٔ خالهای۴، به‌اضافهٔ دوسنگ مناسب دیگر،درست‌کرد. مجموع ثابت این مربعها، مساوی ۱۸ یا ۲۰ یا۲۴ است.

می‌توان مربعهای وفقی‌را باتعداد بیشتری سنگ، با۱۶،۲۵،...، تشکیل‌داد؛ضمناً دراین‌موارد می‌توان ازعددهای تکراری هم‌استفاده‌کرد.

به‌عنوان نمونه، طرح یك مربع وفقی را،که از۱۶ سنگ دومینو



مربوط به‌مسألهٔ ۲۰۲. مربع وفقی بامجموع ۱۵

وبامجموع ثابت ۱۸ درست شده است، درزیر می‌آوریم:

۲-۶	۱-۲	۱-۳	۰-۳
۱-۴	۰-۲	۳-۶	۱-۱
۰-۵	۱-۵	۰-۱	۰-۶
۰-۰	۲-۵	۰-۴	۱-۶

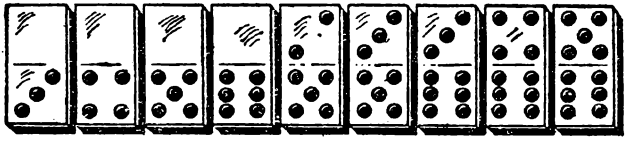
این‌مربع ازهمهٔ صفرها، همهٔ واحدها وسه سنگ ۵-۲، ۶-۲و۶-۳ تشکیل شده‌است. مجموع خالها، درهرسطر، هرستون و هرقطر این مربع مساوی ۱۸ است. تعداد خالهای بعضی از سنگها یکی است، مثلاً ۵+۰=۴+۱(درستون اول)، ۶+۱=۵+۲ (سطرآخر) وغیره.

این مربع، خاصیتهای جالبی دارد؛ اگرستون اول سمت چپ، را به‌سمت راست، یا سطر بالا را به‌پائین، منتقل‌کنیم،بازهم یك مربع‌وفقی بدست می‌آید. اگردراین مربع، همهٔ سنگهایی راکه شامل سفید و واحد

هستند، به سنگهایی تبدیل کنیم که تعداد خالهای آنها یك، یا ۲ یا سه‌تا بیشترباشد، دوباره یك مربع وفقی بدست می‌آید. بالاخره، اگر هرسنگ دومینورا دراینگونه مربعهای وفقی، به متمم[۱] خودش تبدیل کنیم، بازهم یك مربع وفقی بدست می‌آید.

همانطورکه می‌بینید، سنگهای دومینو، وسیلهٔ تمرین خوبی‌برای مربعهای وفقی است. حالا این مسأله‌ها را حل کنید:

مسألهٔ ۱. یك مربع وفقی، با مجموع ثابت ۲۱، به‌کمك نه‌سنگ دومینو، که درشکل زیرداده شده است، درست کنید.



مربوط به‌مسألهٔ ۲۰۲. بااین‌سنگها، مربع وفقی درست کنید.

مسألهٔ ۲. نه‌سنگ دومینو انتخاب کنید که تعداد خالهای آنها مساوی عددهای متوالی ۴،۵،۶،۷،۸،۹،۱۰،۱۱ و۱۲ باشد و ازآنها یك مربع وفقی درست کنید. مجموع ثابت، دراین‌مربع چقدر است؟

مسألهٔ ۳. ۱۶ سنگ دومینو انتخاب کنید با این تعداد خالها: ۱،۲،۳،۳،۴،۴،۵،۵،۶،۶،۷،۷،۸، ۸، ۹ و۱۰ و با آنها یك مربع وفقی درست کنید.

مسألهٔ ۴. از۲۵ سنگ زیر، یك مربع وفقی با مجموع ثابت ۲۷،

---

۱) دوسنگ دومینورا متمم هم‌گویند، وقتی‌که خالهای یك مربع ازیك سنگ، خالهای مربعی ازسنگ دوم‌را تاشش تکمیل کند وهمینطوربرای مربعهای دوم این سنگها. مثلاً سنگهای ۳-۲ و ۳-۴ یا سنگهای ۲-۱ و ۴-۵ و غیره، متمم یکدیگرند. درتمام۲۸سنگ دومینو، ۴سنگ وجوددارد‌که متمم‌خودشان هستند، ۶-۰، ۵-۱، ۲-۴و۳-۳.

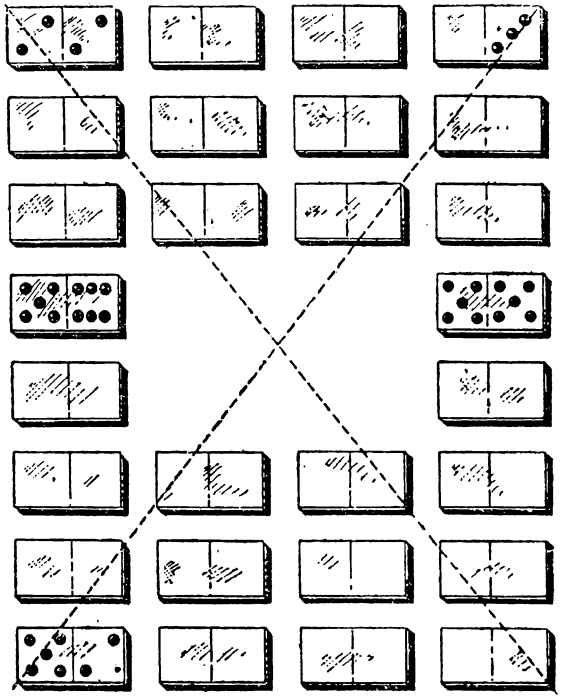
درست کنید:

۰،۰-۱،۰-۲،۱-۱،۰-۲،۰-۳،۱-۲،۰-۴،۲-۲،۳-۱،۳-۲،۴-۱،۵-۰،۰

۱-۵،۶-۰،۴-۲،۳-۳،۱-۶،۳-۴،۲-۵،۲-۶،۳-۵،۴-۴،۴-۵،۶-۳،۶-۴

۲۰۳. مربع وفقی باسوراخ

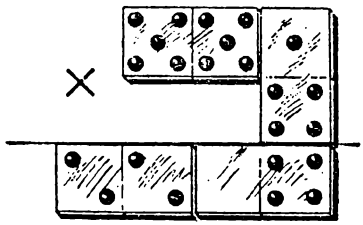
درطرحی که درپائین صفحه نشان داده‌شده است، باهمهٔ ۲۸ سنگ دومینو، مربعی درست شده‌است که درو سط آن یك سوراخ مستطیل‌شکل وجوددارد. می‌دانیم که مجموع خالهای هریك از ۸ سطر، مجموع خالهای هریك از ۸ستون ومجموع خالهای هریك ازدوقطر (که روی شکل باخطچین نشان



مربوط به‌مسألهٔ ۲۰۳. طرح مربع وفقی باسوراخ وسط آن

داده شده‌است)، برابراست با ۲۱. دراینجا برخلاف مسأله‌های‌قبل، هرنیمهٔ یك سنگ دومینو، مقدارمستقلی برای محاسبهٔ خالها درستونها وقطرها، به‌حساب می‌آید.

درطرح شکل، چهارمین ردیف افقی ازبالا، به‌طورکامل‌مشخص‌شده است. مجموع خالها دراین سطرمساوی ۵+۵+۶+۵، یعنی ۲۱ است. همچنین‌خالهای سنگهایی هم‌که درگوشه‌های مربع قرارگرفته‌اند، معلوم است.



مربوط بمسألهٔ ۲۰۴. ضرب

۲۰۴. ضرب در دومینو

به شکل نگاه‌کنید؛ به‌کمك چهار سنگ دومینو، یك عدد سه رقمی (عدد ۵۵۱) را دریك عددیك‌رقمی (درعدد۴) ضرب کرده‌ایم:

$$۵۵۱ \times ۴ = ۲۲۰۴$$

حالا، بااستفاده ازهر۲۸سنگ بازی دومینو، ۷ضرب شبیه‌آنچه‌که دراینجا نشان داده‌ایم، درست‌کنید. شش‌ضرب را خواهید توانست، بدون هیچ زحمتی پیداکنید. وتنها برای‌ضرب‌هفتم است‌که باید فکرکنید. ولی به‌هرحال مسأله جواب دارد.

۲۰۵. کشف سنگی‌که درنظرگرفته‌اند

به‌دوستتان پیشنهادکنیدکه پیش خود یکی‌ازسنگهای دومینو را در نظر بگیرد. حالا، فرض‌کنیدکه اوپشت‌سرهم، این‌عملها را انجام دهد:

۱) تعداد خالهای یکی از دونیمهٔ سنگی راکه درنظرگرفته است (هرنیمه‌ای راکه می‌خواهد)، در۲ضرب‌کند؛

۲) به‌این حاصلضرب ، عدد دلخواه m راکه شما معین می‌کنید ، اضافه کند؛

۳) مجموعی راکه بدست می‌آید در۵ضرب کند؛

۴) به‌حاصلضرب، تعداد خالهای نیمهٔ دوم سنگ را اضافه کند.

عددی راکه بدست آمده است، از دوستتان بپرسید، ازآن 5m را کم کنید، هریك از دورقم عدد دورقمی،که به‌این‌ترتیب بدست می‌آید، تعداد خالهای هریك‌ازدونیمهٔ سنگ را نشان می‌دهد.

مثلاً فرض کنید سنگ۲ـ۶ رادرنظر گرفته‌باشد. ۶ را دوبرابرمی‌کنیم و به‌حاصلضرب عدد ۳ = m را اضافه می‌کنیم، عدد ۱۵ بدست می‌آید. ۱۵را در۵ضرب وعدد۲(تعدادخالهای‌نیمهٔ‌دیگر)را به‌حاصلضرب اضافه می‌کنیم، عدد۷۷ بدست می‌آید. ۵ m = ۱۵ را از این حاصل کم می‌کنیم بدست می‌آید:

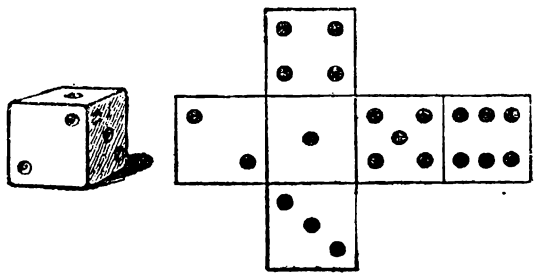
$$۷۷ - ۱۵ = ۶۲$$

ودرنتیجه،سنگی‌که ابتدا درنظرگرفته شده است ۲ـ۶ است.

چرا می‌توان جواب را به‌این‌ترتیب بدست‌آورد؟

ب. تاس‌بازی

تاس‌بازی ، جسم کوچك استخوانی مکعب‌شکلی است‌که روی



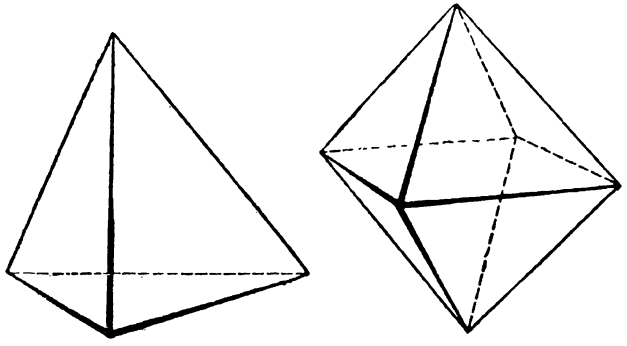
تاس‌بازی

سطحهای آن، خالهایی گذاشته‌اند. روی یکی از وجه‌های آن، یك خال؛ روی وجه دوم، دوخال، وهمینطور روی وجه‌های دیگر آن به‌ترتیب ۳، ۴، ۵ و ۶ خال. درشکل، تاس‌بازی وشش وجه آنرا، به‌صورت گسترده، می‌بینید.

خالها را روی وجه‌های تاس طوری گذاشته‌اند که مجموع خالها درهردو وجه روبرو مساوی ۷ شود.

چرا بخصوص، از بین چند وجهیها ، مکعب را بـرای تاس‌بازی انتخاب کرده‌اند؟

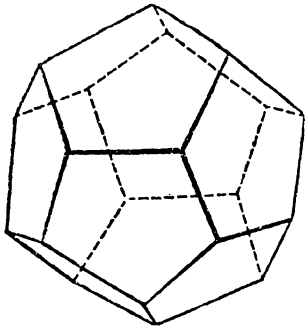
قبل‌ازهمه روشن‌است که تاس باید چندوجهی منتظم باشد، زیرا تنها در چنین حالتی است که وقتی آنرا می‌اندازیم ، احتمال آمـدن وجه‌های مختلف آن به‌طرف بالا، برای همهٔ وجه‌ها، یکی است . ولی از بین پنج نوع چند وجهی منتظم، مناسب‌تر از همه، مکعب است: برای ساختن آن زحمت کمتری لازم است وضمناً وقتی که آنرا می‌اندازیم، به‌راحتی غلت می‌خورد.



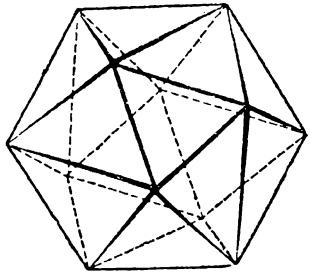
چهاروجهی و هشت‌وجهی

اگرهرپنج نوع چندوجهی منتظم را بایك نیرو بیندازیم، چهاروجهی وهشت وجهی (شکل را ببینید) به‌زحمت می‌غلتند، مکعب بهترمی‌غلتد،

دوازده وجهی و بیست وجهی (شکل را ببینید) چنان «گرد» هستند، که تقریباً مثل کره می‌غلتند.



دوازده وجهی



بیست وجهی

شش‌وجه مکعب، مارا به‌فکر ۶ عدد طبیعی اولیه می‌اندازد، و وجه‌های موازی مقابل هم، دراین مکعب، نوعی تقارن را بین این عددها به‌خاطر می‌آورد (مجموع خالهای هردووجه مقابل مساوی ۷ است).

همین قاعدهٔ هفت ،کلید حل مسأله‌های مربوط به یک یا چند تاس‌بازی است. کسی‌که از این خصوصیت استقرار خالها روی تاس‌بازی اطلاع نداشته باشد، به‌سختی می‌تواند «معماهایی» را که شما طرح می‌کنید، حل کند.

۲۰۶. چشم‌بندی عددی با تاسهای بازی

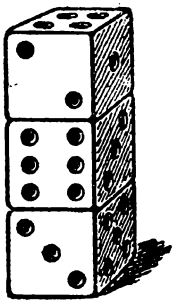
برای این‌مسأله، ۳تاس‌بازی‌لازم است. اگرتاس‌بازی‌ندارید ویادرتاسهایی که دارید، قاعدهٔ هفت رعایت نشده است، نمونه‌های مکعبی ازکاغذ ویا مقوا درست‌کنید وبادقت‌روی وجه‌های‌آنها عددهای‌موردنظررابنویسید.

شما روی خودرا برمی‌گردانید، یکی از افراد جمعیت۳ تاس‌بازی را روی میز می‌اندازد. شما به‌آنها پیشنهاد می‌کنیدکه تعداد خالهای

وجه‌های بالایی تاسهارا باهم جمع کنند، سپس یکی‌ازتاسهارا بردارند و تعداد خالهای وجه پایینی‌آنرا به‌مجموع قبلی اضافه‌کند. سپس ازآنها می‌خواهید همان تاسی را کـه برداشته بودند ، دوباره بغلتانند و تعداد خالهای وجه بالای‌آنرا به‌مجموع قبلی اضافه‌کنند. بعدازآن، شما روی خودرا برمی‌گردانید و سه‌تاس را در دست می‌گیرید و برای اسرارآمیز جلوه‌دادن‌کار، آنهارا روی میز می‌اندازید و به‌اصطلاح کمی فکر می‌کنید و درمیان تعجب دیگران، مجموع آخری راکه‌آنها بدست‌آورده بودند، اعلام می‌کنید.

روش‌کار. قبل ازآنکه تاسها را بردارید، مجموع خالهایی راکـه می‌بینید باهم‌جمع وعدد ۷ را به‌آن اضافه‌کنید،همان عددی‌بدست می‌آید که باید اعلام‌کنید.

دلیل‌آنرا روشن‌کنید.



مربوط به‌مسألهٔ ۲۰۷

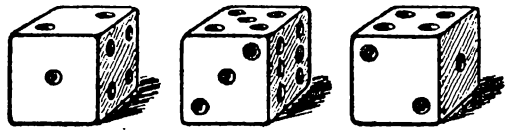
۲۰۷. مجموع خالهای وجه‌های ناپیدا

فرض‌کنید سه‌تاس‌بازی را به‌طورستونی‌روی‌هم گذاشته بـاشند (شکل را ببینید) . شما تنها با دیدن وجه بالایی ستون یا تنها دو وجه‌کناری آن، می‌توانید بلافاصله مجموع خالهای وجه‌هایی‌که دیـده نمی‌شود (در محلی‌کـه روی‌هم گذاشته شده‌اند و وجهی‌که در پائین روی میز است)، بگویید. مثلاً، در وضعی‌کـه روی شکل دیـده می‌شود ، مجموع موردنظرمساوی ۱۷ است.

چگونه می‌توان این‌مجموع را پیداکرد، راز محاسبه درکجاست؟

۲۰۸. با چه‌ردیفی، تاسها چیده شده‌اند؟

سه‌عدد تاس‌بازی، یک تکه‌کاغذ و یک مداد به‌دوستتان بدهید و از او بخواهیدکه تاسها را به ردیف دلخواهی قرار دهد، به‌این‌ترتیب یك عدد سه‌رقمی بدست می‌آورد، که رقمهای آن عبارتست از تعداد خالهای وجه‌های بالایی هریك از تاسها. مثلاً در ردیفی‌که تاسهای شکل قرار گرفته‌اند، عدد ۲۵۴ درست شده است. از دوستتان خواهش‌کنید این‌عدد را روی‌کاغذ بنویسد وسپس درکنارآن (درسمت راست)، به‌ترتیب‌تعداد خالهای وجه‌های‌پایینی تاسها را یادداشت‌کند. درمثال ما، عدد۲۵۴۵۲۳ بدست می‌آید. عددی را که بدست می‌آورد بر۱۱۱ تقسیم و نتیجه را به‌شما بگوید.



مربوط به‌مسألهٔ ۲۰۸

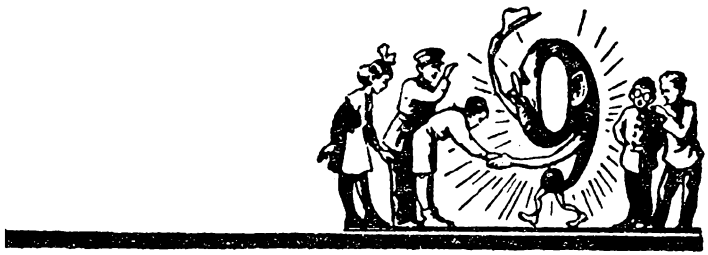
شما، بدون اینکه عمل‌ضرب انجام دهید، می‌توانید به‌سرعت عدد سه‌رقمی اصلی را پیداکنید ودرنتیجه ردیف قرارگرفتن تاسهارابگویید.

روش‌کار. ۷ را ازعددی‌که به‌شما می‌دهندکم‌کنید و نتیجه را بر۹ تقسیم‌کنید. رقمهای‌عددی‌که بدست می‌آید،ردیف تاسهارا به‌شمامی‌دهد.

مثلاً درمورد نمونه‌ای‌که ذکرکردیم:

۲۵۴ = ۹ : ۲۲۸۶ ؛ ۲۲۸۶ = ۷ − ۲۲۹۳ ؛ ۲۲۹۳ = ۱۱۱ : ۲۵۴۵۲۳

دلیل ریاضی این‌کارچیست؟



بخش هفتم

خاصیتهای عدد ۹

بعضی از ویژگیهای عملهای حساب دربارهٔ عددهای درست، به‌عدد ۹ بستگی دارد. هرخاصیتی از عدد ۹، که برای شما، آشنا باشد، می‌تواند دستاویزی برای سرگرمیهای ریاضی‌گوناگونی باشد. مثلاً خاصیت بخش‌پذیری بر ۹ را می‌دانید: عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که مجموع رقمهای آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد. از اینجا نتیجه می‌شود که مجموع رقمهای حاصلضرب هرعدد دلخواه در ۹، مضربی است از ۹ (یعنی بر ۹ بخش‌پذیر است). مثلاً داریم:

$$۳۵۴ \times ۹ = ۳۱۸۶$$

ودراین‌صورت $۶+۸+۱+۳$، یعنی ۱۸ بر ۹ بخش‌پذیر است.

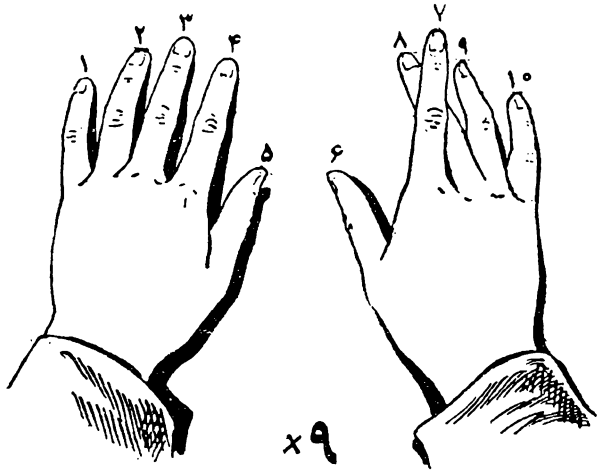
وقتی که کوچولویی، از به‌خاطرسپردن ضرب ده عدد اولیه در ۹، شکوه می‌کند، پدرش می‌تواند به او پیشنهادکندکه با روش ساده‌ای از انگشتهای دست خود برای حافظه‌اش کمك بگیرد.

این روش را دراینجا شرح می‌دهیم.

با حرکت ۱۰ انگشتها، کف هردودست خودرا روی میز درکنارهم

قرار دهید و انگشتها را بازکنید. هرانگشت را ازچپ به‌راست نمـایندهٔ یك عدد بگیرید: نخستین‌عدد انگشت سمت چپ، نمایندهٔ عدد۱، انگشت دوم نمایندهٔ عدد۲، انگشت سوم نمایندهٔ عدد۳ و غیره تا دهمین انگشت که نمایندهٔ عدد ۱۰ می‌شود. حالا فرض‌کنیدکه می‌خواهید یکی از ده عدد اولیه را در۹ ضرب‌کنید. برای این‌منظور، بدون‌اینکه دست‌خودرا از روی میز بردارید، انگشتی را که نمایندهٔ عدد مورد نظرشماست (که می‌خواهیدآنرا در۹ضرب‌کنید)، بلندکنید. دراین‌صورت، تعدادانگشتهای باقیمانده در سمت چپ انگشت بلند شده، دهگان حاصلضرب، و تعداد انگشتهای سمت راست‌آن، یکان حاصلضرب را نشان می‌دهد.

مثال. ضرب۷ در۹. کف‌دستهارا باانگشتهای باز روی‌میزبگذارید و انگشت هفتم را بلندکنید (شکل را ببینید)؛ در سمت چپ انگشتی‌که بلندکـرده‌اید، ۶ انگشت و در سمت راست‌آن ۳ انگشت باقی می‌ماند. یعنی حاصلضرب ۷در۹ مساوی ۶۳ است.



ساده‌ترین نوع ماشین‌حساب

این روش ضرب «ماشینی»، که درابتدا شگفت‌آور به‌نظر می‌رسد، به‌سادگی قابل‌توجیه است، اگربه‌خاطر بیاوریم که وقتی یکی از ده عدد اولیه را در ۹ ضرب می‌کنیم، مجموع رقمهای حاصلضرب برابر با ۹ می‌شود، وضمناً عدد دهگان حاصلضرب همیشه یك واحدکمتر از عددی است که در۹ضرب شده‌است.

دستهای آدمی را می‌توان یکی از نخستین «ماشینهای حساب» دانست.

چند خاصیت دیگر. چند خاصیت دیگر مربوط به ۹ را، که برای مسأله‌های بعد مفیدند، دراینجا می‌آوریم.

۱. همیشه بر۹ بخش‌پذیر است:

a) تفاضل بین هرعدد ومجموع رقمهای‌آن؛

b) تفاضل بین‌دوعددی‌که رقمهایشان یکی‌است، ولی‌به‌ردیفهای مختلف قرارگرفته‌اند؛

c) تفاضل‌بین دوعددی‌که مجموع رقمهای یکی‌بامجموع‌رقمهای دیگری برابر است.

۲. اگر ازچندرقم، عددهایی درست‌کنیم‌که تنها در ردیف رقمها باهم فرق داشته باشند،ازتقسیم جداگانهٔ‌آنها بر۹، باقیمانده‌های مساوی بدست می‌آید. این باقیمانده برابر است با باقیماندهٔ تقسیم مجموع رقمهای یکی‌ازاین عددها بر۹.

۳. اگرباقیماندهٔ تقسیم‌مجموع رقمهای‌عدد را بر۹، مانده‌بنامیم، دراین‌صورت:

a) ماندهٔ مجموع (یاتفاضل)دوعدد برابراست‌بامجموع(یاتفاضل) مانده‌های‌آن‌دوعدد؛

b) ماندهٔ حاصلضرب دوعدد برابراست باماندهٔ حاصلضرب‌مانده‌های دوعدد مفروض.

شما می‌توانیداین‌خاصیتهارا روی نمونه‌های عددی‌آزمایش‌کنید، واگر ازجبر اطلاع داشته‌باشید، می‌توانیدآنهارا ثابت‌کنید.

به عنوان تمرین، رابطهٔ مشابهی برای ماندهٔ خارج قسمت دوعدد پیداکنید.

حالا، مسأله‌های زیر را حل‌کنید ، از آنها می‌توانید به عنوان شیرینکاری هم استفاده‌کنید.

۲۰۹. کدام رقم حذف شده است؟

مسألهٔ ۱. فرض‌کنید دوستتان، پنهان ازشما، عددی با سه‌رقم یا بیشتر، بنویسد و باقیماندهٔ تقسیم‌آنرا بر۹، به‌شما بگوید.آنوقت به او پیشنهاد کنید، یکی‌ازرقمهای عددی راکه درنظرگرفته است، حذف‌کند (هرکدام راکه می‌خواهد) و باقیماندهٔ تقسیم عددی را که می‌ماند بر۹ پیداکند و دوباره به‌شما بگوید. شما به‌ترتیب زیر می‌توانید بلافاصله، رقمی راکه اوحذف‌کرده است نام ببرید:

a) اگر باقیماندهٔ دوم‌کمتر از باقیماندهٔ اول باشد ، تفاضل دوباقیمانده، رقم حذف شده را به‌شما می‌دهد؛

b) اگر باقیماندهٔ دوم بیشتر از باقیماندهٔ اول باشد ، ۹ واحد به باقیماندهٔ اول اضافه‌کنید ، تفاضل باقیماندهٔ دوم ازآن ، همان رقم حذف شده است.

c) اگر دوباقیمانده مساوی باشند ، رقم حذف‌شده یا صفر است یا ۹. چرا چنین است؟

یادآوری. درحالتی که یك تقسیم بدون باقیمانده باشد (یعنی عدد بزرگتر برعدد کوچکتر، بخش پذیر باشد)، باقیماندهٔ تقسیم را صفر به‌حساب می‌آوریم.

مسألهٔ ۲. به دوستتان پیشنهادکنید ، دو عدد درنظر بگیردکه رقمهایشان یکی باشد، ولی به‌ردیفهای متفاوت قرارگرفته باشند و عدد کوچکتر را ازعدد بزرگترکم کند. او، دوعدد اصلی و تفاضل آنها را به‌شما نمی‌گوید، ولی یکی از رقمهای تفاضل را (به‌جزرقمی که احتمالاً صفرباشد)،حذف می‌کند ومجموع بقیهٔ رقمهای این‌تفاضل را اعلام می‌کند. شما، برای پیداکردن رقم حذف‌شده‌کافی است، این مجموع را از نزدیکترین عدد مضرب ۹،کم کنید.

مثال: $۷۲۱۰۵ - ۲۵۰۷۱ = ۴۷۰۳۴$

رقم ۳ را حذف می‌کنیم . مجموع بقیهٔ رقمها ، مساوی ۱۵ ($= ۴+۷+۴$) می‌شود. تفاضل‌این‌عدد ۱۵، ازنزدیکترین‌عددمضرب ۹ به‌آن (یعنی‌عدد۱۸)، برابر است با ۳، واین‌همان رقمی است‌که حذف شده است. چرا چنین است؟

یادآوری. این مسأله را به طریقه‌های دیگری هم می‌توان طرح‌کرد. مثلاً می‌توان ازیك عدد دلخواه، مجموع رقمهای‌آنراکم‌کرد وسپس یکی‌از رقمهای تفاضل‌را (به‌جزصفریا۹) حذف‌کرد. اگرمجموع بقیهٔ رقمهای‌تفاضل به‌شما داده شود، باهمان روش می‌توانید رقم حذف‌شده را پیداکنید.

مسألهٔ ۳. عدد دلخواهی، مثل ۷۱۴۶ می‌نویسیم، یکی‌از رقمهای آن، ومثلاً ۴، را حذف می‌کنیم . از عددی‌که بدست می‌آید (ویك رقم از عدد اصلی‌کمتر دارد)، مجموع رقمهای عدد اولیه (یعنی ۱۸) راکم می‌کنیم. درمثال ما بدست می‌آید: $۷۱۶ - ۱۸ = ۶۹۸$.

بااطلاع براین‌تفاضل،چگونه می‌توان رقم حذف‌شده را پیداکرد؟

مسألهٔ ۴. دویا چندعدد بنویسیدکه تعداد رقمها درآنهایکی‌باشد. منهم به‌همان تعداد عدد می‌نویسم، شما یکی‌ازرقمهای یکی ازاین‌عددها را (به‌جزصفر) حذف می‌کنید و مجموع بقیهٔ عددها، و یا تنها مجموع رقمهای این‌مجموع، را به‌من می‌گویید. من بلافاصله رقم حذف‌شده را نام می‌برم.

مثال:

۶۰۵ + عددهایی‌که شما نوشته‌اید
۲۱۸
۸۱ عددهایی‌که من نوشته‌ام
۳۹۴
۱۲۹۸

مجموع رقمهای این‌مجموع مساوی۲۰ ورقم حذف‌شده، مساوی ۷ است.

من چه عددهایی را باید بنویسم و رقم حذف‌شده را چگونه باید پیداکنم؟

مسألهٔ ۵. درمسألهٔ قبل،وقتی‌که شماچند عدد را می‌نوشتید،من‌هم به‌همان تعداد زیرآنها می‌نوشتم . ولی دراین مسأله، من تنها یك عدد می‌نویسم.

مثال:

۳۵۲۱ + عددهایی‌که شما نوشته‌اید
۴۰۸۶
۷۲۱۹
۴۲۷۲ عددی‌که من نوشته‌ام
۱۹۰۱۸

مجموع رقمهای مجموع مساوی ۱۹ و رقم حذف شده، مساوی

۸ است.

من چه‌عددی را باید بنویسم وچگونه می‌توانم رقم حذف شده را پیداکنم؟

مسألهٔ ۶. همین فکررا می‌توان به‌شکل دیگری بیان‌کرد:

از دوستتان بخواهید چندعدد (که تعداد رقمهای‌آنها یکی‌باشد)، به‌طورستونی زیرهم بنویسد.

آنوقت شما درکنارعددهایی‌که اونوشته است(سمت راست‌یاسمت چپ، هرجورکه دوستتان بخواهد)، رقمهایی می‌نویسید، به‌نحوی‌که در هرمورد مجموع رقمهای‌آن عدد را مضربی از۹کند. حالا ازدوست خود بخواهید یکی از رقمها را، دریکی ازعددها، حذف‌کند، مجموع‌آنچه را کـه باقی می‌ماند ، طبق قاعدهٔ جمع ، بـدست آورد و مجموع رقمهای حاصلجمع را به‌شما بگوید. شماطبق روشی‌که دیگر برایتان معلوم‌است، می‌توانید بلافاصله، رقم حذف‌شده را نام ببرید.

مثال:

دوستتان نوشته است

۶۳۲۱۶ + ← شما نوشته‌اید

۴۴۸۰۲

۴۷۶۲۱

۵۱۹۲۱

۹۵۲۳۸

۳۰۲۱۹۸

مجموع رقمهای مجموع (بدون محاسبهٔ رقم ۹)، مساوی ۱۴ و رقم حذف‌شده مساوی ۴ است.

جالب اینست‌که رقمهایی راکه شمامی‌نویسید، می‌توان‌به‌صورت

عدد یك رقمی و درهرجای دلخواه نوشت. چرا؟

۲۱۰. خاصیت پنهانی

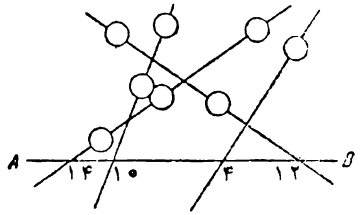
عدد۱۳۱۳ به‌سادگی درخاطرمی‌ماند، بنابراین می‌توان روی‌آن عملهارا به‌راحتی انجام داد ومعمایی درست‌کرد.

برای این‌منظور از دوستتان بخواهیدکه عدد ۱۳۱۳ را بنویسد و عدد دلخواهی‌را ازآن‌کم‌کند. سپس یکی‌ازرقمهای‌تفاضل‌را (غیرازصفر) حذف‌کند ، به عددی‌کـه از۱۳۱۳کم‌کرده بـود ۱۰۰ واحد اضافه‌کند و این‌دورا پهلوی هم ازچپ به‌راست (یا ازراست به‌چپ) بنویسد ونتیجه را به‌شما نشان دهد. شما به‌سادگی می‌توانید،رقم حذف‌شده راپیداکنید.

عدد۱۳۱۳ چه‌بستگی با عدد ۹ داردکه به‌پیداکردن رقم‌حذف‌شده کمك می‌کند، وچگونه باید این رقم را پیداکرد؟

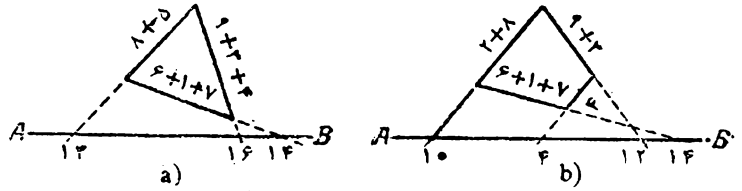
۲۱۱. بازهم چند خاصیت عجیب، برای پیداکردن عددهای پنهان

مسألهٔ ۱. از نه‌عدد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ و ۹ ، هشت عدد دلخواه را انتخاب می‌کنم وآنهارا به‌صورت دلخواهی روی صفحهٔ‌کـاغذ قـرار می‌دهم . بـرای اینکه بـرای شما معلوم نباشد کـه کدام عـددها را انتخاب‌کرده‌ام،آنها را به صورت دایره‌هایی روی شکل‌نشان داده‌ام. در جای دلخواهی از صفحه ، خط راستی رسم می‌کنم وآنرا خط‌حاصل‌جمع می‌نامم . عددهای نوشته شده را به‌وسیلهٔ خطهای راست یامنحنی به‌هم می‌پیوندیم وبه‌خط حاصل‌جمع



مربوط به‌مسألهٔ (۱-۲۱۱). کدام عدد بین عددهای انتخابی نیست؟

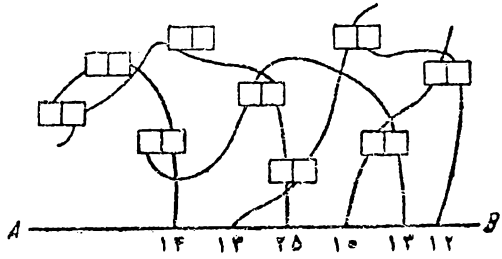
وصل می‌کنیم، این‌خطها را به‌هرطریقی می‌توان رسم‌کرد، ولی ازهرعدد باید تنها یك‌خط عبورکند. روی خط حاصل‌جمع، مجموع عددهایی‌راکه درطول هرخط قرارگرفته است می‌نویسم. به‌شما تنها همین‌عددهای روی خط حاصل‌جمع، و یا حتی فقط مجموع رقمهای آنها را می‌گویم. مثلاً دراینجا داریم ۱۳ = ۲+۱+۴+۱+۴+۱+۱. از روی همین عدد ۱۳، چگونه می‌توانید عددی راکه انتخاب نشده است، پیداکنید؟



مربوط به‌مسألهٔ (۱-۲۱۱)

یادآوری. به جای اینکه عددها را روی صفحهٔ کاغذ پخش‌کنیم، می‌توان عددها را در طول ضلعهای یك مثلث (شکل a)، یا یك چهارضلعی (شکل b) و یا هرچند ضلعی دیگر قرارداد و روی خط حاصل‌جمع، مجموع عددهایی راکه درطول هرضلع قراردارد نوشت.

مسألهٔ ۲. درهرکدام ازمستطیلهای شکل، یکی‌ازعددهای دورقمی ۱۱، ۲۲، ۳۳، ۴۴، ۵۵، ۶۶، ۷۷، ۸۸ و ۹۹ را نوشته‌ایم، به نحوی‌که درهر مربع‌کوچك، یکی‌از رقمها جاگرفته باشد. همهٔ رقمها به جزیکی را به



مربوط به‌مسألهٔ (۲-۲۱۱). کدام رقم را انتخاب‌کرده‌ام؟

وسیلهٔ خطهایی به‌هم وصل کرده‌ایم و به‌خط حاصل‌جمع رسانده‌ایم (متوجه باشید، می‌گوییم همهٔ رقمها، نه عددها)، به نحوی‌که هررقم تنها روی یکی‌ازاین خطها قراردارد. روی خط حاصل‌جمع، مجموع رقمهایی راکه درطول هرخط قرارگرفته‌است، نوشته‌ایم. با دردست‌داشتن این‌مجموعها، رقمی راکه خارج از خطها قرارگرفته است، پیداکنید. آنهایی‌که مسألهٔ قبل را حل‌کرده باشند، حل این‌مسأله برایشان مشکل نیست.

مسألهٔ ۳. عددهای‌صحیح از۱تا۸ را درنظر بگیرید ویکی‌ازآنهارا کناربگذارید. هفت عدد باقیمانده را در دو ردیف یا بیشتر و به‌صورت عددهای چند رقمی بنویسید. این‌عددهای چندرقمی را باهم جمع‌کنید و مجموع، یا مجموع رقمهای مجموع را به مـن بگویید، من بلافاصله خواهم‌گفت‌که ازاین ۸ عدد، کدامیك راکنارگذاشته‌اید. چطور؟

۲۱۲. به‌کمك یکی‌ازرقمها، سه‌رقم دیگررا پیداکنید

یك‌عدد دورقمی بارقمهای مساوی درنظربگیرید وآنرا در۹۹ضرب‌کنید، به سادگی می‌توان فهمید که در حاصلضرب یك عدد چهاررقمی بدست می‌آید. اگریکی ازرقمهای این‌حاصلضرب معلوم باشد، چگونه می‌توان تمام حاصلضرب را پیداکرد؟

مثلاً فـرض‌کنید سومین رقم حاصلضرب مساوی ۵ باشد، تمام حاصلضرب چقدر است؟

۲۱۳. پی‌بردن به‌تفاضل

یك عدد سه‌رقمی پیش‌خود درنظر بگیرید، طوری‌که رقمهای اول وآخر آن مساوی هم نباشد (مثل۶۲۱). حالا عددی را درنظربگیریدکه ازهمان رقمهای عدد قبل، منتهی‌درجهت عکس‌درست شده باشد(درمثال‌ما۱۲۶).

تفاضل این‌دوعدد را پیداکنید، یعنی عددکوچکتر را از عدد بزرگترکم کنید (دراینجا ۴۹۵ = ۱۲۶ — ۶۲۱). حالا اگرآخرین رقم این‌تفاضل(۵) را به من بگویید، من بلافاصله تمام تفاضل را به شما خواهم گفت. به‌چه‌ترتیب؟

۲۱۴. هرکدام چندسال دارند؟

با جابه‌جاکردن رقمهای سن A، سن B بدست می‌آید. اختلاف سن A و B، مساوی دوبرابر سن C است، ولی B درست ۱۰ برابر C سن دارد. سن هرکدام را پیداکنید.

۲۱۵. رمزکارکجاست؟

یکی ازآشنایان من، در دوره‌ای‌که از دوستان تشکیل شده بود، ادعاکرد که می‌تواند عددهایی باتعداد رقمهای فرد بنویسد،که این‌خاصیت‌عجیب را داشته باشند:

اگرمجموع رقمهای آنرا جمع‌کنیم، سپس دوباره درعددی‌که از این‌مجموع بدست می‌آید، مجموع رقمهارا پیداکنیم واین‌کاررا تاجایی ادامه دهیم‌که به‌عدد یك‌رقمی برسیم، همیشه این عدد یك رقمی مساوی رقم وسط عدد اصلی باشد.

او به‌عنوان مثال عدد سه‌رقمی۴۳۵ وسپس‌عدد پنج رقمی۴۶۸۵۳ را نوشت و حتی بنابرپیشنهاد ما ازعدد سیزده‌رقمی۱۲۰۷۹۴۱۸۰۰۵۵۴ نام برد. او عددهارا با تعداد رقمهای دلخواه ما می‌نوشت... و درهربار خاصیت عجیبی‌که‌گفته بود، درآن عدد پیدا می‌شد.

درمورد همین سه‌عدد مذکور، این‌خاصیت راآزمایش می‌کنیم:

$$۴+۳+۵=۱۲;\ ۱+۲=۳$$

کتابخانه مجازی ریاضیات

$$۴+۶+۸+۵+۳=۲۶;\ ۲+۶=۸$$
$$۱+۲+۷+۹+۴+۱+۸+۵+۵+۴=۴۶;\ ۴+۶=۱۰;$$
$$۱+۰=۱$$

می‌بینیم، عدد یك رقمی که در آخر کار بدست می‌آید، مساوی رقم وسط عدد اصلی است.

من و دوستانم کوشش کردیم با عددهایی که خودمان می‌نویسیم ؛ این خاصیت را آزمایش کنیم، ولی اغلب، این نتیجه بدست نمی‌آمد.

رمز کار آشنای من در کجاست؟

بخش هشتم

به‌کمك جبر و بدون کمك آن

وقتی‌که ریاضیات، به‌عنوان یك دانش، پیشرفت می‌کند، هنرحل مسأله‌ها هم روبه‌کمال می‌رود. وقتی‌که علامتهای حرفی وارد درحساب شد واستفادهٔ ازآنها پیشرفت‌کرد، روشهای حل خالص حسابی، به تدریج جای خودرا به جبر، و محتوی اصلی آن ، یعنی معادله داد . نشان‌دادن عددهای مجهول به‌وسیلهٔ حرف، وسپس ایجاد رابطه بین‌عددهای‌مجهول وعددهای معلوم، یعنی‌تشکیل معادله، به‌عنوان روشی پرقدرت وعمومی، برای حل‌مسأله‌های مختلف شناخته شد.

ما برای حل یك مسأله، همیشه به‌استدلال متوسل می‌شویم، ولی تمایل ریاضیات به‌این سمت است‌که تاآنجاکه ممکن است این استدلالها کوتاهتر و عمومی‌تر باشد . دربعضی موارد، راحت‌تر اینست‌که استدلال را ازمجهول به‌طرف معلوم ببریم و به‌این‌ترتیب، یك یا چند معادله تشکیل دهیم (راه جبری). دراین‌روش،برای‌اینکه مجهول‌را برای‌تشکیل‌معادله، به مناسب‌ترین وجه انتخاب‌کنیم ؛ باید خصوصیتی راکه هرمسأله برای خوددارد، درنظربگیریم. برای اینکه بتوان با سادگی بیشتر، مسأله‌های

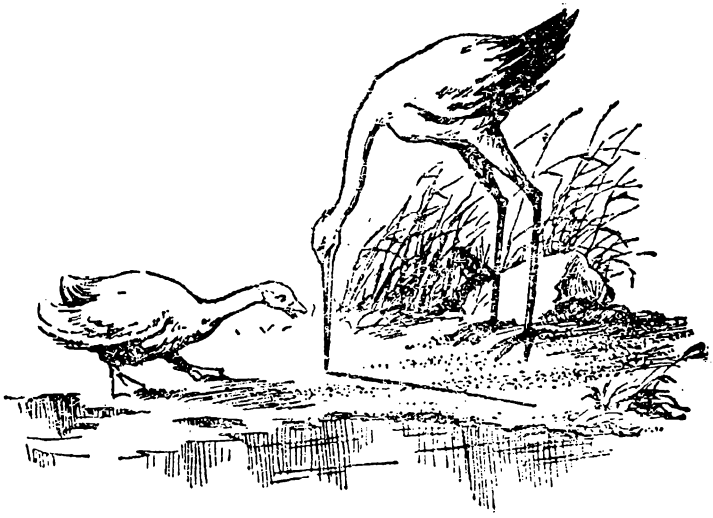
مشکل را حل‌کرد ، باید به روش استدلالهای جبری مسلط بود. ولی در بعضی ازموارد، طبیعی‌تر اینست‌که حل مسأله را از معلوم به‌طرف مجهول دنبال‌کنیم وپشت‌سرهم،مرحله‌های مختلف را طی‌کنیم تابه‌جواب‌برسیم (راه حسابی).

این‌دو روش استدلال را باید مکمل یکدیگردانست؛ با استفاده از هرکدام ازآنها می‌توان راه‌حلهای‌ظریف وجالبی برای مسأله‌هاپیداکرد.

بیش‌ازپنجاه سال است‌که دربین خانواده‌ها، وگاهی درمدرسه‌ها، این مسأله مطرح می‌شود:

چگونه غاز توانست به‌کمك لك‌لك، مسألهٔ خودش را حل‌کند ؟ غازی ضمن پروازخود به‌یك دسته غازبرخوردکردکه به‌طرفی پرواز می‌کردند، او به‌آنهاگفت:

ـ مثل اینکه شما صد نفرید!



ـ حالا به‌آنچه‌که من روی شنها رسم می‌کنم، نگاه‌کن

رهبرپیرغازها به‌اوجواب داد:

ـ نه، ما صدغاز نیستیم! بلکه: ماوما و نصف‌ماو، نصفه‌ای‌ازنصف‌ما، گرتوهم با ما شوی، جملگی صد می‌شویم. حالا خودت حساب‌کن که ما چندنفریم؟

غاز تنها، همانطورکه پرواز می‌کرد فکر می‌کرد. راستی دستهٔ دوستان او، چند غاز بودند؟ او هرچه فکرکرد، پاسخی نیافت وبه‌هرکه روآورد، مسألهٔ اورا حل‌نکرد. ناگهان درساحل برکه‌ای، لك‌لکی را دید که با پاهای درازش راه می‌رود و به دنبال قورباغه می‌گردد. لك‌لك پرندهٔ مهمی است ودربین پرندگان به‌ریاضیدان‌بودن مشهور است: گاهی ساعتهای متوالی روی یك پای خود بی‌حرکت می‌ایستد وفکر می‌کند، و ظاهراً به‌حل مسأله‌های ریاضی‌مشغول است. غاز ازدیدن لك‌لك‌خوشحال شد، به برکه نزدیك شد، به‌لك‌لك سلام‌کرد وبرای اوتعریف‌کردکه چطور رهبر دوستان‌او، معمایی‌برایش‌طرح‌کرده‌است وچطور به‌هرکجا روآورده است، کسی نتوانسته است، مشکل اورا بگشاید.

لك‌لك سینه‌اش راصاف‌کرد وگفت:

ـ من‌کوشش می‌کنم مسأله‌ات را حل‌کنم. فقط باید دقت‌کنی و سعی‌کنی بفهمی! می‌شنوی!

غازجواب داد:

ـ گوش می‌کنم، سعی‌خودم را خواهم‌کرد.

ـ خوب، چی‌گفته بودی؟ اگر به غازهایی‌که برخوردکرده‌ای به اندازهٔ خودشان، بعد نصف آنها، و بعد یك‌چهارم آنها و بعد خودت را اضافه‌کنی، رویهم صدتا می‌شود؟ بله؟

ـ بله همینطور است.

ـ حالا نگاه‌کن ، مـن همه‌چیز را روی شنهای ساحل برایت رسم می‌کنم.

لك‌لك نوك خودرا روی‌شنها قرارداد، اول يك‌پاره‌خط‌کشید، کنار آن پاره‌خط دیگری به همان اندازه‌کشید . بعد پاره‌خطی به اندازهٔ نصف اولی، سپس‌پاره‌خطی‌به‌اندازهٔ يك‌چهارم پاره خط اولی وبالاخره پاره‌خط خیلی‌کوتاهی ـ درحد يك نقطه ـ پهلوی‌آنها قرارداد. به‌این‌ترتیب:

غاز جلوترآمد ، حالت پرواز به خـودگرفت و از بالا با دقت به پاره‌خطها نگاه‌کرد، ولی چیزی نفهمید. لك‌لك پرسید:

ـ فهمیدی؟

غاز با دلتنگی جواب داد:

ـ نه، چیزی نمی‌فهمم!

ـ آه ازدست تو! بیا جلو ودرست نگاه‌کن: همانطورکه توگفتی، يك دسته، بازهم يك دسته، بعدنصف‌آن دسته، سپس نصف‌نصف (یعنی یکچهارم)آن دسته وبالاخره خود تو، منهم به‌همین‌ترتیب خطهارا رسم کرده‌ام ، اول يك پاره‌خط ، بازهم يـك پاره‌خط ، بعد نصف آن ، سپس نصف نصف‌آن و بالاخره يك پاره‌خط‌کوچك به‌جای خود تو. فهمیدی؟

ـ بله حالا فهمیدم!

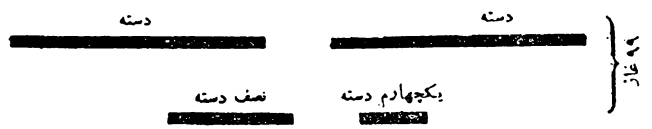
ـ خوب اگر به‌آن دسته غاز ، اول يك دستهٔ دیگر، بعد نصف‌آن دسته، سپس نصف‌نصف‌آن دسته وبالاخره تو اضافه شوی، روی‌هم چند غاز می‌شود؟

ـ صدغاز!

ـ حالا اگرتو به‌آنها اضافه نشوی، چندغاز می‌شوند؟

ـ نود و نه‌تا!

ـ بسیارخوب ! من این پاره‌خط‌کوتاه را پاك می‌کنم ، آنچه‌که باقی می‌ماند نمایندهٔ ۹۹ غاز می‌شود. لك‌لك بانوك خود نشان داد:



لك‌لك ادامه داد:

ـ حالا به‌من بگوکه نصف دسته، چندتا یکچهارم دسته است؟

غاز به‌خطهای روی شن نگاه‌کرد، کمی فکرکرد و گفت:

ـ پاره‌خطی‌که نمایندهٔ نصف دسته است، دوبرابر پاره‌خطی است که نمایندهٔ یکچهارم دسته است ، یعنی درنصف، دوتا یکچهارم وجود دارد؟

ـ آفرین! حالا بگو دریك دسته، چندتا یکچهارم وجوددارد؟

ـ البته‌که چهارتا!

ـ خوب! حالا اگر یك دسته داشته باشیم، بازهم یك دستهٔ دیگر، باز یك نصف دسته و بالاخره یك یکچهارم دسته ؛ اینها روی‌هم چندتا یکچهارم می‌شود؟

غازفکری‌کرد و گفت:

ـ دستهٔ اول می‌شود ۴تا یکچهارم ، دستهٔ دوم هم ۴تا یکچهارم است، تا اینجا روی‌هم ۸تا یکچهارم می‌شود ؛ در نصف دسته هم دوتا یکچهارم است، روی‌هم ۱۰تا؛ یك‌عدد یکچهارم هم داریم: روی‌هم۱۱تا یکچهارم دسته، ۹۹غاز را تشکیل داده‌اند.

لك‌لك تأییدکرد:

ـ اینطور! دوباره تکرارکن که درپایان کار چه بدست‌آورده‌ای؟

غازجواب داد:

ـ من بدست‌آوردم که در ۱۱تا یکچهارم دسته، ۹۹غازوجوددارد.

ـ پس دریکی‌ازاین یکچهارمها، چند غاز وجوددارد؟

غاز۹۹ را بر۱۱تقسیم کرد وگفت:

ـ دریکچهارم دسته، ۹ غازبوده است.

ـ پس درتمام دسته، چند غاز؟

ـ دسته، چهاربرابریکچهارم است... وغازباخوشحالی ادامه داد: من با ۳۶ غاز برخوردکرده بودم!

لك‌لك با غرورخاصی گفت:

ـ به همین سادگی ! و تو خودت نتوانستی آنرا پیداکنی! آه از دست تو!

این‌مسأله، به‌زبان جبرخیلی‌کوتاه،نوشته وحل می‌شود.یکچهارم دسته را x می‌گیریم، در اینصورت نصف دسته ۲x و یك دستهٔ‌کامل ۴x می‌شود. بنابرفرض داریم:

$$۴x+۴x+۲x+x=۹۹$$

که ازآنجا $۱۱x=۹۹$ و $x=۹$ و $۴x=۳۶$ بدست می‌آید . دسته، از۳۶ غازتشکیل شده بود.

* * *

مسأله‌های زیر را با هر روشی‌که راحت‌ترید، حل‌کنید : روش حسابی، روش جبری، روش ترسیمی و غیره. جوابهایی‌که درآخرکتاب داده‌شده است، استدلال وجواب شمارا بازرسی می‌کند.

۲۱۶. کمك متقابل

در سالهای اول بعدازجنگ جهانی، وسایل‌کار برای روستاهاکم بود و به‌همین‌مناسبت مراکزمختلف ماشینهای زراعتی، برای رفع این‌کمبود؛ به‌یکدیگر کمك می‌کردند.

یکبار، یکی‌ازسه مرکزماشین زراعتی‌نزدیك به‌هم، آنقدرماشین‌که دومرکز دیگرداشتند، به‌آنها داد.

بعدازمدتی، مرکزدوم، به دومرکز دیگر، به‌همان‌اندازه‌که ماشین زراعتی درآن‌لحظه داشتند، داد. درپایان‌کار، مرکزسوم به دومرکز اول ودوم، به‌همان اندازه‌که خودشان ماشین زراعتی‌داشتند، داد. دراین‌موقع، هرکدام ازسه مرکز، ۲۴ماشین زراعتی داشتند.

درابتدا، درهرکدام ازسه مرکز، چندماشین وجود داشته است؟

۲۱۷. مرد طمع‌کار

مرد بیکاره‌ای این‌طرف وآن‌طرف می‌رفت وبدون‌اینکه به‌فکرتلاش‌باشد، دائماً ازبی‌پولی خودگله می‌کرد. به‌هرکس می‌رسید، درد دلش بازمی‌شد و از اینکه نمی‌تواند پولدارشود و زندگی راحتی داشته باشد، آه و ناله می‌کرد.

کلاه‌برداری تصمیم‌گرفت ازطمع این‌مرد استفاده‌کند. پیش‌اوآمد وازموجودیش پرسید. وقتی‌که ازموجودی‌مردبیکاره‌آگاه شد، به‌اوگفت:

ـ من راه‌حل ساده وخوبی برای پولدارشدن تودارم.

ـ چطور؟

ـ درخارج این‌شهر پلی بر رودخانه است، تو هربارکه ازپل عبور کنی، من پولت را دوبرابرخواهم‌کرد.

ـ توچرا پولت را مجانی به‌من می‌دهی؟

ـ من ازاین‌بابت ازتو دستمزدی خواهم گرفت.

ـ چقدر؟

ـ هربارکه پول ترا دوبرابرکردم، ۲۴تومان بابت دستمزد به من خواهی پرداخت.

ـ همین!

ـ بله، همین!

بعدازتوافق، به بیرون شهررفتند، بیکاره ازپل‌گذشت و همراهش پول اورا دوبرابرکرد وبعد۲۴تومان دستمزدخودراگرفت.

بیکاره دوباره از پل عبورکرد، بازهم پولش دوبرابر شد و مبلغ دستمزد را پرداخت. برای سومین‌بارعمل‌تکرارشد، ولی وقتی‌که این‌بار، مرد بیکاره، بعداز دوبرابرشدن پولش، ۲۴تومان دستمزد مردکلاهبردار را پرداخت، دیگرچیزی برایش نمانده بود،که برای دوبرابرکردن‌آن از پل‌عبورکند. طمع مرد بیچاره، تمام پول اورا برباد داده بود.

آیامی‌توانید بگوییدکه موجودی‌این‌مرد، درابتدا چقدربوده‌است؟

۲۱۸. کوچولوی باهوش

سه برادر۲۴سیب را بین‌خود به‌این‌ترتیب تقسیم‌کردندکه هرکدام‌به‌تعداد سالهای سن‌سه‌سال قبل‌خود، صاحب سیب شدند. برادرکوچکتر،که سهم کمتری‌گرفته بود، بااستفاده ازهوش خود، به برادرانش پیشنهادکردکه سیبهای خودرا به‌این‌ترتیب مبادله‌کنند؛ اوگفت:

ـ من نصف سیبهایم را برای خودم نگه می‌دارم وبقیه را به‌طور مساوی بین شما دونفر تقسیم می‌کنم، بعد باید برادر وسط همین‌کار را بکند، یعنی نصف سیبهایش را برای خودش نگه دارد و بقیه را به‌طور

مساوی بین من و برادر بزرگترم تقسیم‌کند . سرآخر برادر بزرگترنصف آنچه که دارد بـرای خودش نگه دارد و بقیه را بین مـن و برادر وسط تقسیم‌کند .

برادرهای بزرگتر ،کـه به پیش‌بینی برادرکوچکتر تـوجه نکرده بودند، با پیشنهاد او موافقت کردند . در نتیجه ، تعداد سیبهای هرسه مساوی شد.

برادرکوچکتر وهرکدام ازدوبرادر اوچند سال داشته‌اند؟

۲۱۹. شکارچی‌ها

سه‌شکارچی، چند روزمتوالی‌را درجنگل برای شکارگذراندند. صبح روز آخر، حادثهٔ ناگواری پیش‌آمد: وقتی‌که پیاده از جوی‌آبی می‌گذشتند، دوشکارچی‌فشنگدانهای خودشان راکمی‌خیس‌کردند وقسمتی‌ازفشنگهای آنها بی‌مصرف شد. سه‌دوست، فشنگهایی راکه برایشان باقی‌مانده بود، به‌طورمساوی بین‌خودشان تقسیم‌کردند.

بعدازآنکه هریك ازشکارچی‌ها، چهارتیر درکردند، برای‌همهٔ‌آنها روی‌هم‌آنقدر فشنگ باقی ماندکه هریك ازآنها ، بعد از تقسیم فشنگها داشتند.

درموقع تقسیم، روی‌هم چقدرفشنگ داشته‌اند؟

۲۲۰. قطارمقابل

دوقطارمسافری به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. طول هریك از قطارها ۲۵۰ متر و سرعت هرکـدام ۴۵کیلومتر در ساعـت است . از وقتی‌کـه لکوموتیورانها به‌هم می‌رسند،تاوقتی‌که راهنمایان واگنهای‌آخر ازکنار هم عبور می‌کنند، چندثانیه طول می‌کشد؟

۲۲۱. توکا، دستنویس را ماشین می‌کند.

شروین، دستنویسی را به‌توکا سپرد تاآنرا ماشین‌کند. توکاگفت:

ـ من به‌طورمتوسط، روزی ۲۰ صفحه ماشین خواهم‌کرد. منتهی نیم اول دستنویس را روزی ۱۰صفحه، و نیم دوم‌آنرا روزی ۳۰ صفحه ماشین می‌کنم، درنتیجه به‌طورمتوسط، روزی ۲۰ صفحه خواهد شد.

ولی شروین‌گفت:

ـ تو اشتباه حساب‌کردی!

ـ چه‌اشتباهی؟ ۴۰ = ۳۰ + ۱۰ ، ۲۰ = ۲ : ۴۰. نیمهٔ‌اول‌دستنویس را روزی ۱۰ صفحه‌کمترماشین می‌کنم، درعوض نیمهٔ دوم را روزی۱۰ صفحه بیشترازحد متوسط لازم ماشین می‌کنم واین،آنرا جبران می‌کند.

ـ اینطور نیست؛ میزان متوسط‌کار تو،کمتر از روزی ۲۰ صفحه خواهد شد. کمی فکرکن، خودت هم می‌فهمی!

شماحق‌را به‌چه‌کسی می‌دهید؟ برای‌نتیجه‌گیری خود چه‌استدلالی دارید؟

۲۲۲. داستان قارچها

پنج دوست: ماروسیا،کولیا ، وانیا ، آندریوشا و پتیا ، ازاردوی پیشاهنگی، مأمور جمع‌آوری قارچ شدند. ولی در واقع، تنها ماروسیا به‌طور جدی به‌کارجمع‌آوری قارچ پرداخت، درحالیکه پسرها ، بیشتر وقت را روی علفها درازکشیدند وافسانه‌های مختلفی برای هم تعریف‌کردند.

درنتیجه،وقتی‌که می‌خواستند به‌اردو برگردند،معلوم شدکه سبد پسرها خالی است، درحالیکه ماروسیا۴۵ قارچ درسبد خود داشت.

ماروسیا، نسبت به‌آنها همدردی‌کرد وگفت: این برای شماخوب نیست‌که با سبدهای خالی به اردو برگردید و همه قارچهای خود را در

مربوط به‌مسألهٔ ۲۲۲. ماروسیا، فارچهای خودرا بخشید.

سبدهای آنها ریخت (حتی یك قارچ هم برای خودش نگه نداشت). ولی در برگشت به اردو، کولیا و آندریوشا به‌منطقهٔ قارچی برخورد کردند و مقداری به‌قارچهای خوداضافه کردند، کولیا ۲قارچ پیداکرد و آندریوشا، قارچهای سبد خودرا دوبرابر کرد. وانیا و پتیا، درتمام راه شیطنت کردند و قسمتی ازقارچهای خودرا ازدست دادند. وانیا دو قارچ خودراگم کرد و پتیا، نصف قارچهایی راکه از ماروسیاگرفته بود، ازدست داد.

ولی عجیب این بودکه وقتی به‌اردو رسیدند، تعداد قارچهای همهٔ پسرها یکی بود. آیا شما می‌توانید حساب کنیدکه هرکدام ازاین چهارپسر، چند قارچ ازماروسیاگرفته بود؟

۲۲۳. چه‌کسی زودتر برمی‌گردد؟

دو ورزشکار، دریك زمان مسابقهٔ قایق‌رانی را شروع کردند : یکی روی رودخانه، درجهت جریان آب و در خلاف جهت آن؛ دیگری روی دریاچهٔ آرامی که درکناررودخانه بود، برای همین فاصله. فرض کنیم که نیروی دوقایق‌ران درتمام مدت مسابقه یکی باشد. کدامیك ازآنها زودتر برمی‌گردند؟ زمانی‌راکه برای دورزدن صرف می‌کنند، به‌حساب نمی‌آوریم.

۲۲۴. شناگر وکلاه

یکنفر از قایقی که با جریان آب حرکت می‌کند، به رودخانه پرید، مدتی درخلاف جهت جریان آب شنا کرد وسپس برگشت و باشنا به‌قایق‌رسید. درکدام جهت وقت بیشتری صرف کرده است: برای شنا درخلاف جهت جریان آب، یا برای رسیدن به‌قایق؟ یا اینکه شاید، دو زمان باهم برابر است ؟ فرض کنیدکه نیروی عضلانی، برای شنا، درتمام مدت یکنواخت باشد.

پاسخ درست چنین‌است: برای رسیدن به‌قایق، همانقدر وقت‌لازم است‌که اوبرای شنا درخلاف جهت حرکت‌آب، صرف‌کرده بود.

درواقع، جریان‌آب، شناگر وقایق را با یك سرعت به‌طرف پایین می‌برد، یعنی جریان‌آب هیچ اثری درفاصلهٔ بین‌شناگر وقایق ندارد،مثل حالتی‌که اصلاً جریانی وجود نداشته باشد. ازاینجا ، اگرفرض‌کنیم‌که آب ساکن است، روشن می‌شودکه زمان دورشدن ازقایق بازمان نزدیك‌شدن به‌آن، یکی می‌شود.

حالا فرض‌کنید، شناگری از روی یك پل‌خودرا به‌داخل رودخانهٔ کوچکی بیندازد و درخلاف جهت حرکت آب شناکند . درست درهمان لحظه‌ای‌که شناگرخودرا به‌آب انداخت،کلاه یکی از تماشاگران ازهمان نقطهٔ پل به‌آب افتاد وجریان‌آب‌آنرا به‌جلو برد. بعداز۱۰ دقیقه، شناگر برگشت و وقتی‌که به‌پل رسید، از او خواهش‌کردندکه بی‌توقف به‌شنای خود ادامه دهد وکلاه را بگیرد. شناگر درزیرپل دوم،که ۱۰۰۰متربا‌پل اول فاصله داشت،کلاه را ازآب‌گرفت. سرعت شناگررا نمی‌دانیم، ولی می‌دانیم‌که نیروی خودرا درتمام‌مدت حرکت، تغییرنداده است. باهمین آگاهیهایی‌که دارید ، شما می‌توانید سرعت جریان آب رودخانه را پیدا کنید. راه‌حل خود را با آنچه‌که درقسمت حل و جواب داده‌ایم، مقایسه کنید وبخصوص به راه‌حل دومی‌که درآنجاآمده است، توجه‌کنید.

۲۲۵. دوکشتی

دوکشتی دریك زمان از اسکله به‌راه افتادند.کشتی استپان رازین به‌طرف پایین و درجهت جریان‌آب، وکشتی تیمیریازوف به‌طرف بالا و درخلاف حرکت‌آب. سرعت‌اختصاصی[1] دوکشتی یکی‌است، درهمان‌لحظهٔ حرکت،

۱) سرعت اختصاصی به‌سرعتی‌گفته می‌شودکه باصرف همان انرژی، درآب‌ساکن و بدون حرکت، بدست می‌آید.

کمربند نجات ازکشتی استپان رازین به‌آب افتاد،که باجریان‌آب‌شروع به حرکت‌کرد. بعد از یك ساعت، به هردوکشتی دستور رسیدکه جهت حرکت خودرا عوض‌کنند: آنکه به‌طرف پایین می‌رفته است، به‌طرف‌بالا برگردد وآنکه به‌طرف بالا می‌رفته است، به‌طرف پایین حرکت‌کند. آیا فرماندهٔ‌کشتی اسپتان رازین موفق می‌شود ، قبل از برخورد دوکشتی، کمربند نجات را ازرودخانه بردارد؟

۲۲۶. فکرراآزمایش‌کنید

دوقایق تندرو، درطول یك دریاچهٔ بزرگ ، بدون اینکه درساحل توقف کنند، در رفت وآمدند. آنها دریك زمان دوساحل‌مقابل‌را ترك می‌کنند: قایق M، ساحل A وقایق N، ساحل B را، ودر۵۰۰متری ساحلA به‌هم می‌رسند. پس از برگشتن، ملاقات دوم‌آنها در۳۰۰ متری ساحل B پیش می‌آید.

با همین داده‌ها، طول دریاچه ونسبت سرعت قایقها را پیداکنید. با فکر، می‌توانید مسأله را در ذهن خود، و بدون محاسبه‌های پیچیده، حل‌کنید.

۲۲۷. مسابقهٔ درختکاری

پیشاهنگها به شرکت فعالانه در درخت‌کاری بـاغ میوه ، دعوت شدند. گروهها بین خود مسابقه‌گذاشتند.

همه با پشتکارکار می‌کردند . درگـروه پاولیك ماروزوف اینجور باهم قرارگذاشتند. ویتیا قبول‌کردکه دستهٔ او به‌اندازهٔ نصف تمام دسته‌های دیگرگروه، درخت میوه بکارد. دستهٔ کریوشا هم،که بزرگترین‌دستهٔ گروه بود، به‌نوبهٔ خود به‌اندازهٔ تمام دسته‌های دیگر (که دستهٔ ویتیا هم بین‌آنها به‌حساب می‌آید)، کارکند.

همهٔ دسته‌ها، کاررا باهم شروع نکردند وقرارگذاشتند به‌نوبت به کار بپردازند . دسته‌های ویتیا وکریوشا برای نوبت آخرمعین شدندکه باهم کارکنند. بقیهٔ دسته‌ها، کارخودرا باموفقیت تمام‌کردند وروی‌هم۴۰ درخت میوه‌کاشتند. وقتی‌کـه نوبت به دسته‌های ویتیا وکریوشا رسید، مشکلی پیش آمدکه‌کسی دربارهٔ آن فکر نکرده بود : بـرای اینکه ایـن دو دسته، کار خودرا شروع‌کنند، هرکدام به تعداد درختهایی‌که دیگری باید بکارد، احتیاج داشت تا بتواند به‌قول خود وفاکند. هردسته منتظر دستهٔ دیگربود وراه‌حلی پیدا نمی‌شد، تااینکه پیش‌آهنگ بزرگتر، راه‌حل منطقی برای این‌مشکل پیداکرد. چطور؟

۲۲۸. چند برابر؟

ازدوعدد، نصف عددکوچکتررا کم‌کرده‌ایم، باقیماندهٔ عدد بزرگترسه‌برابر باقیماندهٔ عددکوچکترشده است.

عدد بزرگتر، چند برابرعددکوچکتر است؟

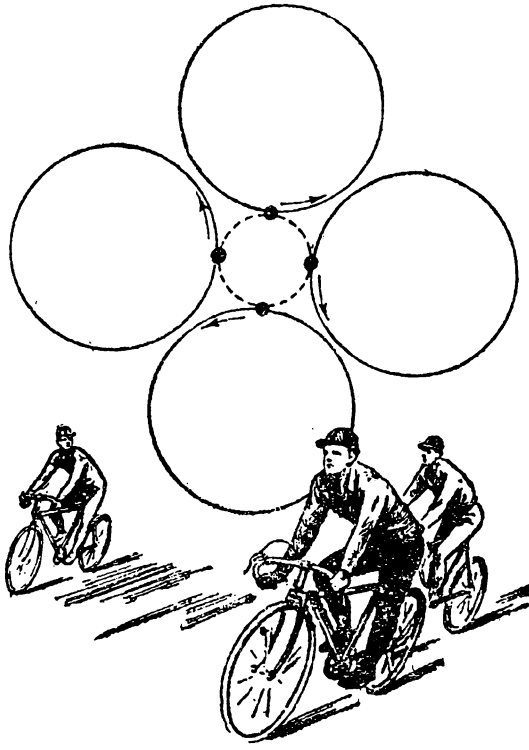
۲۲۹. کشتی وهواپیما

کشتی ازساحل حرکت‌کرد، وقتی‌که او۱۸۰ میل از ساحل دورشده بود، هواپیمای پستی درهمان‌جهت وازهمان ساحل‌حرکت‌کرد. سرعت هواپیما ۱۰ برابر سرعت‌کشتی است. هواپیما، درچه‌فاصله‌ای ازساحل، به‌کشتی می‌رسد؟

۲۳۰. دوچرخه‌سوارها

میدان نمایش درمحوطهٔ صاف بزرگی ساخته شده، که درآن چهار مسیر دایره‌ای شکل وجود دارد. چهار دوچرخه سوار، و هرکدام روی یکی از

دایره‌ها، حرکت می‌کند (شکل را ببینید).



مربوط به‌مسألهٔ ۲۳۰. هردوچرخه‌سوار درمسیرخود حرکت می‌کرد.

دوچرخه‌سوارها حرکت را در یك لحظه شروع کردند و در لحظهٔ حرکت، هرکدام ازآنها روی مسیرخود، در نزدیکترین فاصله به‌میدان بین دایره‌ها، قرارگرفته بود. سرعت‌آنها به‌ترتیب زیرمشخص‌شده‌است:

$V_1 = ۶$ (واحد درساعت)
$V_2 = ۹$ (واحد درساعت)
$V_3 = ۱۲$ (واحد درساعت)
$V_4 = ۱۵$ (واحد درساعت)

محیط هریك از دایره‌های مسیر، برابر با $\frac{۱}{۳}$ واحد است.

دوچرخه‌سوارها، ۲۰ دقیقه به‌حرکت خود ادامه دادند.

آیا درجریان این ۲۰ دقیقه ممکن است یك یا چندبار اتفاق بیفتد که هرچهار دوچرخه‌سوار باهم درنقطهٔ شروع حرکت خود باشند؟

۲۳۱. سرعت کار دستگاه

سرعت کار دستگاه برش چدن را به‌اندازهٔ ۱۶۹۰ متر در دقیقه زیادکردند و درنتیجه، به‌جای ۳۵ دقیقه، کار در $۲\frac{۱}{۲}$ دقیقه تمام شد.

سرعت دستگاه، درلحظهٔ کارچقدر بوده است؟

۲۳۲. مسافرت جك‌لندن

جك‌لندن، نویسندهٔ امریکایی، دریکی ازداستانهای خودش، شرح می‌دهد که چگونه روی سورتمه‌ای‌که به‌پنج سگ بسته شده بود، به‌طرف‌اردوی خود، که درآنجا دوست درحال مرگی انتظارش را می‌کشید، می‌شتافت.

دراین داستان جزئیات جالبی وجود داردکه می‌توان بااستفاده از آنها، مسألهٔ قشنگی درست‌کرد. شبانه‌روز اول، سورتمه وسگها، باهمان سرعتی‌که جك‌لندن‌ازقبل‌معین‌کرده بود، جلورفتند. بعدازپایان‌شبانه‌روز اول، دوتا ازسگها تسمه‌هارا پاره‌کردند و به‌گرگها پیوستند. جك‌لندن، ناچارشد سورتمه را با سه‌سگ حرکت دهدکه درنتیجه، سرعت آن به $\frac{۳}{۵}$ سرعت اولیه تقلیل پیداکرد. به علت این تأخیر، جك‌لندن دو شبانه‌روز دیرتر ازوقتی راکه قبلاً حساب‌کرده بود، به‌اردو می‌رسد.

مؤلف داستان اضافه می‌کند: «اگر این‌دوسگ فقط ۵۰ میل‌دیگر را بامن همراهی‌کرده بودند، من‌تنها یك روز دیرتر، به‌مقصد می‌رسیدم».

پرسشی‌پیش می‌آید: فاصله‌ای راکه جك‌لندن می‌بایست طی‌کند،

چند میل بوده است؟ در داستان ازاین‌مطلب چیزی‌گفته نشده است، ولی همین چیزهایی‌که حکایت شده است برای تعیین این‌فاصله‌کافی است.

۲۳۳. در شبیه‌سازی نادرست، امکان اشتباه وجود دارد

بعضی ازنتیجه‌گیریها و حتی تعدادی ازکشفها، از روی قیاس بدست‌آمده است، که اساس‌آن برپایهٔ شباهت دوموضوع دربعضی‌ازجنبه‌هاست‌که از آنجا شباهت‌آنهارا درجنبه‌های دیگرهم قبول می‌کنند.

ولی شبیه سازی هیچ چیزرا ثابت نمی‌کند، و تنها می‌تواند مطلبی را به ذهن تلقین‌کندکه به‌هرحال درستی‌آن، بستگی به‌بررسی، تحقیق و استدلال دارد.

در ریاضیات هم، استنباط از روی قیاس، جایی برای خود دارد. روشن است‌که‌کشف هرشباهتی درعملهای ریاضی ودربه‌کاربردن قانونها وغیره، به‌حل مسأله‌ها و به‌فکرمساکمك می‌کند، ولی وقتی‌که جنبه‌های مربوط به‌شباهت موضوعها را درنظر می‌گیریم، باید ازاختلافی که بین‌آنهاست، غافل نمانیم.

شبیه‌سازی نادرست، منجربه‌نتیجه‌گیری نادرست می‌شود.

به‌این پرسش وپاسخ توجه‌کنید:

ـ ۴۰، چند واحد از۳۲ بیشتر است؟

ـ ۸ واحد.

ـ حالا بگویید۳۲، چند واحد از۴۰کمتر است؟

ـ البته، همان ۸ واحد.

ـ کاملاً درست است، حالا می‌خواهیم ببینیم عدد ۴۰، چنددرصد بزرگتر ازعدد۳۲ است؟ لازم نیست شما زحمت بکشید، من‌خود می‌گویم که ۴۰ به‌اندازهٔ ۲۵٪ از ۳۲ بزرگتر است. ولی شما بگوییدکه ۳۲ چند

درصد، از ۴۰ کوچکتر است؟ لابد می‌خواهید حساب کنید.

ـ چرا حساب کنیم؟ شما الان گفتیدکه ۴۰ به اندازهٔ ۲۵٪ از ۳۲ بزرگتر است، یعنی۳۲ هم ۲۵٪ از۴۰کوچکتر است...

ولی، شما می‌دانیدکه این قضاوت از روی قیاس، در مورد اول (وقتی‌که تفاوت دوعدد را محاسبه می‌کردیم) درست و در مورد دوم (وقتی‌که درصد بزرگتری یا کوچکتری را محاسبه می‌کنیم) ، نادرست است.

درواقع، اختلاف دوعدد، درهرحال مساوی ۸ است، ولی درمثال دیگر، دریك مورد درصد را نسبت به عدد۳۲ باید حساب‌کنیم و درمورد دوم نسبت به‌عدد۴۰. عدد ۸ مساوی ۲۵٪ عدد۳۲ است، درحالیکه همین عدد مساوی ۲۰٪ عدد۴۰ است، یعنی عدد۳۲ به اندازهٔ ۲۰٪ از عدد ۴۰ کوچکتر است.

اشتباهی‌که دراینجا پیش می‌آید، مربوط به‌مقایسهٔ نادرست‌است. حالا، خودتان را دربارهٔ چند مسألهٔ زیرآزمایش‌کنید.

مسألهٔ ۱. فرض می‌کنیم‌که درآمد ماهیانهٔ شما، ۳۰٪ اضافه شده باشد، چند درصد به‌قدرت خرید شما اضافه می‌شود؟

مسألهٔ ۲. فرض‌کنیدکه درآمد ماهیانهٔ شما، تغییری نکرده باشد، ولی قیمت‌کالاها ۳۰٪ پایین بیاید. در اینحالت، قدرت خرید شما، چند درصد اضافه می‌شود.

مسألهٔ ۳. کتابفروشی،کتابهای خودرا با۱۰٪ تخفیف ازروی جلد فروخت ودرنتیجه تنها ۸٪ سودبرد. اگر این‌کتابفروشی،کتابهای‌خودرا بدون تخفیف می‌فروخت، چند درصد سود می‌برد؟

مسألهٔ ۴. اگرکارگری، زمان‌تهیهٔ‌محصول‌را P٪کم‌کند،چنددرصد

به‌مقدارمحصول تولیدی اضافه می‌شود؟

۲۳۴. قضیهٔ حقوقی

رومیهای قدیم، به ندرت به ریاضیات می‌پرداختند ؛ در عوض ، آنها به‌آگاهیهای حقوقی مشهورند. اثرهای ریاضی روم قدیم،که به‌ما رسیده است، به‌طورعمده، جنبه عملی دارد. یکی‌ازعاملهایی‌که باعث به‌وجود-آمدن مسأله‌های حساب شده است ، قوانین مربوط به‌ارث در روم بوده است. واین، یکی‌ازآن مسأله‌های قدیمی است.

کسی، در بستر مرگ، زنش راکه منتظرفرزندی بود، خواست و اینطور وصیت‌کرد: اگرفرزند من، پسربود باید $\frac{۲}{۳}$ دارایی مرا به‌او و $\frac{۱}{۳}$ را به‌مادرش بدهید. ولی اگرفرزندم دختربود، $\frac{۱}{۳}$ دارایی من متعلق به‌او و $\frac{۲}{۳}$ آن متعلق به‌مادرش می‌شود.

بیوهٔ این مرد، دوقلو زائید: یك پسر و یـك دختر؛ حالتی‌که در وصیت پیش‌بینی نشده بـود . چگونه بایـد دارایی ایـن شخص را بین باقیماندگان تقسیم‌کرد تا حتی‌الامکان به‌وصیت اونزدیك باشد.

حل ریاضی این مسأله، بستگی به تفسیرحقوقی وصیت‌نامه دارد. یکی‌از راه‌حلهای این‌مسأله به‌وسیلهٔ سالویان ژولیان، قاضی رومی، داده شده است،کـه در قسمت حل، با بعضی اضافه‌ها، آورده‌ایم. ولـی شما، قبل ازآنکه به قسمت حـل، مراجعه‌کنید، ببینید چه راه‌حلی بـرای آن پیدا می‌کنید.

۲۳۵. احتمال حادثه

اگر A دو فرزند داشته باشد و بدانیم‌که یکی ازآنها دختر است؛ چقدر احتمال داردکه فرزند دوم اوهم،دختر‌باشد؟ واگر B دوفرزند داشته‌باشد

و بدانیم‌که فرزند بزرگتر اوپسر است، احتمال اینکه فرزند دوم او هم پسرباشد، چقدر است؟

احتمال هرحادثه عبارتست از نسبت تعداد حالتهای مورد نظر به تعداد حالتهای ممکن.

۲۳۶. چه‌کسی بااسب می‌رود؟

دونفر دریك زمان، یکی بااسب و دیگری با اتومبیل، از ده به‌طرف شهر حرکت‌کردند. یکی ازآنها جوان و دیگری میانه سال بود. بعد از مدتی معلوم شدکه اگرمیانه‌سال سه‌برابرآنچه‌که پیموده است، می‌رفت،نصف راه باقیمانده،برایش می‌ماند. و اگرمرد جوان نصف فاصله‌ای راکه طی کرده است، رفته بود، سه‌برابر راه باقیمانده، برایش باقی می‌ماند.

کدامیك‌ازآنهابااسب حرکت‌کرده‌است: مردجوان یامردمیانه‌سال؟

۲۳۷. دو موتورسوار

دوموتورسوارازیك‌نقطه ودریك‌زمان،برای‌گردش حرکت‌کردند. هردویك فاصله را طی‌کردند ودریك‌زمان به‌منزل برگشتند.

موتورسوارها در راه استراحت‌کرده‌اند و می‌دانیم مدتی‌که اولی می‌رانده است دوبرابرمدت استراحت دومی، و مدتی‌کـه دومی می‌رانده است، سه‌برابرمدت استراحت اولی است.

سرعت حرکت‌کدامیك بیشتربوده است؟

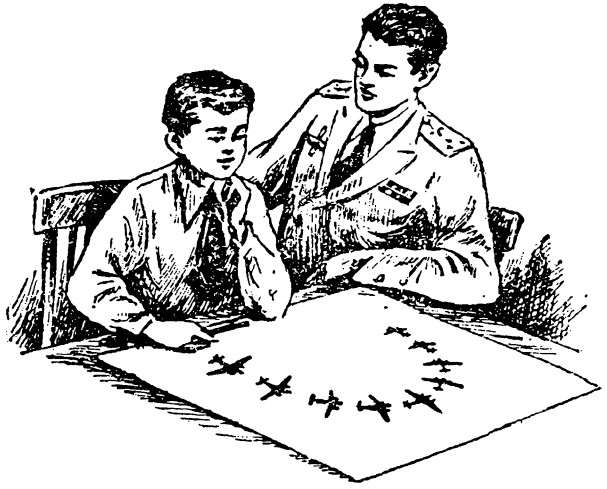
۲۳۸. درکدام هواپیما بوده است؟

والودیا، ازپدرخلبانش پرسید:

ـ شما روز رژه هوایی درکدام هواپیما بودید؟

وپدر، درحالیکه ۹هواپیما را روی‌کاغذ رسم می‌کرد،جواب داد:

ـ خودت پیداکن! من به خاطردارم که حاصلضرب تعداد هواپیماهایی که درسمت راست من بود، درتعداد هواپیماهایی که درسمت چپ من بود، حساب کردم؛ بعد دیدم که اگرهواپیمای من درجای سوم طرف راستم بود وهمین حاصلضرب را حساب می‌کردم، سه‌واحد بیشترازعدد اولی را بدست می‌آوردم.



مربوط بمسألهٔ ۲۳۸. درکدام هواپیما بوده است؟

والودیا فکری کرد وجای هواپیمای پدرش را نشان داد. اوچطور جای هواپیما را پیداکرد؟

۲۳۹. دستگاه معادله‌ها، برای حل شفاهی

$$۶/۷۵۱x+۳/۲۴۹y=۲۶/۷۵۱$$
$$۳/۲۴۹x+۶/۷۵۱y=۲۳/۲۴۹$$

برای حل شفاهی؟ آیا نویسنده اشتباه نکرده است؟ ولی نه‌شوخی است ونه‌اشتباه. البته می‌دانیدکه اگربخواهید مثلاً با حذف y ، مقدار

x وسپس y را بدست‌آورید وبرای این‌منظور معادلهٔ اول را در۶/۷۵۱ و معادلهٔ دوم را در۳/۲۴۹ ضرب‌کنید و...، نمی‌توان‌آنرا حل‌شفاهی‌نامید. حقیقت اینست‌که جوابهای معادله را می‌توان به طورشفاهی بدست‌آورد. چطور؟

۲۴۰. دوشمع

دوشمع با اندازه‌های مختلف (ازلحاظ طول وقطر)، روشن شده‌اند. شمع درازتر در $۳\frac{۱}{۲}$ساعت وشمع‌کوتاهتر در۵ساعت می‌سوزد.

بعدازآنکه ۲ساعت هردوشمع سوختند، طول‌آنها مساوی شد.

نسبت طول دوشمع را، قبل‌ازروشن‌کردن، پیداکنید.

۲۴۱. تیزهوشی عجیب

هروقت‌که بچه‌ها به‌دیدن دوست بزرگترخود،که حسابدار است،می‌روند، حتماً چیزی برای حساب‌کردن، دربرابرآنها قرارمی‌دهد.

و عجیب اینست‌که اغلب حتی بدون اینکه بداند بچه‌ها چه عدد‌هایی را باهم جمع ویا ازهم‌کم می‌کنند، تنها نگاهی به‌جوابها می‌اندازد وبلافاصله می‌گویدکه‌کدام جواب درست وکدام نادرست است.

او گفت:

ـ هرکدام ازشما یك‌عدد چهاررقمی درنظربگیرید. درنظرگرفتید؟ حالا رقم اول را به‌آخـرعدد ببرید ، بازهم یك عدد چهاررقمی خـواهید داشت. این‌دوعدد را جمع‌کنید، مثلاً اگرعددی‌که درنظرگرفته‌اید۱۲۳۴ باشد، باید حاصلجمع ۲۳۴۱+۱۲۳۴ را بدست‌آوریدکه می‌شود۳۵۷۵. حالا، جوابهای خود را به من بگویید! و ما این جوابها را در مقابل او

گذاشتیم :

نفر اول: ۸۶۱۲

نفر دوم: ۴۳۲۲

نفر سوم: ۹۸۶۷

نفرچهارم: ۱۳۸۵۹

ـ به‌جزجواب نفرسوم، همه نادرست است. امتحان کنید!

واقعاًهم همینطوربود. ولی او ازکجا متوجه شد؟آخر، اوازعددی که هرکدام ما درنظرگرفته بودیم، هیچ اطلاعی نداشت.

۲۴۲. وقت صحیح

درکارگاهی چهار نوع ساعت وجود دارد: دیواری، رومیزی، زنگ‌دار و مچی .

ساعت دیواری، درمقایسه با وقت صحیح، هرساعت ۲ دقیقه عقب کار می‌کند. ساعت رومیزی درمقایسه باساعت دیواری، هرساعت۲دقیقه جلو می‌رود. ساعت زنگ‌دار درمقایسه باساعت رومیزی، ساعتی۲دقیقه عقب می‌ماند.ساعت مچی هم درمقایسه باساعت زنگ‌دار، ساعتی۲دقیقه جلوکـار می‌کند . در ساعت ۱۲، هرچهارساعت را روی وقت صحیح، منظم کرده‌ایم .

وقتی‌که وقت صحیح، درست ۱۹ باشد، ساعت مچی چه وقتی را نشان می‌دهد؟

۲۴۳. ساعت

من ودوستم هرکدام یـك ساعت خریدیم. بعد از چند روز معلوم شدکـه ساعتهای ما خیلی دقیق‌کار نمی‌کنند. با محاسبه متوجه شدیم‌که ساعت

من درهرساعت یك‌ثانیه جلومی‌رود وساعت دوستم درهرساعت $1\frac{1}{2}$ ثانیه عقب‌کار می‌کند. برای ما این دوپرسش پیش‌آمد:

اگر دست به‌عقربه‌های ساعتهای خود نزنیم:

۱) بعد از چه مدتی ساعت من وساعت دوستم، یك وقت را نشان می‌دهند؟

۲) بعد از چه مدتی ، هـردوساعت باهم ، وقت صحیح را نشان خواهند داد؟

۲۴۴. درچه ساعتی؟

مسألهٔ ۱. استادکار،کمی بعدازنیمروز برای نهار ازکارگاه خارج شد. موقع رفتن، جای عقربه‌های ساعت را نشان‌کرد. وقتی‌که به‌کارگاه برگشت، متوجه شدکه عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار جـای خودرا عوض‌کرده‌اند.

استادکار درچه‌ساعتی به‌کارگاه برگشته است؟

اگرتوانسته باشید، جواب این‌مسأله را پیداکنید، دیگر به‌سادگی می‌توانید مسأله‌های ۲ و۳ را خودتان حل‌کنید.

مسألهٔ ۲. من بیش از۲ ساعت وکمتر از۳ ساعت درمنزل نبودم . وقتی‌که به‌منزل برگشتم، متوجه شدم‌که درزمان غیبت من، جای‌عقربه‌های ساعت‌شمار ودقیقه‌شمار، عوض‌شده‌است.

من دقیقاً چه‌مدتی درمنزل نبوده‌ام؟

مسألهٔ۳ . دانش‌آموزی حل مسأله‌ای را بین ساعتهای ۴و۵ بعداز ظهر، وقتی‌که دوعقربه برهم‌منطبق‌بودند، شروع‌کرد وکارخود را وقتی تمام‌کردکه عقربهٔ دقیقه‌شمار درمقابل‌عقربهٔ‌ساعت‌شمار ودرامتدادآن‌قرار گرفته بود.

دانش‌آموز برای حل این‌مسأله، چند دقیقه وقت صرف‌کرده‌است وآنرا درچه‌ساعتی تمام‌کرده است؟

۲۴۵. کارجلسه درچه‌ساعتی شروع و درچه‌ساعتی تمام شده است؟

جلسه، کارخودرا بین‌ساعتهای ۶ و۷ بعدازظهرشروع وبین‌ساعتهای ۹ و ۱۰ بعدازظهر تمام‌کرد.

ساعت شروع وختم جلسه را دقیقاً معین‌کنید، به‌شرطی‌که بدانیم جای عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه شمار، درمدت‌کارجلسه، باهم‌عوض شده‌اند.

۲۴۶. گروهبان، گروه اکتشافی را تمرین می‌دهد

گروهبان فرماندهٔ دستهٔ اکتشافی، ازهرفرصتی برای آزموده‌کردن افراد گروه خود وجلب‌توجه ودقت‌آنها به حیله‌های جنگی، استفاده می‌کرد. مثلاً یکباره وبه‌طور ناگهانی می‌پرسید:

ـ این پلی‌که ازروی‌آن عبور می‌کنیم، چند تکیه‌گاه دارد؟

واین‌مسأله را برای ساعت استراحت، درمقابل افرادخودقرارداد.

ـ فرض‌کنید، دوگشتی ازگروه ما، به طرف یك نقطه می‌روند. هردوی‌آنها، یك راه را می‌روند، منتهی وقتی‌که برای پیمودن این راه صرف می‌کنند، یکی نیست. گشتی اول نیمی از وقت خودرا که در راه است، باسرعت معینی می‌رود. گشتی دوم هم، نیمی از طول راه را باهمین سرعت می‌رود. گشتی اول، نیم دوم وقت خودرا باسرعت دیگری می‌رود وگشتی دوم هم نیم دوم طول راه خودرا باهمین سرعت تغییریافتهٔ اولی طی می‌کند.

کدامیك ازآنها، زودتر به‌هدف خود می‌رسند؟

افرادگروه اکتشافی، هرکدام عددهای مختلفی برای طول راه و

دونـوع سرعت گشتیها در نظر گرفتند و همه به یـك نتیجه رسیدند : زمانی‌که‌گشتی اول صرف می‌کند،کمتر از زمانی‌است‌که‌گشتی دوم برای طی این‌مسافت لازم دارد.

آن افرادی هم‌که مسأله را به‌کمك جبرحل‌کرده بودند، به‌همین نتیجه رسیدند. به‌این‌ترتیب، آنها ثابت‌کردندکه با شرایط مسأله،گشتی اول سریع‌تر ازگشتی دوم، حرکت می‌کند واین‌جواب ارتباطی به‌اندازهٔ فاصله ومقدارسرعتها، ندارد.

آیا شما می‌توانید مسأله را، بااستفاده ازحروف، ثابت‌کنید؟

۲۴۷. به‌کمك دواطلاع

اطلاع اول: قطار N، ازکنارمن درمدت t_1 ثانیه می‌گذرد.

اطلاع دوم: همین قطار N، از روی پلی‌که a مترطول دارد، در جریان t_2 ثانیه می‌گذرد.

با همین دو اطلاع ، چگونه می‌توان طول و سرعت قطار را پیدا کرد، به‌شرطی‌که سرعت‌آن در دوحالت فوق، یکی باشد؟

۲۴۸. چند ایستگاه جدید ساخته‌اند؟

وقتی‌که از رئیس خط راه‌آهن پرسیدند: چند ایستگاه جدید در این خط ساخته‌اید؟جواب داد: همینقدر می‌گویم‌که به‌خاطر افتتاح ایستگاههای جدید، ناچارشده‌ایم ۴۶ نوع بلیت تازه چاپ‌کنیم تا مسافرها بتوانند از هرایستگاهی به‌هرایستگاه دیگربروند.

باهمین‌آگاهی، معین‌کنید دراین خط راه‌آهن، چند ایستگاه بوده است وچند ایستگاه جدید به‌آن اضافه شده است؟

۲۴۹. چهارعدد انتخاب‌کنید

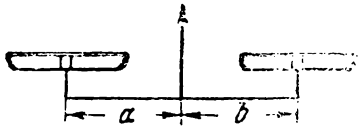
بین عددهای ۲تا۱۵، چهارعدد مختلف،که آنها را d،c،b،a می‌نامیم،

طوری انتخاب کنید که داشته باشیم:

$$a^2 = b.d \text{ و } ad = b^2c$$

۲۵۰. آیا این نوع وزن کردن مجاز است؟

در ترازو همیشه دو بازو (فاصلهٔ دو کفه تا محور میزان) باهم برابرند (روی شکل $a = b$). ضمن بازرسی در یک مغازهٔ خواربارفروشی، به ترازویی برخوردکردند که طول دو بازوی آن، مختصری با یکدیگر تفاوت داشت و به همین مناسبت، استفاده از آنرا قدغن کردند. بازرس دستور داد:



مربوط به مسألهٔ ۲۵۰

ـ این ترازو را با یک ترازوی دقیق عوض کنید و تا آن موقع چیزی نفروشید و تنها به بسته‌بندی کالاهای خود بپردازید.

درهمین موقع یک مشتری مراجعه کرد و ۲ کیلوگرم قند خواست. خواربارفروش که نمی‌خواست از نادرست‌بودن ترازوی خود، چیزی به مشتری بگوید، به‌بازرس پیشنهادکردکه اجازه دهد به‌این‌ترتیب، قند را به‌مشتری بفروشد:

ـ من سنگ یک‌کیلوگرمی را درکفهٔ سمت چپ می‌گذارم وقندرا درکفهٔ سمت راست، سپس برعکس: سنگ یک‌کیلوگرمی را درکفهٔ‌سمت راست می‌گذارم وقند را درکفهٔ سمت‌چپ. من فکر می‌کنم که اگرمثلاً یک‌کیلوگرم قند اول چیزی کسرداشته باشد، به‌وسیلهٔ یک‌کیلوگرم دومی جبران می‌شود.

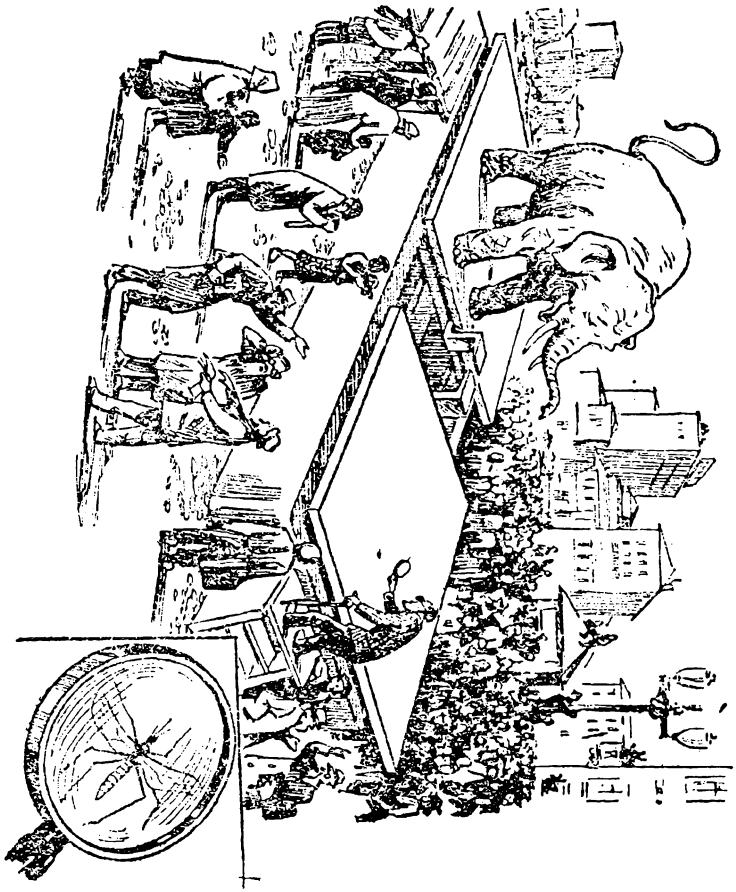
شما فکر می‌کنیدکه آیا استدلال خواربارفروش درست است؟

پرسش اضافی: آیا راهی وجود داردکه بتوان به‌کمک ترازویی که

بازوهای نامساوی وکفه‌های بـا وزنهای مختلف دارد ، به طـورصحیح استفاده‌کرد؟

۲۵۱. فیل وپشه

کسی‌که بامحاسبه‌های جبری، مردم را سرگرم می‌کرد، ادعاکردکه وزن



مربوط به‌مسألهٔ ۲۵۱. آیا وزن فیل برابر است باوزن پشه؟

فیل برابر است باوزن پشه. استدلال او به‌این‌ترتیب بود.

فرض‌کنید وزن فیل مساوی x و وزن پشه مساوی y و مجموع وزن فیل وپشه رویهم مساوی ۲v باشد، دراینصورت داریم:

$$x+y=2v$$

این تساوی را می‌توان به‌یکی ازدوشکل زیرنوشت:

$$x-2v=-y$$

$$x=-y+2v$$

ازضرب این‌دوتساوی دریکدیگر، بدست می‌آید:

$$x^2-2vx=y^2-2vy$$

به‌دوطرف این تساوی، جملهٔ v^2 را اضافه می‌کنیم:

$$x^2-2vx+v^2=y^2-2vy+v^2$$

که به‌سادگی به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(x-v)^2=(y-v)^2$$

اگر ازدوطرف این‌تساوی جذر بگیریم، می‌شود:

$$x-v=y-v$$

وازآنجا

$$x=y$$

یعنی وزن فیل (x)، برابر است باوزن پشه (y).

شما چه فکر می‌کنید، موضوع چیست؟

۲۵۲. عدد پنج رقمی

من به‌عدد A، که یك عدد پنج رقمی جالبی است، برخوردکرده‌ام. اگر رقم ۱ را درابتدای Aقراردهیم، روشن است‌که عددی شش رقمی بدست می‌آید: $\overline{1A}$ واگرهمین رقم ۱ را درآخرعدد A قراردهیم، بازهم عددی شش‌رقمی بدست می‌آید: $\overline{A1}$، منتهی، با کمال تعجب دیدم‌که عدد

شش‌رقمی دوم سه‌برابرعدد شش‌رقمی اول شده است:

$$\overline{A۱} : \overline{۱A} = ۳$$

عدد A را پیداکنید.

۲۵۳. بستگیهای پیچیده

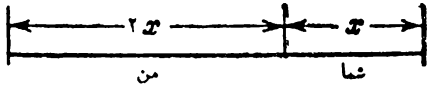
دربعضی موارد، یك مسأله با فرضهای ساده،کوتاه وروشن داده می‌شود ودربعضی موارد دیگر بافرضهای پیچیده و درهم، شبیه یك تور ظریف نقش‌دار. مثلاً به‌این فرضهای «پیچیده‌ای»که بین سن من و شما وجود دارد، توجه‌کنید.

من و شما، رویهم ۸۶ سال داریم. تعداد سالهای سن من برابر است با $\frac{۱۵}{۱۶}$ تعداد سالهای سن شما درزمانی‌که سن من مساوی $\frac{۹}{۱۶}$ تعداد سالهای‌سن‌شما، درزمانی‌باشدکه بتوانیددوبرابرسن‌من درحالتی‌که دوبرابر شما زندگی‌کرده‌ام، عمرکنید.

من‌چند سال وشما چند سال دارید؟ این‌مسأله را می‌توان‌به‌ترتیب زیرحل‌کرد.

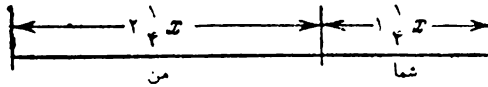
حل. برای اینکه این «تور» پیچ‌درپیچ را بازکنیم، بهتراست راه خودرا ازآخر به‌اول شروع‌کنیم.

۱) زمانی پیش می‌آیدکه سن من دوبرابرسن شماست. اگر درآن زمان، سن شما x باشد، سن من مساوی ۲x است. برای اینکه،حل‌مسأله روشن‌ترباشد، این فرضها را روی پاره‌خطی نشان می‌دهیم:

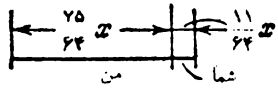


ازاینجا معلوم می‌شودکه من x سال ازشما بزرگترم وروشن است که همیشه چنین بوده است: درهروضعی من x سال ازشما بزرگترم.

۲) اگر شما بتوانید عمر درازی داشته باشید، زمانی می‌رسدکه شما دوبرابرسن من درلحظهٔ ۱) داشته باشید، یعنی ۴x. وزمانی‌بوده‌است که سن من $\frac{۹}{۱۶}$ آنروز شما، یعنی $۴x \times \frac{۹}{۱۶}$ یا $\frac{۹x}{۴}$ بوده است و روشن است که درآنروز سن شما $x - \frac{۹x}{۴}$، یعنی $\frac{۵x}{۴}$ است.



۳) حالا ، معلوم است که تعداد سالهای سن من برابر است با $\frac{۱۵}{۱۶}$ سن شما در لحظهٔ ۲)، یعنی $\frac{۵x}{۴} \times \frac{۱۵}{۱۶}$ یا $\frac{۷۵x}{۶۴}$ وسن شما هم به‌اندازهٔ x سال کمتر، یعنی $x - \frac{۷۵x}{۶۴}$ یا $\frac{۱۱x}{۶۴}$.



ازآنجاکه من و شما، حالا رویهم ۸۶ سال داریم، به این تساوی می‌رسیم:

$$\frac{۷۵X}{۶۴} + \frac{۱۱X}{۶۴} = ۸۶$$

که ازآن $x = ۶۴$ بدست می‌آید. بنابراین، سن‌حالای من $۶۴ \times \frac{۷۵}{۶۴}$، یعنی ۷۵ سال وسن شما $۶۴ \times \frac{۱۱}{۶۴}$، یعنی ۱۱ سال است.

حالا، مسأله‌ای ازهمین نوع را خودتان حل‌کنید.

سن حالای من دوبرابرسن شما درموقعی است‌که من به‌سن حالای شما بوده‌ام. وقتی‌که شما به‌سن‌حالای من برسید، رویهم۶۳ سال‌خواهیم داشت. سن‌حالای هرکدام ازما چقدر است؟

۲۵۴. مسألهٔ لیوکا

این‌مسأله را ادوارد لیوکا ، ریاضیدان فرانسوی سدهٔ قبل طرح‌کرده‌است.

هم‌میهن او لهزان ریاضیدان تاریخچهٔ زیررا نقل می‌کند.

دریکی ازکنگره‌های علمی، بعدازصبحانه، کـه درآن عدهٔ زیادی از ریاضیدانهای مشهور ازکشورهای مختلف حاضر بودند، لیوکا بدون مقدمه اطلاع دادکه می‌خواهد یکی‌ازمشکل‌ترین مسأله‌ها را دربرابر همه طرح‌کند. لیوکا، سپس‌گفت:

ـ فرض می‌کنیم‌که هرنیمروز یك‌کشتی از هاور به طرف نیویورك حرکت‌کند ، درست درهمان لحظه هم‌کشتی دیگری از همان شرکت، از نیویورك به طرف هاور حرکت‌کند . بـرای هرکدام از ایـن‌کشتیها ، ۷ شبانه‌روزطول می‌کشد تا به‌مقصد برسند. کشتی‌که امروز از هاورحرکت کند، درراه به‌چندکشتی ازشرکت خودی برخورد می‌کند.

شما به پرسش لیوکا چه‌پاسخی می‌دهید؟ بهتر است برای حل این مسأله، به‌راه حل ترسیمی بپردازید.

۲۵۵. حادثهٔ مسافرت

دوپسر جـوان می‌خواستند مسافرت‌کـوچکی با دوچرخه بکنند . در راه دوچرخهٔ یکی ازآنها خراب شد واوناچاربود مدتی برای تعمیرآن‌متوقف شود. با وجود این، تصمیم‌گرفتند مسافرت خود را قطع نکنند و راه را گاهی پیاده وگاهی بادوچرخه، به‌این‌ترتیب ادامه دهند.

از نقطه‌ای‌که یکی ازدوچرخه‌ها خراب شده بود، یکی با دوچرخه و دیگری پیاده حرکت‌کردند . دوچرخه‌سوار درنقطهٔ معینی دوچرخه را درکنار جاده‌گذاشت و خود پیاده به راه ادامه داد. همسفر او، وقتی به دوچرخه رسید ، برآن سوارشد و دوستش را تعقیب‌کرد و وقتی‌که به‌او رسید، دوچرخه را به‌او داد وخود پیاده، راه را ادامه داد.

برای آخرین‌بار، درچه‌فاصله‌ای از مقصد، بایـد دوچرخه‌گذاشته

شود، تا هردوجوان باهم به‌پایان‌مسافرت خود برسند، به‌شرطی‌که حادثه در ۶۰کیلومتری مقصد برای‌آنها پیش‌آمده‌باشد وسرعت پیاده ۵کیلومتر درساعت وسرعت دوچرخه ۱۵کیلومتر درساعت باشد.

آیا این روش حرکت، به‌صلاح جوانهاست؟

۲۵۶. یك خاصیت ازکسرهای ساده

چندکسر ساده (به‌هرتعدادی‌که می‌خواهید) بنویسید، به نحوی‌که هم صورت وهم مخرج‌آنها عددی مثبت باشد.

حالاکسرجدیدی‌بنویسیدکه صورت‌آن مساوی مجموع صورتها و مخرج‌آن‌مساوی مجموع‌مخرجهای‌تمام‌این‌کسرهاباشد. این‌کسر، بزرگتر ازکوچکترین‌کسرهای‌شما وکوچکترازبزرگترین‌کسرهای شماخواهد بود.

اول، درستی این خاصیت را درچند مورد عددی آزمایش‌کنید و سپس‌آنرا درحالت‌کلی ثابت‌کنید.

بخش نهم

تقریباً بدون محاسبه

حل هرمسأله‌ای، به‌هرحال به‌نوعی «استدلال» نیاز دارد، ولی در مورد بعضی ازمسأله‌ها، نقش اصلی درحل‌آنها، بستگی به‌ساختن زنجیر کاملی از استدلالهای ظریف وگاهی خیلی ظریف دارد.

بسیاری ازاین مسأله‌ها، بیشتربه‌منطق مربوط‌اند تا ریاضیات، با وجود ایـن، چنین مسأله‌هایی «تفکر ریـاضی» را تقویت می‌کنند و راه «فکرکردن» و«تحلیل‌کردن» را به‌ما می‌آموزند ومارا وامی‌دارند تابدون استفاده از روشهای متعارف، راه‌حل را پیداکنیم.

۲۵۷. دراطاق تاریك

من به‌اطاقم رفتم تا ازکمد،کفش وجورابم‌را بردارم. اطاق‌کاملاً تاریك بود و خواهرم درآنجا خوابیده بـود. من بخوبی می‌دانستم‌کـه ۳ جفت کفش من (باشکلهای مختلف) و۱۲ جفت جوراب من به‌رنگهای سیاه و قهوه‌ای، درکجای‌کمد قراردارند. برای اینکه خواهرم بیدار نشود، نمی‌خواستم، چراغ را روشن‌کنم.

درواقع هم، من جای کفشها و جورابها را پیداکردم ولی توده‌ای از ۶ کفش و ۲۴ جوراب زیر دست من بود.

حداقل، چند لنگه کفش و چند لنگه جوراب باید از اطاق تاریك، به‌روشنایی بیاورم تا در بین آنها یك جفت کفش از یك نوع و یك جفت جوراب ازیك رنگ وجود داشته باشد، ضمناً نوع کفش ویارنگ جوراب، برای من فرقی نمی‌کند.

۲۵۸. سیبها

در یك سبد، سه‌نوع سیب ریخته شده است. بدون اینکه به سیبها نگاه کنم، لااقل چند سیب از سبد بردارم تا در بین آنها: ۱) لااقل ۲ سیب از یك‌نوع وجود داشته باشد، ۲) لااقل ۳ سیب ازیك‌نوع وجود داشته باشد؟

۲۵۹. پیش‌بینی هوا (شوخی)

اگر در ۱۲ ساعت شب باران آمده باشد، آیا می‌توانیم انتظار داشته باشیم که بعداز ۶۰ ساعت، هوای آفتابی داشته باشیم؟

۲۶۰. روز جنگل

به‌مناسبت «روز جنگل»، دوگروه پیش‌آهنگی A وB، مأموریت پیداکردند که در دوطرف خیابانی، به‌تعداد مساوی درهرطرف، درخت بکارند.

گروه A، زودتر دست به‌کار شد و تا لحظهٔ رسیدن گروه B، توانستند ۵ درخت دریك طرف خیابان بکارند؛ ولی با آمدن گروه B، معلوم شدکه آنها درختها را درطرفی ازخیابان که سهم آنها بوده است، نکاشته‌اند.

گروه A ناچار به‌طرف دیگر خیابان رفت ودوباره شروع به‌کار کرد. البته، گروه B زودتر توانست کارخودرا تمام کند. آنوقت سرگروه

B به افرادش پیشنهادکردکه بروند وبه‌گروه A کمك‌کنند.

همه موافقت‌کردند. گروه B به طرف دیگرخیابان رفت و اول ۵ درختی راکه بدهکار بودکاشت، سپس بازهم ۵ درخت دیگرکاشت وکار تمام شد.

یکی از افرادگروه B ، باخندهٔ طنزآمیزی به‌گروه A گفت:

ـ با وجودی‌که ما دیرتر ازشماآمدیم، ازشما جلو افتادیم.

ـ البته‌که ازما جلو افتادید، ولی تنها به‌اندازه ۵ درخت.

ـ نه! ما ۱۰ درخت بیشتر ازشماکاشته‌ایم نه ۵ درخت.

شما فکر می‌کنید حق باکدام طرف باشد؟

۲۶۱. نام هرکسی را پیداکنید

راهنما، به‌پیشاهنگان باسابقه‌ای‌که روی چمن نشسته بودند،گفت:

ـ بچه‌ها، فرداصبح سه‌نفرکه شما نمی‌شناسید: رحمانی،جمشیدی وساسانی، به‌اردوی پیشاهنگی تابستانی ما می‌آیند. من می‌توانم به‌شما اطلاع‌بدهم‌که نام‌کوچك‌آنهاکاووس، پیروز ومسعود است.ولی‌کدامیك ازاین نامها مربوط به‌کدامیك ازآن فامیلهاست؟

یکی ازبچه‌هاگفت:

ـ من فکر می‌کنم، یعنی‌حدس می‌زنم‌که رحمانی فامیل‌کاووس است.

ولی راهنما جواب داد:

ـ نه حدس‌شما درست‌نیست، اصلاً لازم‌نیست‌که دراین‌باره حدس بزنید. با اطلاعاتی‌که به شما خواهم داد، شما می‌توانید نه‌تنها نامهای کوچك رحمانی،جمشیدی وساسانی‌را، بلکه حتی سن‌آنهارا هم‌پیداکنید.

علاوه‌برآنچه که در بارهٔ این سه‌نفر می‌دانید، به‌این آگاهیها هم

توجه کنید:

۱. محمود یگانه ، بابای مدرسه ، که همهٔ شما او را می‌شناسید، برادر تنی مادر رحمانی است.

۲. پیروز در ۷ سالگی به‌مدرسه رفته است و در نامه‌ای‌که همین نزدیکیها نوشته است، می‌گوید:

«... اینرا هم‌بگویم‌که ماامسال برای‌اولین‌بار درکتاب‌ریاضیات، دربارهٔ مجموعه‌ها، چیزهایی خوانده‌ایم...»

اضافه می‌کنم‌که منصورکاشانی ، باغبان ما ، پدربزرگ پیروز است وبیصبرانه، منتظر نوه‌اش می‌باشد.

۳. جمشیدی ازپیروز یکسال بزرگتر است.

۴. مسعود ازپیروز یکسال بزرگتر است.

ـ تمام شد؟

ـ بله!

ـ ولی، اینها برای‌آنچه‌که شما می‌خواهیدکم است.

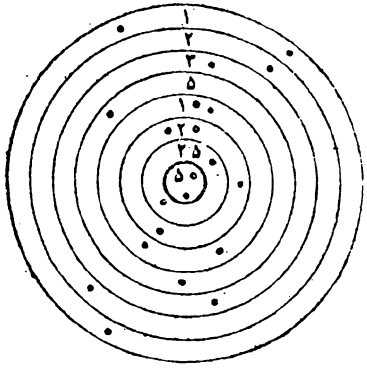
ـ برعکس، برای حل مسألهٔ شماکاملاً کافی است.

بعد از آنکه ، بچه‌های پیشاهنگ مقداری فکرکردند ، توانستند مسأله را حل‌کنند ونام‌کوچك وسن هرکدام ازدوستان تازه خود را پیدا کنند. شما چطور؟

۲۶۲ مسابقهٔ دقت

سه پسر: شروین، سروش وفرزاد به‌هدف مخصوصی‌که درشکل‌نشان داده شده است، با تفنگ خفیف، تیراندازی می‌کردند . هرکدام، شش تیر انداختند . روی شکل، محل برخورد به هدف را با نقطه‌هایی مشخص

کرده‌ایم. وقتی که نتیجهٔ مسابقه را حساب کردند، معلوم شد که هرکدام ازآنها ۱۷۱ امتیاز کسب کرده‌اند، ضمناً از ۱۸ تیری که انداخته شد، تنها یکی به دایرهٔ مرکزی هدف برخورد کرد (۵۰ امتیاز).



مربوط به‌مسألهٔ ۲۶۲. نتیجهٔ مسابقه

من فراموش کرده‌ام که کدامیك ازپسرها (شروین، سروش یا فرزاد)، این تیررا انداخته است، ولی به‌خاطردارم‌که شروین در دوتیر اول، ۲۲ امتیازگرفت وفرزاد درنخستین تیراندازی خود، تنها سه‌امتیاز بدست‌آورد.

کدامیك توانسته‌اند تیر مرکزی را بیندازند؟

۲۶۳. خرید

فروشنده حساب کردکه دانش‌آموز خریدار باید بابت مدادها، دفترچه‌ها وکاغذهای رنگی ۱۷۰ ریال به صندوق بپردازد. وقتی‌که دانش‌آموز به‌منزل رسید، پیش‌خود فکرکردکه:

ـ من۲ مداد خریده‌ام‌که هرکدام ۲ ریال قیمت داشت، ۵مداد هم، دانه‌ای ۴ ریال می‌ارزید، علاوه‌برآن ۸ دفترچه و ۱۲ ورق‌کاغذ رنگی خریده‌ام؛ قیمت دفترچه وکاغذرنگی یادم نیست، ولی به‌هرحال‌فروشنده درمحاسبه اشتباه‌کرده است. قیمت اینها ۱۷۰ ریال نمی‌شود.

دانش‌آموزنزد فروشنده برگشت وازاوخواست دوباره‌حساب‌کند. درواقع هم معلوم شدکه او بار اول اشتباه‌کرده بود.

چگونه این دانش‌آموز مطمئن شدکه حساب فروشنده اشتباه‌است؟

۲۶۴. مسافرهای یکی ازکوپه‌ها

در یکی ازکوپه‌های قطارمشهد ـ اهواز، شش نفر: تهرانی، اصفهانی، تبریزی، کرمانی، رشتی و اراکی بودند. فامیل‌آنهارا A، B، C، D، E وF می‌نامیم.

در راه معلوم شد که A و تهرانی هردو پزشك‌اند؛ E و اصفهانی معلم‌اند؛ تبریزی و C مهندس‌اند. B و F در یك جنگ شرکت‌کرده‌اند؛ ولی تبریزی اصلاً درارتش خدمت نکرده‌است. رشتی از A بزرگتراست، اراکی از C بزرگتر است؛ B و تهرانی در یکی از ایستگاههای بین راه پیاده شدند، C ورشتی درایستگاه دیگری قبل‌از اهواز پیاده شدند.

محل سکونت هریك‌ازمسافرها وشغل‌آنهارا پیداکنید.

یادآوری. آیا می‌شود بایك بررسی، شرط لازم وکافی را دربارهٔ تعداد مفروضات، برای این مسأله پیداکرد؟ وآیا دراین مسأله، شرط اضافی وجود دارد یانه؟

۲۶۵ آخرین مسابقهٔ شطرنج‌بازان ارتش

درآخرین مسابقهٔ شطرنج‌بازان ارتش ، نماینده‌های هشت درجهٔ ارتشی شرکت داشتند: سرتیپ، سرهنگ، سرگرد، سروان، ستوان، گروهبان، سرجوخه وسرباز. اینها همه ازقسمتهای مختلف ارتش‌آمده بودند: یکی از پیاده‌نظام، دیگری از نیروی هوایی، سومی از نیروی دریایی، و به همین‌ترتیب از توپخانه، سواره‌نظام، قسمت چتربازان، استحکامات و بالاخره ارتباطات.

بااستدلال درست، می‌توانید قسمت هرکدام ازشطرنج‌بازان را، با

توجه به‌شرطهای زیر، پیداکنید:

در دوراول، سرتیپ بانمایندهٔ سواره‌نظام بازی‌کرد. نمایندهٔ‌نیروی هوایی، تنها در دور دوم بازی وارد شد.

در دور دوم نمایندهٔ پیاده‌نظام باسرجوخه بازی‌کرد و سرهنگ با ستوان. بعداز دور دوم بازی، سرگرد به‌خاطر مریضی‌اش، ازبازی خارج شد. به‌این‌مناسبت در دورسوم، گروهبان ودر دور چهارم، نمایندهٔ‌نیروی هوایی ودردورپنجم، سرهنگ، بدون رقیب ماندند.

در دورسوم، سروان ازنمایندهٔ پیاده‌نظام برد و سرتیپ با نمایندهٔ توپخانه، مساوی‌کرد.

در دورچهارم، نمایندهٔ‌استحکامات‌ازسروان برد وستوان‌به‌سرتیپ باخت. و بالاخره در دورششم، بازی‌آخررا نمایندهٔ سواره‌نظام با چترباز انجام داد.

یادآوری. ۱. برای حل این مسأله، هیچ لازم نیست‌که بازی شطرنج را دنبال‌کنیم، بلکه تنها باید به این مطلب توجه‌کردکه درهردور بازی، یك شطرنج‌باز دوبار وارد نمی‌شود وضمناً هرشطرنج‌باز، باشطرنج‌باز دیگر، تنها یکبار بازی می‌کند.

۲. کسانی‌که مایل باشند، می‌توانند بعد از حل مسأله، جدول‌کامل بازیهارا تنظیم‌کنند (البته این‌جدول، باجدول بازیهای شطرنج، که معمولاً تنظیم می‌کنند، فرق دارد).

۲۶۶. جمع‌آوری هیزم

سه‌دستهٔ دونفری پیشاهنگان تصمیم گرفتند، مقداری چوب برای مصرف مدرسه، اره‌کنند. هردسته، یـك سردسته داشت . سردسته‌ها عبارتند از: محمود، احمد و جمشید. آنها می‌بایستی، چوبها را به‌قطعه‌های نیم‌متری ببرند. محمود ومهدی، چوبهای دومتری را بریدند. احمد ونادر، چوبهای

یك ونیم‌متری را وجمشید وباقر، چوبهای یك‌متری را.

روزبعد در روزنامه مدرسه ازکار این‌سه‌دسته وسردسته‌های‌آنها: جوهری، بهشتی و پورجعفر، تجلیل شده بود و ضمناً گفته شده بودکه جوهری و امامی۲۶ قطعه چوب، بهشتی و اسفندیاری ۲۷ قطعه چوب و بالاخره پورجعفر وکمال ۲۸ قطعه چوب بریده‌اند.

نام‌کوچك اسفندیاری چیست؟

۲۶۷. نام فامیل راننده چیست؟

با قطارتهران-تبریز، سه‌مسافر: ابراهیمی، محمدی وافشار،سوارشده‌اند. راننده،کمك‌راننده وبازرس‌قطارهم، همین‌فامیلهارا دارند. می‌دانیم‌که:

۱) ابراهیمی مسافر، درتهران زندگی می‌کند؛

۲) بازرس قطار درشهری درست وسط راه تهران و تبریز زندگی می‌کند؛

۳) مسافری‌که فامیلش با بازرس قطاریکی‌است، درتبریززندگی می‌کند؛

۴)آن مسافری‌که محل زندگیش، نسبت به سایرمسافرها، به‌محل زندگی بازرس قطار، نزدیکتر است، درماه سه‌برابر بازرس درآمد دارد؛

۵) محمدی مسافر، درماه ۲۰۰۰ تومان درآمد دارد؛

۶) افشار (ازکارکنان قطار) به تازگی در مسابقهٔ بیلیارد از کمك‌راننده برده است.

فامیل راننده چیست؟

۲۶۸. داستان یك دزدی (ازمجلهٔ «Scripta Mathematica»)

دریکی ازدبستانهای نیویورك،کیف پول خانم‌آموزگارگم شد. دزدی را

یکی از این ۵ دانش‌آموز، کرده بودند : لیلیان، جودی، دیوید، تئو یا مارگارت.

ضمن بازپرسی، هرکدام ازاین بچه‌ها سه‌گواهی دادند.

لیلیان : ۱) من کیف را برنداشته‌ام؛ ۲) من هرگز درزندگی‌خود، چیزی ندزدیده‌ام؛ ۳) این کار تئو است.

جودی : ۴) من کیف را برنداشته‌ام؛ ۵) پدرمن به‌اندازهٔ کافی‌پول دارد و من برای خودم کیف دارم؛ ۶) مارگارت می‌داند چه‌کسی کیف را برداشته است.

دیوید : ۷) من کیف را برنداشته‌ام؛ ۸) من تا آمدن به‌مدرسه، با مارگارت‌آشنا نبوده‌ام؛ ۹) این کار تئو است.

تئو : ۱۰) من گناهی‌ندارم؛ ۱۱) این کار مارگارت‌است؛ ۱۲) لیلیان دروغ می‌گویدکه من کیف را برداشته‌ام.

مارگارت : ۱۳) من کیف خانم‌معلم را برنداشته‌ام؛ ۱۴) دراین‌باره جودی مقصر است؛ ۱۵) دیوید می‌تواند ضامن بشود، زیرا اوازروز تولد مرا می‌شناسد.

درتحقیقات بعدی معلوم شدکه هرکدام از دانش‌آموزان دوجوابِ درست ویك جواب نادرست داده‌اند.

کدام دانش‌آموز کیف خانم معلم را برداشته است؟

۲۶۹. جمع‌آوری گیاهان

درتابستان، دوگروه پیش‌آهنگی، چند پاکت گیاه باارزش دارویی، جمع کردند. هرگروه به‌خاطر جمع‌آوری گیاه، علاوه‌برقیمت اصلی، مبلغ کمی هم به‌عنوان پاداش و تشویق دریافت‌کرد . قسمت بیشتر پاداش نصیب گروه اول شد ، زیرا آنها بیشتر ازگروه دوم ، گیاه دارویی جمع‌کرده

بودند.

اگر، علاوه‌برمبلغ کل پاداش، می‌دانستیم که هرکدام از دوگروه، چند پاکت‌گیاه جمع کرده‌اند، کار تقسیم باداش خیلی ساده بود، زیراهمهٔ پاکتها دارای یك ارزش بودند. ولی‌بچه‌هاتمام عملهای لازم رابه‌صورت رمزنوشته‌اند، به‌این‌معنی که بجای همهٔ رقمها، جزیك رقم۷، علامت‌ستاره گذاشته‌اند وحالا ازشما می‌خواهندکه رمزآنهاراکشف کنید.

حل رمزی‌آنها چنین است:

۱. دوگروه، چند پاکت‌گیاه دارویی جمع‌آوری کرده‌اند؟

$$\begin{array}{r} * \\ +\ * \\ \hline * \ * \end{array}$$

۲. برای هرپاکت‌گیاه دارویی، چند ریال پاداش داده شده است؟

$$\begin{array}{r|l} * \ * \ * & * \ 7 \\ -\ * \ * & \\ \hline * \ * & * \ * \\ * \ * & \\ \hline = \ = & \end{array}$$

۳. چه پاداشی نصیب‌گروه اول شده است؟

$$\begin{array}{r} * \ * \\ \times\ * \\ \hline * \ * \end{array}$$

۴. چه‌پاداشی نصیب‌گروه دوم شده است؟

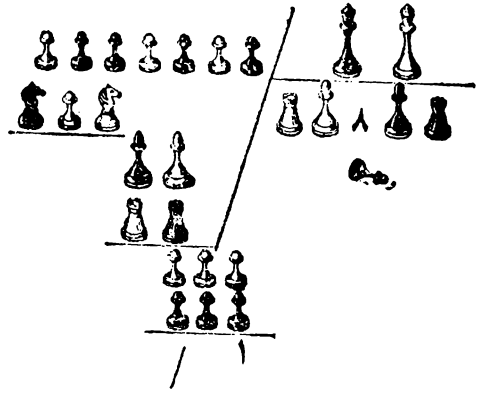
$$\begin{array}{r} * \ * \\ \times\ * \\ \hline * \ * \end{array}$$

۲۷۰. تقسیم پنهانی

دوشطرنج‌بازجوان پشت میزبازی باسکوت‌کامل مبارزه می‌کردند. شروین

مدیر روزنامهٔ ریاضی دیـواری «اندیشه» کنار آنها نشسته بـود و برای شمارهٔ بعد روزنامهٔ خود، مسأله درست می‌کرد.

وقتی تقسیم یك عدد هفت رقمی را بریك عدد دورقمی تمام‌کرد، صفحهٔ محاسبهٔ خـود را به‌کناری گذاشت و به طـرح یك شکل پرداخت. دوشطرنج‌بازی‌که‌کنار او نشسته بودند ، بدون اینکه بازی خود را قطع کنند، به‌عنوان سرگرمی، هرمهره شطرنجی راکه ازصفحهٔ شطرنج برمی‌داشتند،روی یکی‌ازرقمها درصفحه‌ای‌که شروین‌نوشته بود،قرارمی‌دادند. بعدازآنکه بازی شطرنج تمام‌شد، همهٔ رقمهای مقسوم،مقسوم‌علیه،خارج قسمت وهمهٔ رقمهای عملهای بینابینی، به‌جزآخرین باقیمانده‌که مساوی واحد بود، به‌وسیله مهره‌های شطرنج پوشیده شد.



مربوط به‌مسألهٔ ۲۷۵. مقسوم، مقسوم‌علیه وخارج قسمت را پیداکنید.

یکی ازشطرنج‌بازها، روبه‌شروین‌کرد وگفت:

ـ اینهم مسأله‌ای برای روزنامهٔ تو؛ این‌شکل‌را رسم‌کن، یاعکس

آنرا بردار و در روزنامه بگذار و از خوانندگان آن بخواه که رقمهای پنهان شده را پیدا کنند.

شروین باخوشحالی گفت:

ـ واقعاً هم مسألهٔ بسیارجالبی می‌شود، منتهی اجازه بدهید ببینم آیا مسأله جواب دارد.

بعدازآنکه مدتی روی آن کار کردند، میوجه شدندکه مسأله جواب‌های بسیار زیادی دارد، ولی اگر، رقم وسط خارج قسمت (رقم ۸) را آشکارکنند، تنها یك جواب پیدا می‌کند.

حالا شما هم کوشش کنید، مقسوم، مقسوم‌علیه وخارج قسمت این تقسیم را پیداکنید.

۲۷۱. عملهای رمزی (جناس عددی)

در ده نمونهٔ زیر، عملهای حسابی به‌صورت رمزداده شده‌اند: بجای رقمها، ازستاره و حرف استفاده شده است. درهرنمونه، دوحرف یکجور نمایندهٔ یك رقم است ودوحرف مختلف نمایندهٔ دورقم مختلف؛ ستاره‌ها: نمایندهٔ هررقمی می‌توانند باشند، چه‌رقمهای مساوی و چه‌رقمهای مختلف. رمز هرکدام ازاین‌نمونه‌ها را باید با استدلال پیوسته وظریفی، روشن کرد.

نمونهٔ اول

$$\begin{array}{r} ABC \\ \times\ BAC \\ \hline **** \\ **A \\ ***B \\ \hline ****** \end{array}$$

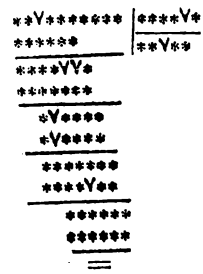
نمونهٔ دوم

$$\begin{array}{r} *** \\ \times\ *2* \\ \hline *** \\ **** \\ *8* \\ \hline **9*2* \end{array}$$

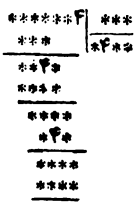
نمونهٔ سوم

$$\begin{array}{r|l} MYXA & XA \\ XA & YXA \\ \hline KX & \\ AP & \\ \hline YXA & \\ YXA & \\ \hline = & \end{array}$$

نمونهٔ چهارم



نمونهٔ پنجم (چهارجواب دارد)



نمونهٔ ششم (دوجواب دارد)

DO + RE = MI

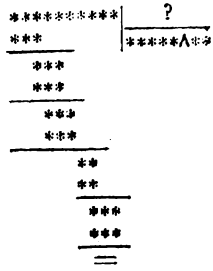
FA + SI = LA

RE + SI + LA = SOL

نمونهٔ هفتم (چند جواب دارد؟)

```
  + م ر د
    ف و ت
  -------
    ب ا ل
```

نمونهٔ هشتم (پیچیدگی این نمونه در آنجاست که حتی تعداد رقمهای مقسوم‌علیه هم معلوم نیست، باوجود این، تنها یك جواب دارد).

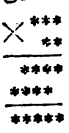


نمونهٔ نهم

```
  ATOM
  ATOM
 -------
 *****
*****
*****
*****
-------
****ATOM
```

نمونهٔ دهم

(دراین‌نمونه، همهٔ رقمها، عددهایی اولند)



۲۷۲. موزائیك حسابی

در اینجا دونمونه، ردیفهایی از حرفها و علامتها داده شده است که طبعاً باید، عملها ازهردوطرف (سطری وستونی) درست‌باشند. حل این‌دونمونه هم با انتخاب تصادفی عددها بدست نمی‌آید، بلکه استدلال منطقی لازم دارد.

نمونهٔ اول	نمونهٔ دوم
و ی ب ب = ن ت ب + آ ی ت	HEB + EUS = LFS
: — — —	— + :
و = ج د ب : ج و ف	WUB : EH = US
= = =	= = =
ت ر ر = ن ف — آ ت ر	EHB — ESU = RA

مثل نمونه‌های مسألهٔ قبل، حرفها جای رقمهاراگرفته‌اند وضمناً دوحرف مختلف، متناظر بادوعدد مختلف‌است. علامتها هم، نوع‌عملها را به صورت سطری و ستونی نشان می‌دهند. باید عددهایی بجای حرفها انتخاب‌کردکه همهٔ این‌عملها درست باشد.

بعد ازآنکه رقمها راکشف‌کردید، اگر حرفهای متناظر باآنها را به‌ترتیب از ۰ تا ۹ (برای حرفهای فارسی از راست به چپ وبرای حرفهای لاتینی ازچپ به‌راست) قراردهید، نمونهٔ اول، معنایی درزبان فارسی و نمونهٔ دوم معنایی درزبان‌آلمانی خواهد داشت.

۲۷۳. موتورسیکلت وتاکسی‌بار

ازقسمت پست، موتورسواری‌به‌فرودگاه فرستاده شد تا بارسیدن‌هواپیما، بسته‌های پستی را تحویل بگیرد.

هواپیما قبل‌ازموعد مقرر رسید و بسته‌های پستی را به‌وسیلهٔ یك تاکسی‌بار، به طرف قسمت پست فرستادند. بعد ازنیم ساعت، تاکسی‌بار

به‌موتورسوار برخورد کرد، بسته‌های پستی را به‌او تحویل داد و موتورسوار بدون معطلی برگشت.

موتورسوار ۲۰ دقیقه زودتر از معمول به‌قسمت پست رسید.

هواپیما، چند دقیقه پیش‌از موعد مقرر، به‌فرودگاه رسیده‌بود؟

۲۷۴. با پای پیاده و بااتومبیل

کسی که مسألهٔ قبل را حل کرده باشد، به‌سادگی می‌تواند این مسأله را، که ازهمان نوع است، حل کند.

مهندسی که در شهر کار می‌کرد، معمولاً ساعت ۸ و ۳۰ دقیقه به ایستگاه می‌رسید و با اتومبیلی که آماده بود، بی‌معطلی به‌طرف کارخانه حرکت می‌کرد.

یک روز مهندس ساعت ۷ به‌ایستگاه رسید و به‌جای اینکه منتظر اتومبیل بماند، پیاده به طرف کارخانه حرکت کرد. در راه به‌اتومبیل برخورد و با آن خود را به‌کارخانه رسانید. وقتی که مهندس به‌کارخانه رسید، ۱۰ دقیقه زودتر از معمول بود.

وقتی که مهندس در راه به اتومبیل رسید چه ساعتی بوده است؟ سرعت اتومبیل چند برابر سرعت پیاده است؟

۲۷۵. برهان خلف

فرض کنید، دوحکم A وB را داشته باشیم، به نحوی که یکی دیگری را نقض کند. روشن است که ازاین دوحکم، تنها یکی می‌تواند درست باشد. فرض کنید که بخواهیم درستی حکم A را ثابت کنیم.

گاهی، به‌جای اینکه به‌طور مستقیم، درستی حکم A را ثابت کنند، به‌اثبات غیرمستقیم آن می‌پردازند، یعنی ثابت می‌کنند که حکم B نادرست

کتابخانه مجازی ریاضیات

است، واین مثل آنست که درستی حکم A را ثابت کرده باشند. این روش استدلال، که اثبات با برهان خلف نامیده می‌شود، بیش‌ازهمه درهندسه و بعد درجبر وگاهی درحساب، مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش را، نه‌تنها برای اثبات قضیه‌ها، بلکه برای حل مسأله‌ها هم می‌توان به‌کاربرد.

به‌عنوان نمونه، یك مسأله را به‌طریق برهان خلف، حل می‌کنیم.

مجموع دوعدد برابر است با ۷۵. اولی ۱۵ واحد ازدومی بزرگتر است. با روش برهان خلف ثابت کنیدکه عدد دوم مساوی ۳۰ است.

حل. فرض می‌کنیم عدد دوم مساوی ۳۰ نباشد، دراینصورت یااز ۳۰ کوچکتر است ویا بزرگتر. اگرعدد دوم از ۳۰ بزرگترباشد، عدد اول از ۴۵ بزرگتر و مجموع آنها از ۷۵ بزرگتر می‌شودکه متناقض با فرض است. اگر هم عدد دوم از ۳۰ کوچکتر باشد، عدد اول از ۴۵ کوچکتر و مجموع آنها از ۷۵ کوچکترمی‌شود، که بازهم متناقض فرض است.

بنابراین، عدد دوم مساوی ۳۰ است.

این دومسأله را بااستفاده ازروش برهان خلف حل کنید:

مسألهٔ ۱. حاصلضرب دوعددصحیح از ۷۵ بزرگتراست. ثابت کنید که لااقل یکی‌ازعاملها از ۸ بزرگتر است.

مسألهٔ ۲. حاصلضرب یك عدد دورقمی در ۵، مساوی یك عدد دورقمی شده است. ثابت کنیدکه رقم اول عدد دورقمی مفروض، مساوی واحد است.

۲۷۶. سکهٔ تقلبی راکشف کنید

گاهی پیش می‌آیدکه بخواهیم سکه‌های تقلبی را ازبین سکه‌های واقعی به‌کمك ترازو، و بدون استفاده از سنگ ترازو، جداکنیم. چهار مسألهٔ زیر، برای ورزیدگی فکرشما، درهمین زمینه درست شده است.

مسألهٔ اول. ۹ سکه، که ارزش مساوی دارند، در دست است، می‌دانیم ۸ سکه حقیقی است ونهمی، که تقلبی است، ازآنها سبکتراست. می‌خواهیم، بدون استفاده‌ازسنگ ترازو، با دوبار وزن‌کردن، سکهٔ تقلبی را جداکنیم.

مسألهٔ دوم. با همان شرطها، سکهٔ تقلبی را (که سبك‌تر است) از بین ۸ سکه، با دوبار وزن‌کردن پیداکنید.

مسألهٔ سوم. بین ۱۲ سکه، یك سکهٔ تقلبی وجود دارد. می‌دانیم که این سکه تقلبی ازلحاظ وزن، سبك‌تر یا سنگین‌تر ازبقیه است. سکه‌های حقیقی، همه یك وزن دارند. با سه‌بار وزن‌کردن، بدون استفاده ازسنگ ترازو، اولاً سکهٔ تقلبی را جداکنید، ثانیاً بگویید که آیا از سکهٔ حقیقی سبك‌تر است یا سنگین‌تر.

مسألهٔ چهارم. ثابت کنید که برای مسألهٔ سوم، هفت راه‌حل مختلف وجود دارد.

وحالا، مسأله‌هایی که خودتان حل کنید (بدون جواب)

مسألهٔ ۱. ۱۳ قطعه از یك جنس و به‌یك شکل تهیه شده است، که باید به‌یك وزن باشند. ولی احتمال دارد دربین آنها، قطعه‌ای وجودداشته باشد (ونه بیشترازیکی)، که ازلحاظ وزن، بادیگران متفاوت باشد.

با سه‌بار وزن‌کردن، معلوم کنید که آیا دربین آنها، قطعه‌ای وجود دارد که وزنش با دیگران فرق کند، و اگر وجود دارد سبك‌تر از دیگران است یا سنگین‌تر. سنگ ترازو نداریم، ولی یك قطعه اضافی (قطعه چهاردهم) وجود دارد که وزن آن دقیقاً برابراست باوزنی که بایدیك قطعهٔ حقیقی داشته باشد.

مسألهٔ ۲. تعمیم مسألهٔ قبل. شرطها، مثل مسألهٔ قبل، ولی تعداد

قطعه‌هایی که باید بازرسی شود، مساوی $\frac{۳^n-۱}{۲}$ و می‌خواهیم مسأله‌را با n بار وزن کردن، حل کنیم ($n=۱,۲,۳,\ldots$).

۲۷۷. مسألهٔ منطقی

درمسابقه‌ای که بین علاقمندان به‌مسأله‌های ریاضی ومعماها، ترتیب‌داده شده بود، ۳ نفر انتخاب شدند: A، B و C. برای اینکه برندهٔ نهایی را معین کنند، تصمیم گرفتند ، آزمایش دیگری انجام دهند. ۵ ورق کاغذ به‌آنها نشان دادند: ۳ کاغذ سفید و ۲ کاغذ سیاه. سپس چشمهای هرسه‌نفر را بستند وبه‌پیشانی هرکدام، یکی ازکاغذهای سفید را چسباندند وسپس ۲ کاغذ سیاه را از بین بردند. سپس چشمهای آنها را بازکردند و اعلام کردند، برنده‌کسی است که قبل از دیگران رنگ کاغذ خودش را بگوید. هیچکدام از آنها، رنگ کاغذ خودشان را نمی‌دیدند، ولی می‌توانستند رنگ کاغذ دوستانشان را ببینند. بعدازکمی فکر، هرسه‌نفر باهم گفتند که رنگ کاغذ خودشان سفید است. چگونه پیش‌خود استدلال کرده بودند؟

۲۷۸. سه دانشمند

سه‌فیلسوف یونان‌باستان، که ازبحث طولانی وهم‌گرمای تابستان، خسته شده بودند، تصمیم گرفتندکمی زیر درخت باغ آکادمی استراحت کنند و بخوابند. وقتی که آنها خوابیده بودند، آدم شوخی، پیشانی هرسه‌نفر را با زغال سیاه‌کرد. آنها با سرزندگی از خواب بیدارشدند و با نگاه‌کردن به‌یکدیگر شروع به‌خنده‌کردند، ولی‌هیچکدام ازآنها ناراحت نبود. زیرا به‌طورطبیعی هرکدام گمان می‌کردندکه دونفردیگربه‌هم می‌خندند.

ناگهان یکی ازدانشمندان، خندهٔ خودرا قطع‌کرد، زیرا متوجه‌شد که پیشانی خود اوهم کثیف شده‌است.

چطورپیش خود استدلال کرده بود؟

۲۷۹. پنج پرسش برای دانش‌آموزان

هرمطلب ریاضی باید به‌اندازهٔ کافی کامل باشد و ضمناً کلمهٔ اضافی درآن وجود نداشته‌باشد. کوتاهی ودقت کلام، در زبان ریاضی، یکی از خطوط مشخص کنندهٔ این‌علم درزمان ماست.

۱. درحکمهای زیر، آنچه راکه لازم نیست، پیداکنید:

الف) مجموع دوزاویهٔ حادهٔ مجاور وتر ازمثلث قائم‌الزاویه برابر است با ۹۰ درجه؛

ب) اگرضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه ازمثلث قائم‌الزاویه، برابر با نصف وتر باشد، زاویه حادهٔ روبرو به‌آن مساوی ۳۰ درجه است.

۲. جمله‌های زیررا، بااستفاده ازاصطلاحهای ریاضی، ساده‌کنید:

الف) قسمتی از یك قاطع که درداخل دایره قراردارد؛

ب) یك چندضلعی، با حداقل ضلعها؛

ج) وتری‌که ازمرکز دایره عبور می‌کند؛

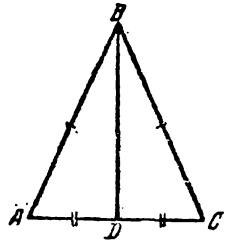
د) مثلث متساوی‌الساقینی‌که قاعده‌اش بایکی‌ازساقها برابراست؛

ه) دو دایره ،که شعاعهای متفاوت و مرکزهای منطبق برهم دارند.

۳. در مثلث ABC (شکل را ببینید)، می‌دانیم:

$$AB=BC,\ AD=DC$$

لااقل پنج‌اصطلاح، برای‌پاره‌خط BD ذکرکنید.



مربوط به‌مسألهٔ ۲۷۹

۴. دراینجا ۷ اصطلاح ریاضی داده شده است.

متوازی‌الاضلاع، شکل هندسی، مربع، چندضلعی، شکل مسطحه، لوزی، چهارضلعی محدب.

این اصطلاحها را طوری دنبال هم بنویسید که هر مفهوم شامل مفهوم بعدازخودش باشد.

۵. می‌دانیم که مجموع زاویه‌های خارجی هرچند ضلعی محدب مساوی ۴ قائمه است، بگویید حداکثر تعداد زاویه‌های حاده داخلی در یک چندضلعی چندتاست؟

۲۸۰. استدلال به‌جای معادله

هرکسی که مقداری ریاضیات خوانده باشد، بابعضی روشهای حساب، یا احتمالاً جبر و سایر رشته‌های ریاضی، آشناست و به‌کمک آنها می‌تواند مسألهٔ ریاضی موردنظرخودرا حل کند.

ولی مسأله‌هایی وجود داردکه می‌توان به‌جای استفاده ازمعادله، برای حل آنها، تنها به‌تفکر، مشاهده واستدلال متوسل شد. واین دونمونه ازاین مسأله‌ها:

مسألهٔ ۱. عدد دورقمی داریم که اگرآنرا ازراست به‌چپ بنویسیم (یعنی جای رقمهای آن را عوض کنیم)، «مقلوب» آن بدست می‌آیدکه $۴\frac{۱}{۲}$ برابر اولی است. این عدد را پیداکنید.

فرضهای مسأله، زیادنیست، ولی بااستفاده ماهرانه‌ازهمین فرضها، می‌توان بااستدلالی به‌ترتیب زیر، آنرا پیداکرد:

a) عدد مجهول از ۱۰ بزرگتر است، زیرا دورقمی است؛

b) ولی‌از ۲۵ کمتراست، زیرا $۴\frac{۱}{۲} \times ۲۵$، عددی سه‌رقمی می‌شود؛

c) عدد مجهول باید زوج باشد، تا ازضرب آن در $۴\frac{۱}{۲}$، یک عدد صحیح بدست‌آید؛

d) مقلوب عدد مساوی ۹ برابرنصف عدد مجهول است، بنابراین مقلوب عدد مجهول، مضربی است از۹؛

e) چون مقلوب عدد مضربی است از۹، بنابراین مجموع رقمهای آن بر۹قابل‌قسمت است؛ عدد مجهول هم ازهمین رقمها درست‌شده‌است، یعنی عدد مجهول هم مضربی است از۹.

این استدلال را ادامه دهید وعدد مجهول را بدست‌آورید.

مسألهٔ ۲. حاصلضرب چهارعدد صحیح متوالی مساوی۳۰۲۴ شده است. این‌عددها را پیداکنید.

برای حل«منطقی»این‌مسأله، می‌توان طرح‌استدلال را به‌این‌ترتیب ریخت:

a) روشن‌کندکه بین این عددها، عدد۱۰ وجود ندارد؛

b) استدلال کنندکه بین این چهارعدد باید عددی‌کوچکتر از ۱۰ وجود داشته باشد؛

c) از نتیجه‌گیریهای a و b، و ازشرطهای مسأله، نتیجه بگیرید که هرچهارعدد از۱۰کوچکتر، وبنابراین یك‌رقمی‌اند؛

d) هیچکدام ازاین عددها، مساوی ۵ نیست؛

e) حالا،همهٔ بقیهٔعددهای‌یك‌رقمی‌را به‌دوگروه‌تقسیم‌کنید وروشن کنیدکه‌کدامیك ازاین دوگروه، جواب مسأله است.

۲۸۱. بااستدلال شفاهی

استاد درس «تدریس عملی» این‌مسأله را درمقابل دانشجوی خود،که در دانشکدهٔ «تربیت معلم» درس می‌خواند ،گذاشت و از او خواست‌که این مسأله را دریك دقیقه، به‌نحوی‌که برای یك دانش‌آموز سال‌آخر دبستان قابل‌فهم باشد، بااستدلال شفاهی حل‌کند:

« اگر سن بچه‌ای را ۳ سال اضافه‌کنیم، عددی بدست می‌آید که مجذورکامل یك عدد صحیح است، واگر این جذر را حساب‌کنیم،۳ سال کمتر ازسن بچه بدست می‌آید. سن بچه چقدر است؟»

ولی دانشجو باتعجب پرسید:

ـ چطور! بااستدلال شفاهی،آنهم دریك دقیقه؟ این‌مسأله را باید به‌کمك جبر وآنهم با استفاده ازیك معادلهٔ درجه دوم، و یا با استدلالی حسابی،که برای دانش‌آموز دبستان قابل‌فهم نیست، حل‌کرد.

ـ ولی در مورد این مسألهٔ بخصوص، اینطور نیست، دانش‌آموز دبستانی هم می‌تواندآنرا درذهن‌خود، وتقریباً بدون استفاده ازمحاسبه، حل‌کند.

آیا شما می‌توانید این روش‌سادهٔ حل را پیداکنید؟

و برای کسانی که از معادله‌های درجه دوم اطلاع دارند ، این پرسشهای اضافی را می‌گذاریم:

۱. روش استدلال حسابی و حل جبری‌که دانشجو برای این‌مسأله درنظرگرفته بود،کدام است؟

۲. کدام عدد N راازقبل‌می‌توان درنظرگرفت،که درسالهای‌آیندهٔ قهرمان مسألهٔ ما، سنی برای اووجود داشته باشد، به‌نحوی‌که اگرN را به‌آن اضافه‌کنیم، حاصل مجذور یك عدد صحیح بشود واگر N راازآن کم‌کنیم، جذرهمان مجذورکامل بدست‌آید.

۳. کوتاه‌ترین روش، برای تعیین سن، درمورد هرعدد انتخاب‌شدهٔ N،کدام است؟

۲۸۲. بله یا نه؟

فرض‌کنیدکه دوست شما، عددی بین ۱ و ۱۰۰۰، فکرکرده باشد. برای

اینکه شمابتوانید این‌عدد راکشف‌کنید،می‌توانید اورا دربرابرپرسشهایی قراردهید. فرض می‌کنیم‌که دوست شما دربرابر این پرسشها، تنها پاسخ بله یا نه را بدهد.

اگر شما، تنها حق ۱۰ پرسش را داشته باشید ، چگونه باید این پرسشها را تنظیم‌کرد تا درپایان‌آنها بتوانید عدد موردنظررا پیداکنید؟

بخش دهم

بازیها و شیرینکاریهای ریاضی

A. بازیها

بازیهایی وجـود دارد که انجام موفقیت‌آمیز آنهـا به‌اندیشه وتفکروبه محاسبه‌های قبلی بستگی دارد، و پیش‌آمدهای تصادفی مساعد نمی‌تواند نقشی درآنهاداشته‌باشد. اگرکسی، به‌محاسبه‌هایی‌که دراساس بازی وجود دارد، آشنا باشد، بـا دراختیارداشتن رمزبازی، می‌تواند بی‌چون و چرا، بررقیبی‌که ازبنیان ریاضی‌آن اطلاع ندارد، پیروزشود. چنین بازیهایی را می‌توان مسأله‌هایی اززریاضی دانست، منتهی مسأله‌هایی‌که، به‌صورت سرگرمیهای ریاضی درآمده‌اند واندیشهٔ‌آدمی را به‌کمك بازی و تفریح، به‌کار می‌اندازند.

۲۸۳. یازده شیء

روی میز، یازده شیء یکجور، ومثلاً چوب‌کبریت، وجود دارد. نفراول، به‌میل خود، ۱، ۲ یا ۳ شیء را از روی میز برمی‌دارد، سپس نفردوم هم،

به‌میل‌خود، ۱، ۲یا۳ شیء از روی میزبرمی‌دارد. بعد دوباره نوبت اولی می‌رسد و غیره. به‌این‌ترتیب، هریك از بازیکنها، به نوبت تا حداکثر ۳ شیء را برمی‌دارند. کسی بازی را باخته است که آخرین شیء را بردارد. آیاکسی‌که بازی را شروع‌کرده است، می‌تواند ترتیبی بدهدکه آخرین شیء برای رقیبش باقی بماند؟

در حالتی‌که تعداد اشیاء اولیه مساوی ۳۰ باشد، چگونه می‌توان برنده شد؟

حالت‌کلی. اگر تعداد چوب‌کبریتهای روی میز n عدد باشد، و هرنفربتواند هربار تا p چوب‌کبریت ازروی میز بردارد (که‌البته p از n کوچکتر است)، چگونه می‌توان برد کسی‌که بازی را شروع می‌کند، تضمین‌کرد؟

۲۸۴. انتخاب چوب‌کبریتهای‌آخر

حالا، شرط مسألهٔ قبل را تغییر می‌دهیم وفرض می‌کنیم‌کسی برنده‌باشد که‌آخرین‌چوب‌کبریتهارا بردارد.

دونفربازی می‌کنند و هرکدام به‌نوبت می‌توانند از ۱ تا ۶ چوب کبریت را بردارند.

اگرتعداد چوب‌کبریتهای اولیه، مساوی۳۰باشد، چطوربایدبازی را ادامه داد تابتوان‌آخرین چوب‌کبریتها را برداشت؟

۲۸۵. زوج برنده است

۲۷ چوب‌کبریت روی میز است. دونفر می‌توانند به‌نوبت، حداقل یك و حداکثر چهار چوب‌کبریت ازروی میز بردارند. کسی برنده است‌که در پایان بازی، تعداد چوب‌کبریتهایش، عددی زوج باشد.

چگونه می‌توان برنده شد؟

۲۸۶. تسه زیان شیتزی

تسه زیان شیتزی، یك بازی ملی چینی و به‌معنای «انتخاب سنگ» است.

دراین بازی، دونفر شرکت می‌کنند. دوتودهٔ سنگریزه روی زمین می‌ریزند وبه‌نوبت، طبق قاعدهٔ زیر، ازاین‌توده‌ها، سنگریزه برمی‌دارند:

a) از یك توده، می‌توان به‌تعداد دلخواه (و حتی تمام توده) را برداشت.

b) می‌توان همزمان از هردوتوده برداشت، منتهی در این‌حالت، باید تعداد سنگریزه‌هایی که از دو توده برداشته می‌شود، حتماً مساوی یکدیگرباشند.

مربوط به‌مسألهٔ ۲۸۶

کسی بازی را می‌برد که آخرین سنگریزه را برداشته باشد. البته، به‌جای سنگریزه ازهرچیز دیگری هم می‌توان استفاده کرد. دراین‌بازی، تعداداولیهٔ سنگریزه‌ها، درهرتوده، مقدارمشخصی نیست و دوبازیکن در موقع شروع بازی، می‌توانند به دلخواه در بارهٔ آن توافق کنند.

ازنظرریاضی، این مطلب جالب است که بتوانیم نظریهٔ این بازی را تنظیم کنیم، و چنان روشی پیدا کنیم که پیروزی بازیکن معینی را تضمین کند.

مثلاً روشن است که در وضع (۱ ، ۰) (یعنی در یک توده یک سنگریزه و در تودهٔ دیگر، ۰ سنگریزه باشد) و در وضع (n ، n) (یعنی حالتی که تعداد سنگریزه‌ها درهردوتوده یکی است)، برد باکسی است که نوبت بازی با اوست. او یکبار تمام سنگریزه‌ها را برمی‌دارد (در وضع اول، طبق قاعدهٔ a و دروضع دوم، طبق قاعدهٔ b) وبازی را با پیروزی خود خاتمه می‌دهد.

دروضع (۱،۲)، کسی که نوبت بازی بااوست خواهد باخت. برای اینکه به‌این مطلب قانع شویم، می‌توان درجدولی، تمام حالتهای ممکن ادامهٔ بازی را دروضع (۱،۲) منظم کرد:

حالت اول			حالت دوم			حالت سوم			حالت چهارم		
تعداد سنگها	بازی‌می‌کنند A	B	تعداد سنگها	بازی‌می‌کنند A	B	تعداد سنگها	بازی‌می‌کنند A	B	تعداد سنگها	بازی‌می‌کنند A	B
۱	۰	۰	۱	۱	۰	۱	۱	۰	۱	۰	۰
۲	۲	۰	۲	۰	۰	۲	۱	۰	۲	۱	۰

در ستون اول جدول، تعداد سنگها در هرتوده معین شده است. عددهایی که زیر A وB نوشته شده است، نشان می‌دهد که چندسنگ بعداز بازی باقی‌مانده است (A بازی اول را انجام می‌دهد). فرض کنیم که A، تنها سنگی راکه درتودهٔ اول وجود دارد، بردارد (درجدول ـ حالت اول)، دراین‌صورت B، هردوسنگی راکه درتوده دوم وجود دارد، برمی‌دارد وبازی را می‌برد.

حالت دوم جدول: A، ۲سنگ‌ازتوده دوم‌را برمی‌دارد، دراین‌صورت B، تنها سنگ تودهٔ اول را برمی‌دارد و برنده می‌شود و غیره. در تمام

چهارحالت ممکن ، B برنده است . به‌این‌ترتیب، وضع (۲ ، ۱) دوتودهٔ سنگریزه، همیشه برای‌کسی‌که بازی را شروع می‌کند نامساعداست، زیرا منجر به‌باخت او می‌شود . این وضع را «ن» می‌نامیم (نامساعد برای شروع‌کننده).

بررسی را ادامه می‌دهیم . اگر در یکی از توده‌ها یك سنگ و در دیگری لااقل سه‌سنگ وجود داشته باشد، بازیکن A،که بازی‌را شروع می‌کند، پیروز می‌شود: او ازتودهٔ دوم، همهٔ سنگها را برمی‌دارد و تنها ۲ سنگ درآن باقی می‌گذارد ووضع را به‌صورت (۱،۲) درمی‌آورد، و این‌همان وضعی‌است‌که برای‌کسی‌که نوبت بازی بااوست (یعنی B)حتماً منجربه‌باخت می‌شود.

ازاینجا نتیجه می‌شودکه وضع (۱، n)، تنها برای‌حالت $n=۲$، وضع «ن»است؛ درتمام حالتهای دیگر، به‌وضع «م» منجرمی‌شود(مساعد، برای شروع‌کننده).

کسی‌که می‌خواهد دربازی برنده شود، بایدآنرا طوری پیش ببرد که وضع «ن» را درمقابل رقیب خود قراردهد.

به‌جز رابطهٔ (۱،۲) بین‌سنگهای دوتوده، چه رابطهٔ دیگری‌به‌وضع «ن» منجرمی‌شود؟

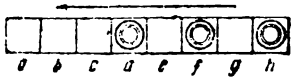
همهٔ حالتهای بازی‌را دروضع (n ، ۲) برای $n>۱$ بررسی‌کنید، سپس حالتهای بازی را برای وضع (n ، ۳) و غیره. بدون تردید، یك رشته وضع «ن» پیدا خواهیدکردکه آگاهی به‌آنها ، پیروزی دربازی را تضمین می‌کند.

سپس می‌توان روی حالتهای «ن» مطالعه‌کرد وارتباط بین‌آنهارا

بدست‌آورد و درنتیجه، نظریهٔ کلی این بازی را تنظیم کرد. ولی این یك مسألهٔ جدی و مشکلی است که برای نخستین‌بار به وسیلهٔ ایگور ـ ولادیمیرویچ آرنولد، درسال ۱۹۳۰ حل شد.

۲۸۷. چگونه می‌توان پیروز شد؟

دونفربازی می‌کنند. میدان بازی، یك نوار کاغذی است که به ۸ خانه تقسیم شده است. در خانه‌های d، f و h، مهره‌هایی گذاشته شده است (شکل را ببینید). بازیکنها به‌نوبت یکی از مهره‌ها را، به‌هرخانه‌ای که بخواهند، در جهتی که پیکان نشان داده است، منتقل می‌کنند. مهره را می‌توان از روی مهرهٔ دیگرعبورداد ودریك خانه گذاشت ویا حتی می‌توان مهره را درخانه‌ای که ازقبل اشغال شده است، قرارداد.

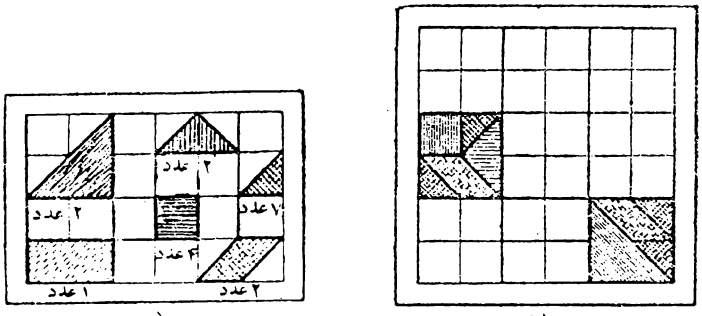


مربوط به‌مسألهٔ ۲۸۷

کسی بازی را می‌بردکه آخرین مهره را در خانهٔ a بگذارد. اگر دستگاهی برای حرکت درست، تشکیل دهید، همیشه کسی که حرکت اول را انجام می‌دهد، برنده خواهد بود. تشکیل دستگاهی که این پیروزی را تضمین کند واثبات این‌حکم را به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۲۸۸. درآوردن مربع

این، یك بازی کوچك ساختمانی است. ۱۸ شکل مسطحهٔ مقوایی دربرابر هر یك از دوبازیکن وجود دارد (شکل a را ببینید). رنگ شکلهای یك مجموعه (که به‌یك اندازه و به‌یك شکل‌اند) با رنگ مجموعهٔ دیگر باید تفاوت داشته باشد.


۲ عدد
۲ عدد
۲ عدد
۱ عدد
۲ عدد
۱ عدد
۲ عدد
۲ عدد
۱ عدد
۲ عدد
۱ عدد
۲ عدد
۱

اندیشهٔ بازیکنان باید دراینجهت به‌کارافتد که با استفاده از شکلهایی‌که دراختیار دارند، بتوانند حداکثرتعداد مربعها را بسازند.

بازی وقتی تمام می‌شود که هیچکدام از دو رقیب، دیگر نتوانند مربعی بسازند ویا مربعهای خودرا تکمیل کنند.

کسی برنده است‌که بیش‌ازدیگری مربع ساخته‌است. برای‌نمونه، دوحالت ممکن‌ازقراردادن شکلها، برای ساختن‌مربع را درشکل b نشان داده‌ایم.

۲۸۹. چه‌کسی قبل از دیگری، صد را نام می‌برد؟

دونفر بازی می‌کنند. نفر اول عدد صحیحی را نام می‌برد که از ۱۰ ، بزرگترنباشد، یعنی اومی‌تواند خود ۱۰ یا هرعدد صحیح‌کوچکتر ازآنرا نام ببرد. نفردوم هم عددی راکه بزرگتر از۱۰ نیست، درنظر می‌گیرد و حاصل‌جمع‌آنرا با عدد قبلی نام می‌برد. نفر اول دوباره به این مجموع عددی‌که از۱۰ بیشتر نباشد، اضافه می‌کند و حاصل‌جمع جدید را اعلام می‌کند. نفر دوم بازهم به‌این مجموع، عددی راکه از۱۰ بیشتر نیست، اضافه می‌کند وغیره، تاآنجاکه‌آخرین مجموع مساوی۱۰۰ شود.

مثلاً، اولی می‌تواند بگوید: ۷؛ دومی: ۱۲؛ اولی: ۲۲ وغیره.

کسی بازی را برده است‌که قبل ازدیگری به‌عدد ۱۰۰ برسد.

چگونه می‌توان برنده شد؟

وقتی‌که‌کلید پیروزی را پیدا کردید، طرح‌کار را برای حالتهای دیگر این مسأله ،که با تغییر فرضهای‌آن بدست می‌آید، بریزید؛ مثلاً حداکثرعددی راکه می‌توان به عدد قبلی اضافه کرد، چیزی غیر از۱۰ بگیرید ومرز حاصل‌جمعها را مساوی عددی غیراز۱۰۰ فرض‌کنید.

۲۹۰. بازی با مربعها

میدان بازی عبارتست از شکلهایی با زاویه‌های قائمه ،که از قبل روی کاغذ شطرنجی رسم شده است، وهرکدام ازچند (وبهتراست به‌تعداد فرد) خانهٔ مربعی تشکیل شده‌اند. اندازه ومساحت شکلها، دلخواه است.

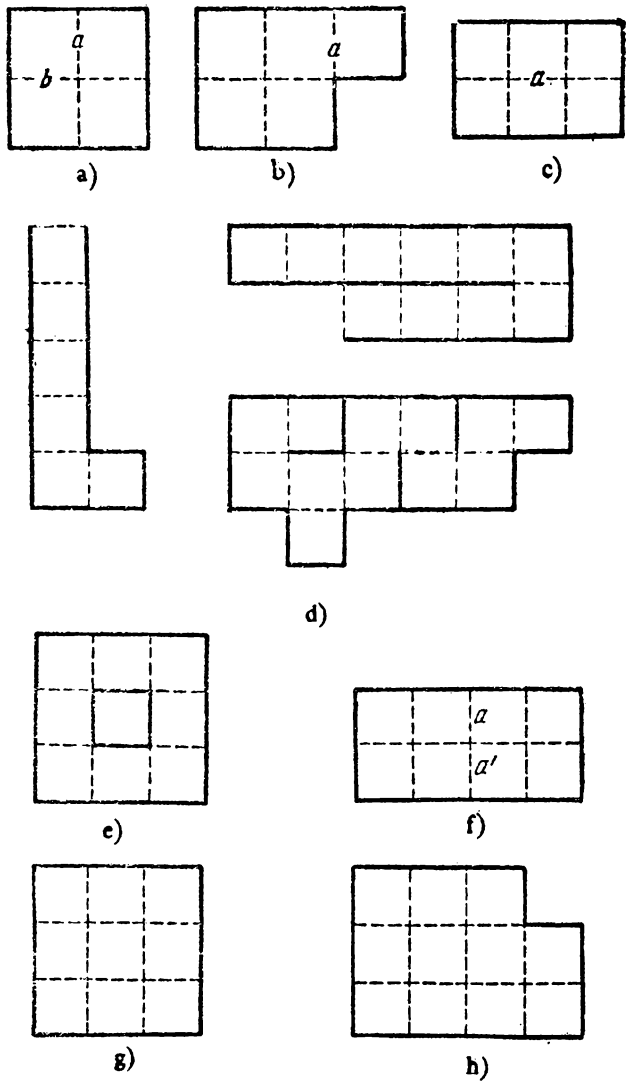
دوبازیکن ، به نوبت با مداد یا خودکار ، روی ضلعهای داخلی خانه‌ها، خط می‌کشند (درهرحرکت، یکی ازضلعها را پررنگ می‌کنند). آن ضلعهایی ازخانه‌های داخلی راکه درمرز میدان بازی قرارگرفته‌اند، نباید خط‌کشید،آنها را ساخته شده به حساب می‌آوریم.کسی‌که آخرین ضلع یك خانه را بکشد، این مربع را به حساب خود می‌گذارد،آنرا بـا علامتی مشخص می‌کند وبازهم یك حرکت‌اضافی، خارج ازنوبت،انجام می‌دهد،یعنی‌یك خط جدید می‌کشد. به‌این‌ترتیب می‌توان مرتباً،خانه‌هایی را «گرفت».

کسی بازی را می‌بردکه بیشتر از رقیب خود توانسته باشد،خانه بگیرد. میزان برد از اختلاف خانه‌های «گرفته شده » با خـانه‌های « از دست رفته»، معین می‌شود.

نظریهٔ این بازی، خیلی پیچیده‌تر ازآنست‌که در ابتدا به‌نظر می‌رسد. اگرمیدان بازی از تعداد زیادی خانه تشکیل شده باشد، ترکیبهای ممکنه‌آنقدر زیاد می‌شودکه مطالعهٔ‌آنها وبدترازآن، به‌خاطرسپردن‌آنها، تقریباً غیرممکن است.

ما تنها بعضی ازحالتهای ساده را مورد بررسی قرار می‌دهیم،که در مورد آنها بتوان نتیجهٔ بازی را ازقبل محاسبه‌کرد . آگاهی از این عنصرهای نظریه، به‌ما دراین‌بازی، نیرو می‌بخشد.

۱. همهٔ مربع، ازچهارخانه تشکیل شده باشد (شکل a را ببینید).



مربوط بمسألهٔ ۲۹۵

در اینحالت کسی که بازی را شروع کند، بازنده است. در واقع، کسی که اولین حرکت را انجام می‌دهد، هرکدام از ضلعهای داخلی مربع راکامل کند، مثلاً ضلع a ، رقیب او ضلع b راکامل می‌کند ویك خانه را می‌گیرد، وچون حق دارد حرکت دیگری هم انجام دهد، سه‌خانهٔ دیگررا هم خواهدگرفت.

۲. اگر میدان بازی شامل ۵ خانه باشد (شکل b)، دراین‌صورت باحرکت درست اول، می‌توان تنها ۳ امتیاز ازدست داد (یك خانه‌گرفته شود و۴خانه ازدست برود)؛ ولی اگر حرکت نادرستی انجام شود، هر۵ خانه از دست خواهد رفت. برای اینکه یك خانه‌گرفته شود و چهارخانهٔ بقیه ازدست برود، باید حرکت اول را روی ضلع a انجام داد.

هرحرکت دیگری کـه برای شروع کار انتخاب شود، منجر به از دست‌دادن هر۵ خانه خواهد شد.

۳. مستطیل۶خانه‌ای، برای کسی که حرکت را شروع کند(به‌شرطی که حرکت اول را روی ضلع a انجام دهد)، پیروزی کامل به دنبال دارد (شکل c).

۴. نوار درازیك خانه‌ای ـ خط شکسته با زاویه‌های قائمه، بسته یا باز، ولی بدون اینکه در وسط خود سوراخی داشته بـاشد (شکل d)، به طورکامل منجربه‌پیروزی کسی می‌شود که بازی را شروع کرده است. ولی اگرنواربسته‌ای،سوراخی‌را دوربزند (مثلاً یك خانهٔ گرفته شده را)، در این‌صورت شروع حرکت منجر به ازدست‌دادن همهٔ خـانه‌ها می‌شود (شکل e).

۵. روی مستطیلی که از ۸ خـانه درست شده است (شکل f)، به شرطی که حرکت اولیه روی ضلع a یا a′ انجام شود، بازی بدون امتیاز

تمام می‌شود (هرطرف چهارخانه می‌گیرد). هر حرکت دیگری در ابتدای کار، منجربه‌باخت کامل می‌شود.

ازنمونه‌هایی که بررسی کردیم معلوم می‌شودکه هنربازی‌دراینست که حرکت طوری انجام شود که شکل مفروض به شکلهای ساده مورد بررسی تقسیم شود، طوری که وقتی نوبت حرکت رقیب است، منجربه باخت اوبشود.

مسأله. برای مربعی‌که شامل ۹خانه است (شکل g)،می‌توان هفت امتیاز بدست‌آورد (۸خانه راگرفت و۱خانه را ازدست داد). معلوم‌کنید که ازکدام ضلع باید حرکت را شروع کرد و حالتهای ممکن ادامهٔ کار کدام است؟برای بازرسی کارخود می‌توانید به‌قسمت جواب مراجعه‌کنید.

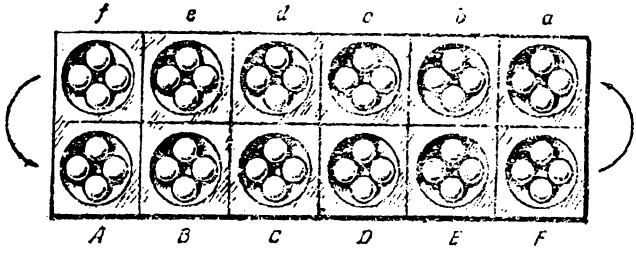
حالا خودتان طرح بازی را روی میدانی که شامل ۱۱ خانه است (شکل h)، بریزید. آیا شروع‌کنندهٔ بازی بدون شرط می‌برد یا می‌بازد. حداقل خانه‌هایی راکه ازدست می‌دهد، چقدر است؟

۲۹۱. اُاوآ

اُاوآ، بازی ملی ساکنین غرب افریقاست. بازی، روی تخته‌ای‌که به۱۲ قسمت شده است، انجام می‌گیرد. در همهٔ این‌قسمتها، روی تخته،گودی به وجود آمده است و در هرگودی، ۴ گلوله گذاشته شده است (شکل را ببینید). بچه‌های افریقایی، اغلب زمین را در ۱۲ نقطه‌گود می‌کنند و چاله‌هایی به‌وجود می‌آورند وبه‌جای‌گلوله هم، از۴۸ قطعه سنگ‌کوچك استفاده می‌کنند.

بازی دونفره‌است. یکی‌ازآنها (که اورا P می‌نامیم) دربرابرضلع AF ودیگری (که اورا p می‌نامیم) دربرابرضلع af می‌نشیند.

حرکت بازی عبارتست از اینکه یکی ازدونفر، تمام‌گلوله‌ها را از



مربوط به‌مسألهٔ ۲۹۱. وضع اولیه درٔبازی اُ اوآ

یکی ازچاله‌های طرف خود برمی‌دارد ودرهریك از چاله‌های بعدی، یکی ازآنهارا قرارمی‌دهد. ردیف چاله‌ها چنین است:

ABCDEFabcdef

یعنی، حرکت درجهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت ، انجام می‌گیرد . مثلاً، P می‌تواند حرکت اول خودرا با جابه‌جاکردن‌گلوله‌های چالهٔD، شروع کند، دراین‌صورت اوباید درهریك ازچهارچالهٔ a،F،E و b، یکی ازگلوله‌ها را قراردهد. p می‌تواند جواب خود را به‌این‌صورت بدهدکه، برای‌آزادکردن چالهٔ a (که حالاوبعدازحرکت P ، دارای۵گلوله‌است)، گلوله‌های‌آنرا درچاله‌های e،d،c،b و f قراردهد. درنتیجهٔاین‌دوحرکت، این وضع پیدا می‌شود:

f e d c b a

۵ ۵ ۵ ۵ ۶ ۰

۴ ۴ ۴ ۰ ۵ ۵

A B C D E F

مربوط به‌مسأ لهٔ۲۹۱

اگر دریك حرکت، ۱۲گلوله یا بیشتر از آن ، از چاله‌ای برداشته شود، بعداز دورزدن (که درهرچاله. گلوله‌ای گذاشته می‌شود). وقتی‌که

به همان چالهٔ اول رسیدیم، باید از آن عبورکرد ، یعنی همچنان خالی باقی‌بماند.

اگرضمن قراردادن‌گلوله‌ها در چاله‌های بعدی ، آخرین‌گلوله در آخرین چالهٔ رقیب قرارگیرد (f دریك طرف و F درطرف دیگر)،وضمناً تعدادگلوله‌های این چالهٔ‌آخر، مساوی ۲یا۳ شود، می‌توان‌گلوله‌های این چاله را، به‌عنوان «غنیمت» برداشت. اگر درچاله یا چاله‌های قبل ازآن دررديف رقیب،بازهم ۲یا۳گلوله وجود داشته باشد،آنهاراهم برای خود برمی‌دارد، ولی این‌عمل درجایی‌که دیگر۲یا۳گلوله وجودندارد، متوقف می‌شود.

این‌قاعدهٔ اخیررا باچند مثال روشن می‌کنیم:

مثال ۱. دروضع

f	e	d	c	b	a
۲	۱	۲	۳	۱	۲
۰	۰	۰	۰	۰	۶
A	B	C	D	E	F

(۱)

بازیکن P ، حرکت را ازچالهٔ F شروع می‌کند (حرکت دیگری برای او وجود ندارد) ووضع را به‌این‌صورت درمی‌آورد:

f	e	d	c	b	a
۳	۲	۳	۴	۲	۳
۰	۰	۰	۰	۰	۰
A	B	C	D	E	F

(۲)

P ،آخرین‌گلولهٔ خودرا در f گذاشته است. چالهٔf درطرف مقابل است و حالا ۳گلوله دارد. بازیکن P ،گلوله‌های f را به«غنیمت» می‌برد . او ۳ گلوله ازf و سپس به‌ترتیب ۲ و۳گلوله از چاله‌های e و d، برای خود

برمی‌دارد. درچاله‌های b و a هم به‌ترتیب ۲ و۳گلوله وجود دارد، ولی بازیکن P نباید این گلوله‌ها را بردارد ، زیرا قبل ازآنها و در فاصلهٔ چاله‌های d و b، چالهٔ c وجود دارد که در آن ۲ یا ۳ گلوله نیست . به‌این‌ترتیب، حرکت P باعث می‌شودکه ۸گلوله بدست‌آورد.

ضمناً، اگردراینحالتی‌که وضع (۲) به‌وجودآورده است، بازیکن p بخواهد بازی را ادامه دهد، نباید از چالهٔ a یا b شروع کند ، زیرا دراین‌صورت P در طرف خود هیچ‌گلوله‌ای نخواهد داشت و بازی تمام می‌شود.

مثال ۲ . دروضع

f	e	d	c	b	a
۰	۱	۲	۰	۱	۲
۱	۰	۰	۰	۷	۷
A	B	C	D	E	F

اگربازیکن P ازچالهٔ F شروع کند، چیزی نخواهدبرد، زیراآخرین‌گلوله را باید درطرف خود قراردهد. اگر از E هم شروع‌کند، باز چیزی نمی‌برد، زیرا اگرچه‌آخرین‌گلوله را درچالهٔ f می‌گذارد، ولی دراین چاله، بعدازحرکت، دویاسه‌گلوله جمع نمی‌شود.

مثال ۳ . چالهٔ خالی همیشه بی‌خطری را تأمین نمی‌کند. دروضع

f	e	d	c	b	a
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۰	۰	۰	۱۷
A	B	C	D	E	F

همهٔ چاله‌ها در طرف p خالی است، با وجود این، P می‌تواند ۱۲گلوله

بدست آورد. او از چالهٔ F شروع می‌کند و وضع را به این صورت درمی‌آورد:

f e d c b a

۲ ۲ ۲ ۲ ۲ ۲

۲ ۱ ۱ ۱ ۱ ۰

A B C D E F

آخرین گلوله، در f قرار می‌گیرد وبازیکن P، تمام ۱۲ گلوله را از چاله‌های طرف p برمی‌دارد.

بازی تنها دریکی ازاین دوحالت تمام می‌شود:

۱) وقتی که بازیکنها به‌توافق برسند که گلوله‌های باقیمانده، برای درست کردن وضعی که برای یك‌طرف «غنیمت» بیاورد، کافی نیست؛

۲) وقتی که بازیکنی که نوبت حرکت با اوست، اصلاً گلوله‌ای درطرف خود نداشته باشد.

کسی بازی را برده است که درپایان آن، بیش‌ازدیگری گلوله جمع کرده باشد[1]. در این بازی باید، شبیه بازی شطرنج، تا چند حرکت را از قبل پیش‌بینی کرد. تا امروز کسی در بارهٔ نظریهٔ بازی اُاوآ، بررسی نتیجه‌بخشی نکرده است.

---

۱) وقتی که بازی بنابرعلت اول تمام شده باشد، گلوله‌هایی که در چاله‌ها باقی مانده است، به‌حساب هیچ‌طرفی نمی‌آید. ولی وقتی که بازی بنابرعلت دوم تمام شده باشد، تکلیف گلوله‌های باقیمانده بستگی به توافق قبلی دارد: می‌توان آنهارا به حساب نیاورد، یا می‌توان قرارگذاشت که این گلوله‌ها متعلق به‌کسی باشدکه باعث قطع بازی نشده است، و یا برعکس به‌بازیکنی تعلق بگیردکه در نوبت خود، امکان حرکت را ازدست داده است.

۲۹۲. بازی ایتالیایی (ماته ماتیکو)

برای بازی، ازمقوا یاکاغذکلفت، ۵۲ قطعه ببرید وروی هرکدام ازآنها عددی بنویسید: روی چهارقطعهٔ اول، عدد ۱؛ روی چهارقطعهٔ دوم، عدد ۲؛ روی چهارقطعهٔ بعدی، عدد ۳ و غیره. روشن است، آخرین عددی‌که می‌نویسید، ۱۳ خواهد بود.

تعداد بازیکنها به‌دلخواه است.

هربازیکن یك مداد ویك‌قطعه‌کاغذی‌که روی‌آن ۲۵خانه (۵ × ۵) به شکل مربع وجـود دارد، برمی‌دارد. یکی از بازیکنها (راهنما)، دستهٔ کارتهای‌عدد را برمی‌دارد، آنهارا خوب به‌هم مخلوط می‌کند(بُرمی‌زند)، سپس اولین‌کارت را انتخاب می‌کند و عددی را که روی‌آن نوشته شده است، اعلام می‌کند. هرکدام ازبازیکنها، این‌عدد را دریکی از خانه‌های جدول خود می‌نویسد (وقتی‌که عددی در یکی از خانه‌های جدول نوشته شود، جابه‌جاکردن‌آن مجازنیست). سپس راهنما، عددی راکه روی‌کارت دوم نوشته شده است، اعـلام می‌کند و بازیکنها دوباره آنـرا دریکی از خانه‌های‌آزاد جدول می‌نویسند.

بازی وقتی تمام می‌شودکه هر۲۵ خانهٔ جدول ، پرشود. سپس جدول هرکدام ازبازیکنها ارزیابی و تعداد امتیازهای هـرکدام معین می‌شود. کسی برنده است‌که تعداد امتیازهایش بیشترباشد.

۱	۱	۷	۱	۷	(۸۰)
۲	۱۰	۲	۱۳	۲	(۴۰)
۵	۱۲	۱۳	۵	۷	(۱۰)
۳	۳	۳	۱۱	۳	(۱۶۰)
۴	۱۲	۴	۱۳	۱۲	(۲۰)
(۱۶۰)	(۱۵)	(۱۰)	(۱۱۰)	(۵۰)	(۲۰)

مربوط به‌مسألهٔ ۲۹۲. محاسبهٔ امتیازها

محاسبهٔ امتیازها، بنابرجدول زیر تعیین می‌شود:

وضع عددها	در یك سطر یایك ستون	دریك قطر
برای دوعدد مساوی	۱۰ امتیاز	۲۰ امتیاز
برای دو زوج عدد مساوی	۲۰ «	۳۰ «
برای سه عدد مساوی	۴۰ «	۵۰ «
برای سه‌عدد مساوی و دو عدد دیگر مساوی	۸۰ «	۹۰ «
برای چهارعدد مساوی	۱۶۰ «	۱۷۰ «
برای پنج عدد متوالی (که لازم است به ردیف قرار گرفته باشند) . . .	۵۰ «	۶۰ «
برای‌سه‌بارتکرار ۱ و دوبارتکرار۱۳ برای‌عددهای۱، ۱۳، ۱۲، ۱۱و۱۰ (که لازم نیست به‌ردیف خاصی‌باشند . .	۱۰۰ «	۱۱۰ «
برای چهارتا عدد ۱	۱۵۰ «	۱۶۰ «
	۲۰۰ «	۲۱۰ «

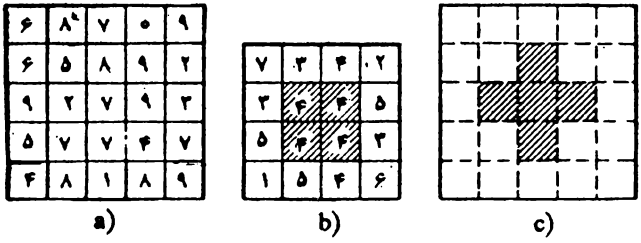
درشکل نمونه‌ای از جدول پرشده و محاسبهٔ تعداد امتیازهای‌آن، داده شده است.

۲۹۳. بازی با مربعهای وفقی

این بازی می‌تواند وسیلهٔ سرگرمی برای یکنفرباشد و یا چندنفربه‌وسیلهٔ آن باهم مسابقه بدهند.

هرنفر، صفحهٔ‌کاغذی برمی‌دارد و روی‌آن مربعی‌که از ۱۶ یا ۳۶ یا... خانهٔ مربع شکل ، تشکیل شده است ، رسم می‌کند (دربارهٔ تعداد خانه‌ها، به موقع خود بازیکنها موافقت می‌کنند). برای هردور بازی، عددهای صحیحی از قبل انتخاب می‌شود، به نحوی‌که به هرکدام آنها لااقل یکباربرای قراردادن درخانه‌های جدول (که‌ازقبل‌آماده شده‌است)،

لازم باشد تا مجموع عددهای هرسطروهرستون مربع، مقدار ثابتی باشد، یعنی یك مربع وفقی (یامربع جادویی) تشکیل شود. اگر دقیق‌تربگوییم، این‌یك مربع تقریباً وفقی‌است، زیرا درمربع وفقی واقعی، نه‌تنهامجموع عددهای هرسطر و هرستون، بلکه ضمناً مجموع عددهای هرقطر هم همان مقدار ثابت می‌شود (فصل دوازدهم را ببینید). همانطور که خواهید دید برای بازی، شرایط ساده‌ترمی‌شود وبه‌هرحال، هرکسی‌که بتواند عملهای جمع وتفریق را انجام دهد، می‌تواند به‌این‌بازی مشغول شود.



مربوط به‌مسألهٔ ۲۹۳

درجریان حل، می‌توان جای عدد را ازخانه‌ای به خانهٔ دیگربرد و یا آنرا با یکی دیگر از عددهای انتخابی، عوض‌کرد. می‌توان عددها را مستقیماً در خانه‌های جدول نوشت و یا ابتدا هرعدد را روی قطعهٔ‌کوچك کاغذی نوشت وسپس این قطعه‌هارا روی خانه‌های جدول قرارداد. تعداد عددهای انتخابی، نباید خیلی زیاد باشد. مثلاً می‌توان همهٔ عددهای یك رقمی ویا قسمتی ازآنرا انتخاب‌کرد.

وقتی‌که چند نفر باهم مسابقه می‌دهند، ممکن است دونفر برنده شوند: یکی‌کسی‌که قبل‌از دیگران، حل جدول را تمام می‌کند، و دیگری کسی‌که مجموع عددهای هرسطر یاهرستون درجدول او، بیشترازدیگران باشد.

مثال ۱ . مربع ، ۲۵ خانه‌ای است. عددهایی که از قبل داده شده است، عبارتند از ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹. برای پر کردن خانه‌های مربع، باید از هرکدام این عددها، لااقل یکبار استفاده کرد . یکی از جوابهای ممکن، در شکل a داده شده است. دراین مربع، مجموع عددهای هرسطر یا هرستون، برابر است با ۳۰.

مثال ۲ . مربع، ۱۶ خانه‌ای است. عددهای مورداستفاده، عبارتنداز: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷. شرط اضافی درمورد این جدول اینست که می‌خواهیم مجموع عددهای چهارخانهٔ مرکزی این مربع، مساوی مجموع عددها در هرسطر یاهرستون جدول باشد.

یکی ازجوابهای ممکن، درشکل b داده شده است.

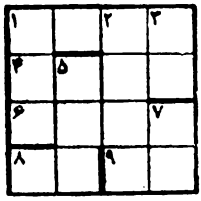
زمینه‌ای برای بازی. مربع انتخابی، ۲۵ خانه‌ای است و عددهای انتخابی عبارتند از: ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ . باید خانه‌های مربع را با این عددها (و از هرکدام لااقل یکبار) پر کرد، ضمناً این شرطهای اضافی را هم داریم:

a) مجموع عددها، درخانه‌هایی که هاشورخورده است (شکل c را ببینید)، باید مساوی مجموع عددها درهرسطر یا هرستون، باشد.

b) ازعددهای ۰ و ۶، تنها یکبار استفاده شود.

۲۹۴. جدول عددهای متقاطع

همانطورکه جدول کلمه‌های متقاطع را می‌توان به وسیلهٔ حرفهای الفبا پر کرد، می‌توان به‌جای حرف، درخانه‌های جدول، عددهای متناظری را ، که خواسته شده است، قرارداد.



مربوط به‌مسألهٔ ۲۹۴

درهرمورد ، باید اولین رقم عدد ، در اولین خانهٔ سطریاستون وآخرین رقم عدد، در

آخرین خانهٔ سطر پاستون، و یا خانهٔ قبل‌ازخط درشت (آنطورکه درشکل می‌بینید) و یـا قبل از خانهٔ هاشورخورده، قرارگیرد. در اینجا هم، مثل جدول‌کلمه‌های متقاطع، عددها به صورت افقی (از چپ به‌راست) و به صورت عمودی (ازبالا به‌پایین)، خوانده می‌شود. درهرخانهٔ جدول، تنها یك رقم می‌توان نوشت.

چند نمونه ازجدول عددهای متقاطع را دراینجا می‌آوریم:

مسألهٔ ۱. همهٔ خانه‌های مربع را (شکل را ببینید)، با عددهایی‌که درشرطهای زیرصدق‌کنند، پرکنید:

افقی

۱. تفاضل بین عددی کـه از چهار رقم متوالی تشکیل شده است، ازعددی‌که بـا همین رقمها، منتهی در ردیف عکس نوشته شده است (مقلوب عدد اول).
۴. عددی‌که ازرقمهای پشت‌سرهم‌صعودی تشکیل شده است.
۶. حاصلضرب دو عدد: یکی شمارهٔ ۳ عمودی ودیگری شمارهٔ ۸ افقی.
۸. عددی اول، یعنی‌عددی‌که تنها بر ۱ و خودش بخش‌پذیر است.
۹. مضربی ازعدد ۱۳

عمودی

۱. مکعب یکی از رقمهای عدد شمارهٔ ۱ افقی.
۲. سه رقم آخر آن، همان سه‌رقم آخر حاصلضرب دوعدد شمارهٔ ۱ افقی و شمارهٔ ۷ عمودی است.
۳. خـارج قسمت تقسیم شمارهٔ ۶ افقی برشمارهٔ ۸ افقی.
۵. ازسه‌رقم متوالی تشکیل‌شده است.
۷. حاصلضرب عاملی از عدد شمارهٔ ۳ عمودی در عـاملی از عـدد شمارهٔ ۱ افقی.

۱ ۳	۰	۲ ۸	۳ ۷
۴ ۴	۵ ۵	۶	۷
۶ ۳			۷
۸		۹	

مربوط به‌مسألهٔ ۱-۲۹۴

مثل جدول‌کلمه‌های متقاطع، در اینجا هم باید ازساده‌ترین وروشن‌ترین قسمتها شروع کرد. ازشمارهٔ ۱ افقی شروع می‌کنیم. اگرعدد چهاررقمی را $A=\overline{a(a-1)(a-2)(a-3)}$ و مقلوب‌آنرا $B=\overline{(a-3)(a-2)(a-1)a}$

بگیریم، باید A − B را محاسبه کنیم:

$$A=(a-۳)+۱۰(a-۲)+۱۰۰(a-۱)+۱۰۰۰a=۱۱۱۱a-۱۲۳,$$
$$B=a+۱۰(a-۱)+۱۰۰(a-۲)+۱۰۰۰(a-۳)=۱۱۱۱a-۳۲۱۰$$

وازآنجا بدست می‌آید:

$$A-B=(۱۱۱۱a-۱۲۳)-(۱۱۱۱a-۳۲۱۰)=۳۰۸۷$$

این عدد را درنخستین سطر مربع مفروض می‌نویسیم (شکل را ببینید).

حالا می‌توان به سادگی به پرسش شمارهٔ ۱ عمودی هم پاسخ داد. بنابرفرض، این‌عدد بایدمساوی مکعب یکی‌ازرقمهای عدد شمارهٔ ۱ افقی باشد، ضمناً این عدد باید با ۳ هم شروع شود، بنابراین، مکعب عدد ۷ ، یعنی ۳۴۳ مربوط به شمارهٔ ۱عمودی است. دیگربه‌سادگی‌عدد شمارهٔ ۴ افقی‌هم معلوم می‌شود، این‌عدد ۴۵۶۷ است. عدد شمارهٔ ۳ عمودی‌هم خودبه‌خود معلوم شده است.

۱		۲	۳	۴
۵	۶	۷		
۸				
۹			۱۰	۱۱
۱۲				

مربوط به‌مسألهٔ۲-۲۹۴

پیداکردن بقیهٔ عددهارا به‌عهدهٔ خودتان می‌گذاریم.

مسألهٔ ۲. همهٔ خانه‌های مربع (شکل‌راببینید)را باتوجه‌به‌شرطهای زیر پرکنید.

افقی

۱. عددی‌که همهٔ رقمهای‌آن باهم تفاوت دارند ، ضمناً هیچ رقم مشترکی هم باعدد شمارهٔ ۸ افقی، که به‌نوبهٔ‌خود بدون رقم تکراری است، ندارد

۵. بزرگترین عامل عدد شمارهٔ۳عمودی.

۷. مقلوب عدد شمارهٔ ۳ عمودی.

۸. شمارهٔ ۱ افقی را ببینید.

۹. یك نهم مجموع عددهای شمارهٔ ۱ و شمارهٔ ۸ افقی.

۱۲. حاصلضرب سه‌عدد اول دورقمی، که دوتا ازآنها، عواملی‌ازمقلوب عدد شمارهٔ ۶ عمودی هستند.

عمودی

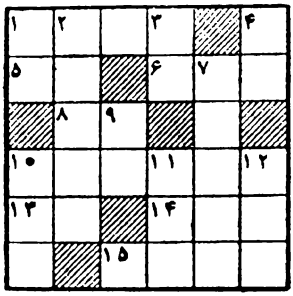
۱. رقم اول این عدد، مساوی مجموع دورقم دیگر است.
۲. سالی درنیمهٔ دوم سدهٔ هیجدهم.
۳. تفاضل دو عدد شمارهٔ ۱ و شمارهٔ ۸ افقی.
۴. رقم آخر آن ، مساوی حاصلضرب دورقم اول آنست.

مسألهٔ ۳ . همهٔ خانه‌هایی ازاین‌جدول‌راکه هاشورنخورده‌اند، با عددهایی‌که خاصیتهای آنها در زیرداده شده است، پرکنید.

افقی

۱. مجذور یك عدد اول.
۵. نصف بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك عددهای‌شمارهٔ ۱۰ وشمارهٔ ۱۱عمودی.
۶. مکعب یك‌عدد مجذورکامل.
۸. جذرعدد شمارهٔ ۱ افقی.
۱۰ مجذور یك عدد صحیح وضمناً عددی متقارن، یعنی چه‌آنرا از راست به چپ بخوانیم و چه‌ازچپ به‌راست، تفاوتی نمی‌کند.
۱۳.یك واحد از عدد شمارهٔ ۹ عمودی بزرگتر است.
۱۴.پنج‌برابرعدد شمارهٔ ۸ افقی.
۱۵.مجذورعددی‌که یك واحدازعدد شمارهٔ ۱۳ افقی بیشتر است.

۶. مقلوب عدد، مضربی است از عدد شمارهٔ ۳ عمودی و از سه‌عامل اول دورقمی تشکیل شده است.
۹. یکی‌ازعاملهای مقلوب عدد شمارهٔ۶ عمودی.
۱۰.همان عدد شمارهٔ ۵ افقی
۱۱.کوچکترین عامل‌عدد شمارهٔ۳ عمودی.



مربوط به‌مسألهٔ ۳-۲۹۴

عمودی

۱. ۸ واحدکمتر ازکوچکترین عددی‌که درتقسیم برعددهای۲، ۳، ۴، ۵ و۶، به‌ترتیب باقیمانده‌های۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را می‌دهد.
۲. مجموع رقمهای‌آن مساوی۲۹ است.
۳. عددی اول.
۴. عددی اول و یکی از مقسوم‌علیه‌های عدد شمارهٔ ۱۱عمودی
۷. چهاربرابر حاصلضرب یك‌دهم عدد شمارهٔ ۱۵ افقی در عدد شمارهٔ ۱۳ افقی.
۹. دوبرابرعدد شمارهٔ ۴ عمودی.
۱۰.مقلوب عدد شمارهٔ۱۱عمودی.
۱۱.جذرعددشمارهٔ ۱ افقی.
۱۲.مضربی از عامل بزرگتر عدد شمارهٔ ۱۳ افقی.

B. شیرینکاریها

زمینهٔ اساسی شیرینکاریهای حسابی ، مربوط به کشف عددی است که از اول فکرشده است ویا نتیجهٔ عملهایی که روی آن انجام گرفته است. همهٔ رمزکار در اینجاست که «کشف کننده» از خاصیتهای مشخصی از عددها استفاده می کند که طرف مقابل او، از آنها اطلاعی ندارد.

از نظر ریاضی، درمحتوی هرشیرینکاری یك اساس نظری وجود دارد که در بسیاری موارد بسیار ساده است، ولی گاهی به صورت ظریفی پنهان مانده است.

عملی بودن هرشیرینکاری را می توان درهرموردی آزمایش کرد، ولی برای اساس نظری آن بهتر است که ازجبر کمك گرفت. شما می توانید از «اثبات» آنها صرفنظر کنید وتنها به محتوی آنها برای نمایش دربرابر دوستانتان توجه کنید، ولی به هرحال اثبات آنها هم دشوارنیست و تنها لازم است که به مقدمات جبر آشنایی داشته باشیم.

در اینجا، تنها از استخوان بندی اساسی شیرینکاریها گفتگو می‌کنیم، زیرا تنظیم عملی آنها، بسته به شرایط وموقعیتها، وحتی بسته به ذوق واندیشهٔ ما، می تواند باروشهای گوناگونی انجام شود[1].

۲۹۵. کشف عدد (۷ شیرینکاری)

۱. عددی فکر کنید . یك واحد از آن کم کنید . باقیمانده را دوبرابر کنید وآنرا به عدد اصلی اضافه کنید. حاصل را به من بگویید، من بلافاصله عدد اصلی را به شما می گویم.

«وش کشف عدد. به نتیجه، عدد ۲ را اضافه کنید و مجموع را به ۳

---

۱) بسیاری از شیرینکاریهای ریاضی، ویازمینه‌هایی برای آنها را، شمادرفصلهای دیگراین کتاب هم پیدا می کنید. همچنین می توان، شیرینکاریهای متعددی براساس دستگاههای عددشماری غیردهدهی درست کرد.

تقسیم کنید. خارج قسمت، همان عدد اصلی است.

مثال. عدد اصلی ۱۸؛ ۱۷ = ۱ — ۱۸؛ ۳۴ = ۲ × ۱۷؛

۳۴ + ۱۸ = ۵۲.

کشف می‌کنیم: ۵۴ = ۲ + ۵۲؛ ۱۸ = ۳ : ۵۴.

اثبات. عداد اصلی را x می‌گیریم. عملهای لازم را انجام می‌دهیم:

$$x,\ 2(x-1),\ 2(x-1)+x,\ x-1$$

وبنابراین نتیجهٔ عملها به‌صورت ۲ — ۳x درمی‌آید. اگر ۲ واحد به‌این نتیجه اضافه کنیم، حاصل مساوی ۳x می‌شود که در تقسیم بر ۳، به‌همان عدد x می‌رسیم.

۲. به‌دوستتان پیشنهاد کنید، عددی فکر کند. سپس از او بخواهید به‌نوبت و چندبار، این عدد را در عددهای مختلف و دلخواهی که شما نام می‌برید ضرب و یا تقسیم کند. بدون اینکه نتیجه عملها را به‌شما اطلاع بدهد. به‌او پیشنهاد کنید نتیجه‌ای را که بدست آورده است برهمان عددی که از اول فکر کرده است، تقسیم کند، بعد خارج قسمت اخیر را به عدد اصلی اضافه کند و حاصل را به‌شما بگوید. براساس این نتیجه شما می‌توانید بلافاصله، عداد اصلی را نام ببرید.

رمز کار خیلی ساده‌است. وقتی که دوستتان عددی را فکر می‌کند، شماهم پیش‌خود عددی (ومثلاً ۱) را فکر کنید وهمراه او ضرب وتقسیمها را انجام دهید تاآنجاکه نتیجهٔ عملها را برعدد اصلی تقسیم می‌کند. در اینجا شما و دوستتان بیك جواب می‌رسید. بنابراین اگر این عدد را از نتیجه‌ای که او اعلام می‌کند، کم کنید، عدد اصلی بدست می‌آید.

مثال. عدد اصلی: ۷؛ در ۱۲ ضرب می‌کنیم می‌شود: ۸۴؛ بر ۲ تقسیم می‌کنیم (۴۲)؛ در ۵ ضرب می‌کنیم (۲۱۰)؛ بر ۳ تقسیم می‌کنیم

(۷۰)؛ که پس‌ازتقسیم برعدد اصلی، جمع خارج قسمت با عدد اصلی به نتیجه‌ای مساوی ۱۷ می‌رسیم.

شما هم همراه دوستتان، عدد ۱ را «پیش‌خود» درنظر می‌گیرید و به‌ترتیب عملهارا انجام می‌دهید: در۱۲ضرب می‌کنید (۱۲)؛ بر۲تقسیم می‌کنید (۶)؛ در۵ضرب می‌کنید (۳۰)؛ بر۳تقسیم می‌کنید(۱۰)؛ تفاوت این‌عدد با۱۷ مساوی همان عدد اصلی است(۷).

یادآوری۱. برای اینکه اثربیشتری داشته باشد،می‌توانید به‌دوستتان پیشنهادکنیدکه خود اوبه‌دلخواه عددهایی را انتخاب‌کند وضرب ویاتقسیمها را انجام دهد، تنها هرعددی راکه انتخاب می‌کند نام ببردکه شماهم‌بتوانید پیش‌خود، عملهارا انجام دهید.

یادآوری۲. لازم نیست، ضرب وتقسیمها را به‌نوبت انجام دهید، بلکه می‌توان ابتدا چندضرب، وسپس چند تقسیم را نام برد یا برعکس.

این شیرینکاری را ثابت‌کنید ، یعنی در حالت‌کلی ثابت کنیدکه این نتیجه‌گیری برای هرعددی درست است.

۳. قسمت بزرگتر یك عدد فرد را، به‌قسمتی ازآن می‌گوییم‌که یك واحد ازقسمت دیگربزرگترباشد. مثلاً، قسمت بزرگترعدد۱۳ مساوی ۷ وقسمت بزرگترعدد۲۱مساوی۱۰می‌شود.

عددی فکرکنید . اگر این عدد زوج است، نصف‌آنرا، و اگر فرد است قسمت بزرگترآنرا، به‌آن اضافه‌کنید . به‌این‌حاصلجمع هم، نصف آنرا، و یا اگر فرد است، قسمت بزرگترآنرا اضافه‌کنید . نتیجه را به۹ تقسیم‌کنید و خارج قسمت را اعلام نمایید ، و اگر این تقسیم باقیمانده دارد بگوییدکه این باقیمانده مساوی ۵ است یا بزرگتر ازآن یاکوچکتر ازآن، بسته به‌اینکه نتیجهٔ حاصل‌چگونه باشد، عدد اصلی برابراست با:

چهاربرابر خارج قسمت
- اگرتقسیم، باقیمانده ندارد،
- +۱، اگرباقیمانده کوچکتراز ۵ است،
- +۲، اگرباقیمانده مساوی ۵ است،
- +۳، اگرباقیمانده بزرگترازه۵ است.

مثال. عدد اصلی: ۱۵. باانجام عملهای لازم بدست می‌آید:

$$۱۵+۸=۲۳،\ ۲۳+۱۲=۳۵؛\ ۳۵=۳\times۹+۸$$

نتیجه چنین اطلاع داده می‌شود: خارج قسمت مساوی ۳ و باقیمانده بزرگتر از۵ است. بنابراین‌جواب مساوی $۳\times۴+۳$، یعنی۱۵می‌شود.

ایـن شیرینکاری را هم ثابت‌کنید. برای اینکه طرح اثبات را بریزید، به خاطر داشته باشید که هرعدد صحیح (و منجمله عددی راکه دوستتان فکر می‌کند)، می‌توان به‌یکی ازچهارصورت زیرنوشت:

$$۴n،\ ۴n+۱،\ ۴n+۲،\ ۴n+۳$$

که درآنها، n می‌تواند مساوی صفر یاهرعدد صحیح ومثبتی باشد.

۴. عملهای اولیه،همان عملهای‌مسألهٔ قبل‌است. عددی فکرکنید، سپس نصف‌آن، ویا اگرفرد است قسمت بزرگترآنرا، به‌آن اضافه‌کنید، بعد دوباره نصف‌مجموع،یاقسمت بزرگترآن‌را (اگرفرد است)به‌مجموع اضافه‌کنید. ولی‌حالابه‌جای‌تقسیم بر۹، پیشنهاد می‌کنیم‌که همهٔ رقمهای نتیجه را، به‌جزیکی، به ردیف نام ببرید؛ فقط این رقمی راکه نام نمی‌برید، صفرنباشد. علاوه‌براین باید بگویید، درعملهایی‌که انجام داده‌اید، درکدام‌حالت (بار اول یا باردوم یا هردوبار یاهیچکدام)، قسمت بزرگتر را به‌آن اضافه کرده‌اید. در این‌صورت، برای اینکه بدانیم عـدد اصلی چه‌بوده است، باید رقمهایی راکه نام برده‌اید باهم جمع‌کرد وبه‌آن یکی ازاین عددها را اضافه‌کرد:

عدد صفررا، به‌شرطی‌که درهیچ حالتی، قسمت بزرگتر را به عدد اضافه نکرده باشیم،

عدد ۶ را، به‌شرطی‌که تنها بار اول، قسمت بزرگتررا اضافه‌کرده باشیم،

عدد ۴ را، به‌شرطی‌که تنها باردوم، قسمت بزرگتررا اضافه‌کرده باشیم.

عدد۱را، به‌شرطی‌که هردوبار،قسمت بزرگتررا اضافه‌کرده‌باشیم.

سپس، درهرکدام ازاین‌حالتها، باید فاصلهٔ مجموعی راکه بدست می‌آید تانزدیکترین مضرب ۹، محاسبه‌کرد. عددی‌که پیدا می‌شود، همان رقمی است‌که نام نبرده‌اید. وقتی که تمام عدد،که نتیجهٔ عملهای اولیه است، برای شما معلوم باشد، به‌سادگی‌می‌توانید عدد اصلی را پیداکنید. برای این منظور باید نتیجه را بر۹ تقسیم‌کرد، خارج قسمت را ۴ برابر کرد وبسته به‌اینکه چه‌باقیمانده‌ای داشته باشیم، به‌حاصلضرب، یکی از عددهای ۱،۲ یا ۳ را اضافه‌کرد.

مثال۱. عدد اصلی: ۲۸. بعد ازآنکه عملهای لازم را انجام دهیم به۶۳ می‌رسیم . رقم ۳ راکنار می‌گذاریم. فاصلهٔ رقمی‌که نام می‌بریم، یعنی۶، تا ۹ مساوی۳ است. بنابراین‌کشف می‌کنیم‌که عدد نتیجهٔ عملها مساوی ۶۳ می‌باشد وعدد اصلی‌چنین می‌شود:

$$(۶۳:۹)\times ۴=۲۸$$

مثال ۲ . عدد اصلی: ۱۲۵. بعداز انجام همهٔ عملهای لازم بدست می‌آید: ۲۸۲. مثلاً رقم ۲ سدگان را حذف می‌کنیم. واعلام می‌کنیم ، رقمهای رهگان ویکان به‌ترتیب مساوی ۸ و۲ است، ضمناً تنها بار اول قسمت بزرگتربه‌عدد اضافه شده است.

عدد را کشف می‌کنیم: ۱۶=۶+۲+۸. نزدیکترین مضرب ۹

به‌این‌عدد، ۱۸ است، یعنی رقم حذف شده ۱۶ — ۱۸ یا ۲ است.

عـدد اصلی را پیدا می‌کنیم: درتقسیم ۲۸۲ بر۹، خـارج قسمت مساوی ۳۱ وباقیمانده مساوی ۳ می‌شود:

$$۳۱ \times ۴ \times ۱ = ۱۲۵$$

مثال ۳. فرض کنید، عددی را دوستتان فکرکرده است و بعد از عملهای لازم به‌عددی سه‌رقمی رسیده است، که رقم اول‌آن ۱ و رقم‌آخر آن ۷ است، ضمناً درهردوبار، قسمت بزرگتررا به‌عدد اضافه‌کرده است.

برای‌پیداکردن عدداصلی، به‌ترتیب‌عملهای زیررا انجام می‌دهیم:

$$۱ + ۷ + ۱ = ۹$$

فاصلهٔ این‌عدد تامضربی از۹، مساوی صفریا۹ است، ولی بنابرشرط قرار بود رقم حذف‌شده، مساوی صفر نباشد و بنابراین مساوی ۹ است، یعنی نتیجه عملهای دوستتان مساوی۱۹۷ است. ازتقسیم ۱۹۷ بر۹ به خارج قسمت ۲۱ وباقیماندهٔ ۸ می‌رسیم. وعدد اصلی‌چنین است:

$$۲۱ \times ۴ + ۳ = ۸۷$$

این‌شیرینکاری را هم ثابت‌کنید. این اثبات هم، به‌خصوص برای کسانی‌که شیرینکاری قبل را ثابت‌کرده‌اند، خیلی‌ساده است.

۵. عددی فکرکنید (بهتر است ازصدکوچکتر باشد، تا محاسبه‌ها مفصل نشود) و مجذورآنرا بدست‌آورید. به عددی‌که فکرکرده‌اید، عدد دلخواهی (که البته به‌مـن می‌گویید) اضافه کنید و دوباره مجذور این مجموع را بدست آورید. تفاضل ایـن‌دومجذور را پیدا کنید و نتیجه را به‌من بگویید. برای پیداکردن عدد اصلی، کافی است نصف این‌نتیجه را برعددی‌که به‌عدد اصلی اضافه‌کرده‌ایم، تقسیم‌کنیم و از خارج قسمت، نصف مقسوم‌علیه راکم‌کنیم.

مثال. عدد اصلی: ۵۳. به‌ترتیب عمل می‌کنیم: $۲۸۰۹ = ۵۳^۲$.

به‌عدد اصلی ۶ واحد اضافه می‌کنیم ونتیجه را مجذور می‌کنیم:

$$۵۳+۶=۵۹،\ ۵۹^۲=۳۴۸۱،\ ۳۴۸۱-۲۸۰۹=۶۷۲$$

واین‌همان عددی است‌که اعلام شده است. عدد اصلی راکشف می‌کنیم:

$$۶۷۲:۲=۳۳۶؛\ ۳۳۶:۶=۵۶؛\ ۶:۲=۳؛\ ۵۶-۳=۵۳$$

عدد اصلی مساوی ۵۳ بوده است.

استدلال روش‌کشف را پیداکنید.

۶. ازدوستتان بخواهید عددی از۶تا۶۰ فکرکند. این‌عدد را ابتدا بر۳، بعد بر۴ وبالاخره بر۵، تقسیم‌کند وباقیمانده‌های تقسیمهارا به‌شما اعلام‌کند. بادردست‌داشتن این باقیمانده، و بااستفاده ازیك رابطه، می‌توانید عدد اصلی را پیداکنید.

فرض‌کنید ، باقیمانده‌ها مساوی $r_۱$ ، $r_۲$ و $r_۳$ باشد. این رابطه را به‌خاطربسپارید:

$$S=۴۰r_۱+۴۵r_۲+۳۶r_۳$$

اگر $S=۰$ باشد، عدد موردنظرمساوی ۶۰ واگر $S\neq ۰$ باشد، عدد موردنظرعبارتست ازباقیماندهٔ تقسیم S بر۶۰.

مثال. عدداصلی: ۱۴. باقیمانده‌هاچنین‌اند: $r_۱=۲$، $r_۲=۲$ و $r_۳=۴$.

عدد راکشف می‌کنیم:

$$S=۴۰\times۲+۴۵\times۲+۳۶\times۴=۳۱۴$$

ازتقسیم ۲۱۴ بر۶۰، خارج قسمت مساوی ۵ وباقیمانده مساوی۱۴ می‌شود. عدد موردنظرهم مساوی۱۴ است.

رابطهٔ S را برای این شیرینکاری ثابت‌کنید.

۷. اگربه‌اساس ریاضی شیرینکاریهایی‌که تا اینجاآورده‌ایم،آشنا شده باشید، بدون‌تردید می‌توانید باتغییردادن‌آنها، قاعده‌های دیگری هم برای‌کشف عددی‌که دوستتان فکرکرده است، پیداکنید.

مثلاً دراینجا زمینهٔ دیگری بدست می‌دهیم. درمسألهٔ قبل، صحبت ازباقیمانده‌های تقسیم عدداصلی، بر ۳، ۴ و ۵ بود. می‌توان این مقسوم‌علیه‌ها را تغییرداد ومثلاً به‌جای آنها، ۳، ۵ و ۷ را درنظرگرفت ومرزعدد اصلی را هم از ۷ تا ۱۰۵ پیشنهادکرد. البته، رابطه‌ای هم که کلید حل این مسأله است، تغییر می‌کند. آیا می‌توانید رابطهٔ راهنما را دراین‌مورد پیداکنید؟

جواب. $S=70r_1+21r_2+15r_3$، که درآن r_1، r_2 و r_3 به‌ترتیب باقیمانده‌های تقسیم عدد اصلی بر ۳، ۵ و ۷ است. درحالتی‌که $S>105$ باشد، عدد اصلی برابر است بابا‌قیماندهٔ تقسیم S بر ۱۰۵؛ اگر $S<105$ باشد، عدد اصلی‌مساوی S واگر $S=0$ باشد، عدد اصلی‌مساوی ۱۰۵ است.

۲۹۶. بدون اینکه چیزی بپرسید، نتیجهٔ محاسبه راکشف‌کنید

درریاضیات، این امکان هم وجود داردکه بعدازیك رشته عملهای‌معین، به‌نتیجه‌ای‌که ازقبل معلوم است، برسیم، بدون اینکه عدد اولیه، تأثیری دراین نتیجه داشته باشد.

دراین مورد، دوشیرینکاری می‌آوریم، تا موضوع را روشن‌کند. این شیرینکاریها را می‌توان دربرابریك یا چندنفر انجام داد.

شیرینکاری ۱. فرض‌کنیددوستتان عدد دلخواهی را درنظر می‌گیرد، به‌اوپیشنهاد می‌کنیدکه‌آنرا درعدد دلخواهی‌که انتخاب می‌کنید، ضرب کند. بعد حاصلضرب‌را باعدد دلخواه‌دیگری‌که‌انتخاب کرده‌اید، جمع کند. بعدهمین‌مجموع‌را برسومین‌عدد انتخابی‌شما، که بازهم‌می‌تواندبه‌دلخواه انتخاب شود، تقسیم‌کند. دراینجا شما به‌سرعت ودرذهن خود اولین‌عدد انتخابی خودتان‌را برسومین‌آنهاتقسیم‌کنید وآنوقت به‌دوستتان‌پیشنهاد کنیدکه عدد اصلی را دراین عدد (خارج قسمت‌کامل عدد انتخابی اول برعدد انتخابی دوم) ضرب وحاصلضرب را ازخارج قسمتی‌که قبلاً پیدا

کرده بود، کم کند . شما خواهید توانست نتیجهٔ اخیر را اعلام کنید. این نتیجه برابر است با خارج قسمت دومین عدد برسومین عددی که شما انتخاب کرده‌اید.

مثال. عددی که دوستتان فکر کرده‌است: ۶. شما پیشنهاد می‌کنید که عدد خودرا در۴ضرب کند (برای‌شما، عدد۴ اولین‌عدد انتخابی‌است)، دوستتان پیش خود بدست می‌آورد: ۲۴. ازاوبخواهید به‌این‌حاصلضرب، عدد ۱۵ (عدد دوم) را اضافه‌کند؛ بدست می‌آورد: ۳۹. پیشنهادکنید، حاصلجمع را به۳ (عدد سوم) تقسیم‌کند، بدست می‌آورد: ۱۳. حالا در ذهن خود حساب می‌کنید: $۱\frac{۱}{۳}=۳:۴$. پیشنهاد می‌کنید که عدد اصلی را در $۱\frac{۱}{۳}$ ضرب‌کند: $۱\frac{۱}{۳}\times ۶=۸$، ونتیجه را ازخارج قسمت قبلی کم کند: $۸-۱۳=۵$.

در اینجا، شما عدد دومی راکه انتخاب‌کرده بودید (۱۵)، برعدد سوم انتخابی (۳)، تقسیم‌کنید و۵ را بدست‌آورید.

ثابت‌کنیدکه این‌نتیجه‌گیری تصادفی نیست ومی‌تواند یك قانون باشد.

شیرینکاری ۲. عددی بین ۱ و ۵۰ روی یك قطعه‌کاغذ بنویسید و بدون اینکه به‌دیگران نشان دهید، آنراکناری بگذارید.

هرکدام ازشرکت‌کنندگان هم عددی‌که بزرگتر از۵۰ باشد، ولی از۱۰۰تجاوزنکند، انتخاب‌کنند و بدون اینکه شما را ازآن مطلع‌کنند، هرکدام ازآنها عملهای زیررا انجام دهند:

۱) به‌عددانتخابی‌خود x — ۹۹را اضافه‌کند، که درآن x عبارتست ازعددی‌که شما روی قطعه‌کاغذ نوشته‌اید(این‌تفریق را درذهن‌خود انجام دهید وفقط تفاضل را اعلام‌کنید)،

۲) رقم سمت‌چپ را ازعددی‌که بدست می‌آورد، حذف‌کند وآنرا به‌آنچه‌که باقی می‌ماند اضافه‌کند،

۳) عددی را که بدست می‌آورد، از عددی‌که ابتدا در نظرگرفته بود، کم‌کند.

همهٔ شرکت‌کنندگان ، درآخرکار یك عدد بدست می‌آورد و آن همان عددی است‌که شما قبلاً روی قطعه‌کاغذ نوشته بودید.

مثال. عددی‌که شما روی‌کاغذ می‌نویسید: ۱۸؛ عددی‌که یکی از شرکت‌کننده‌ها در نظر می‌گیرد: ۶۴. بایـد عدد ۱۸ــ۹۹، یعنی ۸۱ را به‌عدد خود اضافه‌کند: ۱۴۵ = ۸۱ + ۶۴.

رقم ۱را ازسمت چپ برمی‌دارد وبه‌عددی‌که می‌ماند(۴۵)، اضافه می‌کند: ۴۶ = ۱ + ۴۵. این‌عدد را از عددی‌که ابتدا در نظرگرفته بود، کم می‌کند: ۱۸ = ۴۶ ــ ۶۴، همان عدد۱۸، که شما روی‌کاغذ نوشته‌اید، بدست می‌آورد.

بنیان ریاضی این نتیجه‌گیری را پیداکنید.

۲۹۷. من می‌دانم هرکس چقدر انتخاب می‌کند

یکی ازکسانی‌که در شیرینکاری شرکت دارد، از توده‌ای (چوب‌کبریت، سکه و...) تعدادی برمی‌داردکه مضربی از۴ باشد، دومی به‌همان‌مضرب از ۷ و سومی به‌همان مضرب از۱۳، انتخاب می‌کنند (یعنی تعداد اشیاء انتخابی‌آنها برنسبت۱۳:۷:۴ باشد).

حالا سومی از اشیاء خود به هرکدام از دونفر دیگر، به‌تعدادی‌که خودشان دارند ، می‌دهد. بعد دومی همین‌کار را می‌کند، یعنی با اشیاء خود، سهم اولی وسومی را دوبرابر می‌کند وبالاخره اولی، سهم دومی وسومی را دوبرابر می‌کند.

از هرشرکت‌کننده، تعدادی راکه دارد بپرسید. تعدادی راکه نام می‌برد نصف‌کنید، تعداد اولیهٔ اولی بدست می‌آید. سهم اولی را به۴ تقسیم ونتیجه را یکبار در۷ وبار دیگر در۱۳ضرب‌کنید، به‌ترتیب‌تعداد اولیه سهم دومی وسومی بدست می‌آید.

بنیان ریاضی این شیرینکاری بسیارساده است.

۲۹۸. با چندآزمایش،کشف می‌کنم

دوعدد مثبت و صحیح درنظربگیرید و مجموع‌آنها را به حاصلضربشان اضافه‌کنید و نتیجه را به‌من بگویید. همانطورکه یك ورزشکار، بعد از یکی‌دوبارآزمایش به‌نتیجهٔ نهایی می‌رسد، منهم عددهایی‌راکه شما فکر کرده‌اید، به‌سرعت خواهم‌گفت، منتهی‌ممکن است‌همان دفعهٔاول نباشد.

روش‌کارخیلی ساده است. من یك واحد به‌نتیجه‌ای‌که شما اعلام می‌کنید، اضافه می‌کنم، عددی را که بدست می‌آورم به دوعامل تجزیه می‌کنم وازهرعامل یك واحدکم می‌کنم.

مثال. شما عدد۳۴ را اعلام می‌کنید. به‌ترتیب عمل می‌کنم:

$$۳۴+۱=۳۵;\ ۳۵=۵\times۷=۳۵\times۱$$

بنابراین عددهایی‌که شما فکرکرده‌اید یا ۴ و۶ ویا۳۴ و۰ است.

اگرشما مجموع دوعدد را ازحاصلضرب‌آنهاکم‌کنید و نتیجه را به‌من اعلام کنید، برای پیداکردن دوعدد بازهم یك واحد به این تفاضل اضافه می‌کنم، نتیجه را به‌دوعامل تجزیه می‌کنم وبه‌هرکدام ازعاملها، یك واحد اضافه می‌کنم.

مثال. شما عدد ۶۴ را به‌عنوان نتیجه اعلام می‌کنید و من عمل می‌کنم:

$$۶۴+۱=۶۵;\ ۶۵=۱۳\times۵=۶۵\times۱$$

بنابراین دوعدد یا ۱۴ و۶ ویا ۶۶ و۲ هستند.

درستی این روش کشف عددها را ثابت کنید.

۲۹۹. چه‌کسی پاک‌کن را برداشته است وچه‌کسی مداد را؟

به‌دو دوست خود، که‌آنها را A وB فرض می‌کنیم، پیشنهادکنیدکه یکی ازآنها مداد ودیگری پاک‌کن را درغیاب شما بردارند، سپس بگویید:

ـ من صاحب مداد را عدد ۷ و صاحب پاک‌کن را عدد ۹ می‌نامم (عددها را می‌توان چیزدیگری انتخاب‌کرد، ولی‌حتماً باید یکی عدد اول ودیگری عدد غیراول، وبخش‌ناپذیر برعدد اول، باشد).

ـ A عدد خودرا در۲ و B عدد خودرا در۳ ضرب‌کند (یکی‌ازاین دوعدد باید مقسوم‌علیهی ازعدد غیر اول باشد ودیگر عددی‌که نسبت به عدد قبلی‌متباین باشد).

ـ دو عددی را که بدست می‌آورید باهم جمع‌کنید و مجموع را به‌من بگویید، یااینکه فقط بگوییدکه‌آیا این مجموع بر۳بخش‌پذیر است یانه (اگربه‌جای ۳، عدد دیگری‌که مقسوم‌علیه عدد غیراول است انتخاب کرده‌اید، باید صحبت از بخش‌پذیربودن برآنرا بکنید). باهمین اطلاع، من به شما خواهم گفت که چه‌کسی مداد و چه‌کسی پاک‌کن را انتخاب کرده است.

درواقع، اگرمجموع حاصل بر۳قابل‌قسمت باشد، به‌معنای‌اینست که عه‌د۳، در ۷ ضرب شده است، نه در۹. می‌دانیم چه‌کسی عدد خود را در۳ضرب‌کرده است (B) وعدد۷هم نام صاحب مداد بود. بنابراین‌نتیجه می‌گیریم که مداد نزد B است. برعکس، اگر مجموع بر۳ بخش‌پذیر نباشد، به‌معنای اینست‌که عدد۳ درعددی‌که بر۳ بخش‌پذیر است، یعنی

۹ضرب شده است. دراین‌حالت پاك‌کن نزد B است.

چگونه می‌توان این روش را برای حالت‌کلی ثابت‌کرد؟

۳۰۰.کشف سه‌عدد اصلی

به‌دوستتان پیشنهادکنید پیش‌خود سه‌عدد متوالی بنویسدکه از۶۰ بیشتر نباشد (مثلاً ۳۱،۳۲،۳۳). ضمناً عدد دیگری را که از ۱۰۰کوچکتر و مضرب ۳ باشد، با صدای بلند نام ببرد (مثلاً ۲۷). شما باید این عدد را به خاطر داشته باشید . از دوستتان بخواهید هر۴ عدد را جمع کند (۳۱+۳۲+۳۳+۲۷=۱۲۳) و این مجموع را در ۶۷ ضرب‌کند (۱۲۳×۶۷=۸۲۴۱).

حالا اگردوستتان تنها دورقم‌آخر این‌نتیجه را به‌شما بگوید،شما می‌توانید بلافاصله تمام‌نتیجه وسه‌عددی راکه دوست شما درابتدا درنظر گرفته بود، پیداکنید.

روش‌کشف. ۲۷ را بر۳ تقسیم‌کنید ، ۹ بدست می‌آید. به ۹ یك واحد اضافه‌کنید، ۱۰ بدست می‌آید،که عددکلیدی است. این عدد را از عدد دورقمی‌که دوستتان به‌عنوان دو رقم‌آخرنتیجه اعلام‌کرده است،کم کنید. (۴۱−۱۰=۳۱). به این‌ترتیب، شما کوچکترین عددی راکه او در ابتدا فکرکرده بود، پیدا می‌کنید. با دوبرابرکردن ۴۱، دورقم دیگر نتیجهٔ‌کل عملهای دوستتان بدست می‌آید (۸۲). بنیان ریاضی این‌روش برای‌کشف عددهای اصلی، یك مسألهٔ جالب است؛آنرا پیداکنید.

۳۰۱.کشف چند عدد

روش ساده‌ای وجود داردکه به‌کمك‌آن می‌توان عددهای یك رقمی راکه ازقبل درنظرگرفته شده‌است، پیداکرد. نخستین‌عددی راکه درنظرگرفته

شده است در۲ ضرب کنید، به حاصلضرب ۵ واحد اضافه‌کنید، مجموع حاصل را در۵ ضرب‌کنید، به‌حاصلضرب ۱۰واحد اضافه‌کنید، به‌حاصل، دومین‌عددی راکه درنظرگرفته شده است اضافه‌کنید، نتیجه را۱۰برابر کنید، به‌نتیجهٔ عمل، سومین عددی راکه درنظرگرفته شده است، اضافه کنید، دوباره حاصل را در۱۰ ضرب‌کنید ، سپس چهارمین عدد را به‌آن اضافه‌کنید وبازحاصل را در۱۰ ضرب‌کنید و به‌همین‌ترتیب تا وقتی‌که تمام عددهایی راکه ازقبل درنظرگرفته شده است،تمام شود، تنهاآخرین عدد راکه به‌نتیجهٔ قبل اضافه می‌کنید، دیگر در۱۰ ضرب نکنید. نتیجهٔ آخر وتعداد عددهایی‌که درنظرگرفته شده است، باید اعلام شود.

برای‌کشف عددهای اصلی، باید از مجموعی‌که اعلام شده است، این‌عدد راکم‌کرد:

۳۵، به‌شرطی‌که تعداد عددهای اصلی ۲ باشد،
۳۵۰، به‌شرطی‌که تعداد عددهای اصلی ۳ باشد،
۳۵۰۰، به‌شرطی‌که تعداد عددهای اصلی ۴ باشد.
. . . . . .

رقمهای این تفاضل، عددهایی راکه درنظرگرفته شده است،معین می‌کند.

مثال. عددهای۳،۵،۸ و۲ را درنظر می‌گیریم. عدداول را دوبرابر می‌کنیم: ۶=۲×۳ ؛ ۵ واحد به‌آن اضافه می‌کنیم ، ۱۱=۵+۶؛ در ۵ ضرب می‌کنیم : ۵۵=۵×۱۱ ؛ ۱۰ واحد اضافه می‌کنیم : ۶۵=۱۰+۵۵ ؛ عدد دوم را اضافه می‌کنیم: ۷۰=۵+۶۵ ؛ در۱۰ ضرب می‌کنیم : ۷۰۰=۱۰×۷۰ ؛ عدد سوم را اضافه می‌کنیم : ۷۰۸=۸+۷۰۰ ؛ در۱۰ ضرب می‌کنیم: ۷۰۸۰=۱۰×۷۰۸ ؛ عدد

آخررا اضافه می‌کنیم: ۷۰۸۲ = ۲ + ۷۰۸۰ . حالا، اگر ازاین‌مجموع، عدد ۳۵۰۰ را کم‌کنیم، به عدد ۳۵۸۲ می‌رسیم، که رقمهای آن همان چهارعددی است که ازابتدا درنظرگرفته بودیم.

این روش کشف عددها را ثابت کنید.

یادآوری. این شیرینکاری را می‌توان به عنوان کشف تعداد خالهایی که شرکت‌کنندگان با انداختن تاس‌بازی، بدست‌آورده‌اند، منظم کرد (دربارهٔ تاس، فصل‌ششم را ببینید). همچنین می‌توان از شرکت‌کنندگان خواست که یکی‌ازآنها انگشتری را به‌یکی از انگشتهای دست خود وروی یکی‌ازبندهای انگشت قراردهد (یا مثلاً نخی به‌این بند انگشت ببندد) وشما به‌کمك این روش، کشف کنیدکه انگشتر دقیقاً کجاست.

دراین‌حالت، باید افراد را شماره‌گذاری‌کرد، برای هرفرد هم معلوم کردکه‌کدام دست را اول وکدام را دوم به حساب می‌آوریم ، همچنین به انگشتهای هردست هم ازقبل، شماره‌ای داد. مثلا فرض کنیدکه شرکت‌کنندهٔ شمارهٔ ۴، انگشتررا دربند سوم انگشت پنجم دست دوم خودکرده باشد.

شما از شرکت‌کنندگان می‌خواهیدکه به این‌ترتیب عمل‌کنند: شمارهٔ شرکت‌کننده‌ای راکه انگشتردارد، دوبرابر کنند(۸)، ۵واحداضافه‌کنند(۱۳)، حاصل را در۵ضرب‌کنند (۶۵)، ۱۰ واحد اضافه‌کنند (۷۵)، شمارهٔ دست را اضافه‌کنند(۷۷)،در۱۰ضرب‌کنند(۷۷۰)، شمارهٔانگشت‌را اضافه‌کنند(۷۷۵)، در۱۰ضرب‌کنند(۷۷۵۰)، شمارهٔ بند انگشت را اضافه‌کنند(۷۷۵۳) ونتیجه را بگویند.

شما عدد ۳۵۰۰ را از۷۷۵۳کم می‌کنید و به‌عدد ۴۲۵۳ می‌رسیدکه رقمهای‌آن ازچپ به‌راست به‌ترتیب‌شمارهٔ شرکت‌کننده، شمارهٔ دست،شمارهٔ انگشت وشمارهٔ بند را معین می‌کند.

۳۰۲. شما چند سال دارید؟

ـ نمی‌خواهید بگویید چند سال دارید؟ بسیارخوب، پس به‌من بگوییدکه اگر از ۱۰ برابرسن شما، ۹ برابر یك عدد یك رقمی دلخواه راکم‌کنیم، چه‌عددی‌بدست می‌آید. درآن‌صورت‌من‌خواهم گفت‌که شماچندسال‌دارید.

روش کشف. رقم یکان عددی راکه بدست می‌آید بردارید وآنرا به بقیهٔ عدد اضافه کنید.

مثال. ازعدد ۱۷۰ (که ۱۰ برابر سن است)، مثلاً ۲۷ راکم می‌کنیم، عدد ۱۴۳ بدست می‌آید. دراین‌صورت سن دوست شماچنین‌خواهد بود: ۱۷=۳+۱۴.

۳۰۳. بازهم کشف سن

برای تنوع، می‌توان پیشنهادکردکه سن خودرا در۲ضرب‌کند، ۵ واحد به‌آن اضافه‌کند، مجموع را دوباره در ۵ ضرب‌کند و نتیجه را به شما بگوید. روشن است‌که آخرین رقم نتیجه، مساوی ۵ است. آنرا حذف می‌کنیم و از عددی‌که باقی می‌ماند، ۲ واحدکم می‌کنیم، سن او پیدا می‌شود.

مثال. فرض‌کنیم دوست شما ۲۱سال داشته باشد. بایداین‌عملها را انجام دهد:

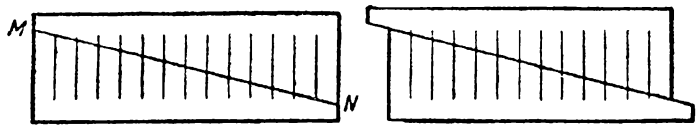
$$۲۱\times۲=۴۲\text{ ، }۴۲+۵=۴۷\text{ ، }۴۷\times۵=۲۳۵$$

وآن‌وقت شما، سن اورا بدست می‌آورید: ۲۱=۲—۲۳.

اثبات این روش را هم پیداکنید.

۳۰۴. شیرینکاری هندسی

روی یك قطعه مقوای مستطیل‌شکل، ۱۳ پاره‌خط موازی، آن‌طورکه در شکل می‌بینید، رسم‌کنید. حالا، مستطیل را روی خطی مثل MN،که



مربوط به‌مسألهٔ ۳۰۴. یکی‌ازپاره‌خطها کجا مخفی شده است.

انتهای بالای پاره‌خط سمت چپ را به‌انتهای پایین پاره‌خط سمت راست وصل کرده است، ببرید. دوقسمت مستطیل‌را روی خط بریده شده، طوری حرکت دهید تا به‌وضعی که درشکل می‌بینید، درآید.

وضع بسیارجالبی پیش می‌آید: ۱۳ پاره‌خط، تبدیل به۱۲پاره‌خط می‌شود! یکی‌ازپاره‌خطها کجا رفته است؟

بخش یازدهم

بخش‌پذیری

بین‌عملهای حساب، تقسیم‌ازهمه جالب‌تراست. تقسیم‌خاصیتهایی داردکه برای‌آن «حق» خاصی ایجاد می‌کند. مثلاً صفررا درنظربگیریم. درهمهٔ عملهای دیگرحساب، صفر«حقی» مساوی سایرعددها دارد. می‌توان آنرا در عمل جمع و تفریق واردکرد، می‌توان ازآن به عنوان عاملی از ضرب استفاده‌کرد، ولی تقسیم برصفر، ممکن نیست. در تقسیم برصفر، هیچ توضیح جبری نمی‌توان داد. این یکی‌ازخاصیتهای مهم تقسیم‌است، واگر به‌آن توجه نشود، به سادگی‌گرفتاریهایی به وجود می‌آورد: می‌توان، بدون رعایت این خاصیت تقسیم، هرحکم نادرست را «ثابت»کرد ونتیجه‌هایی متضاد باواقعیت بدست‌آورد.

مثلاً، به این‌حکم توجه‌کنید:

هرمقداری برابر است با نصف خود.

اثبات. a وb را دومقدارمساوی فرض‌کنید: $a=b$. دوطرف‌این

تساوی را در a ضرب می‌کنیم:

$$a^2=ab$$

حالا، از دوطرف تساوی، مقدار b^2 راکم می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$a^2-b^2=ab-b^2$$

دوطرف تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$$(a+b)(a-b)=b(a-b)$$

دوطرف تساوی را بر $a-b$ تقسیم می‌کنیم، به‌این‌تساوی می‌رسیم:

$$a+b=b$$

وچون بنابه‌فرض $a=b$ بود، به‌جای b دراین تساوی، مقدار a را قرار می‌دهیم، به‌تساوی $a+a=a$ یا $2a=a$ می‌رسیم، که اگردوطرف را به ۲ تقسیم‌کنیم، بدست می‌آید: $a=\frac{a}{2}$، واین به‌معنای اینست‌که هرمقدار برابر است بانصف خودش.

ظاهراً، همه‌چیزدرست است، ولی روشن است‌که اشکالی درعملها وجود دارد. شما، البته توجه کرده‌ایدکه عیب‌کار درکجاست.

«حقوق» تقسیم، تنها مربوط به‌صفر نیست. نظریهٔ ریاضی، توجه زیادی به‌عددهای صحیح، و به‌قانونی‌که برآنها حکومت می‌کند، دارد. مثلاً اگرخودرا به‌مجموعهٔ عددهای صحیح (مثبت ومنفی) محدودکنیم، بازهم، تنها عمل‌تقسیم است‌که «ناز می‌کند» وهمیشه تن به جواب نمی‌دهد. همانطورکه می‌دانید، درمیدان عددهای صحیح، نمی‌توان عمل‌تقسیم را همیشه انجام داد. وقتی‌که می‌خواهیم عدد صحیح a را برعدد صحیح b تقسیم‌کنیم، اگرعدد صحیحی مانند c پیداشودکه حاصلضرب‌آن در b مساوی a باشد، تقسیم ممکن است، ولی اگرچنین عدد صحیحی وجود نداشته باشد، a بر b بخش‌پذیر نیست.

کتابخانه مجازی ریاضیات

همین‌خاصیتهای تقسیم است که امکان به وجودآمدن مفهومهایی ازنوع بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك یاکوچکترین مضرب مشترك ونشانهٔ بخش‌پذیری‌را به‌وجودآورده است، وپیشرفت‌تدریجی‌نظریهٔ بخش‌پذیری، امکان پیشرفت و گسترش عمیق‌تر تمام نظریهٔ عددها را فراهم کرده است.

توجه اساسی‌ما دراین‌فصل براین بوده است که شما تمرین‌بیشتری دربارهٔ بحث بخش‌پذیری داشته باشید ، ولی ضمناً می‌تواندکمکی برای بررسی منظم‌ترتمام نظریهٔ عددها هم باشد.

۳۰۵. عدد روی‌آرامگاه

دانشمندان، دریکی‌ازهرمهای مصر،تخته‌سنگی کشف کردندکه روی‌آن با خط هیروگلیفی، عدد ۲۵۲۰ کنده شده بود. اظهارنظر دراین‌موردکه این عدد به‌چه‌مناسبت درآنجاآمده است،کار دشواری است. ممکن‌است‌به‌این مناسبت باشدکه بدون استثنا برهمهٔ عددهای از۱تا۱۰ قابل‌قسمت است. درواقع، عددی‌کوچکترازِ۲۵۲۰پیدا نمی‌شودکه دارای این‌خاصیت باشد. به‌سادگی می‌توان ثابت‌کردکه این‌عدد،کوچکترین‌مضرب مشترك ده عدد اولیه است.

۳۰۶. هدیهٔ سال‌نو

انجمن دانش‌آموزان، خود را برای سال نوآماده می‌کردند . شکلاتها و بیسکویتهارا درپاکتهایی‌تقسیم کردند.ولی‌وقتی‌که می‌خواستند نارگیلها را بسته‌بندی‌کنند، به‌مشکل بامزه‌ای برخوردند. ابتدا می‌خواستند درهر پاکت۱۰نارنگی بگذارند، ولی دیدندکه برای پاکت‌آخری فقط ۹نارنگی می‌ماند. تصمیم‌گرفتند درهرپاکت ۹ نارنگی بگذارند، ولی برای پاکت

آخری ۸ نارنگی‌باقی‌ماند. درهرپاکت ۸ نارنگی‌گذاشتند، به‌پاکت‌آخری ۷ نارنگی رسید، در هر پاکت ۷ نارنگی‌گذاشتند ، برای پاکت آخری ۶ نارنگی باقی‌ماند، ۶ نارنگی برای هرپاکت درنظرگرفتند، به‌پاکت‌آخری ۵ نارنگی رسید.

وضع عجیبی بود!آیا شمامی‌توانید تعداد نارنگی‌ها را پیداکنید؟ آیا تصور می‌کنیدکه اگردرهرپاکت ۵ نارنگی بگذارند برای پاکت آخر ۴ نارنگی باقی می‌ماند، و اگر درهرپاکت ۴ نارنگی بگذارند، به پاکت آخری ۳ نارنگی می‌رسد، واگر به۳تقسیم‌کنند، ۲ تا باقی‌ماند و بالاخره اگربه۲تقسیم‌کنند، یکی باقی‌می‌ماند؟

۳۰۷. آیا چنین عددی وجود دارد؟

آیا چنین عددی وجود داردکه در تقسیم بر۳ باقیمانده‌ای مساوی ۱؛ در تقسیم بر۴، باقیمانده‌ای مساوی ۲؛ درتقسیم بر۵، باقیمانده‌ای مساوی۳ وبالاخره درتقسیم بر۶، باقیمانده‌ای مساوی ۴ بدهد؟

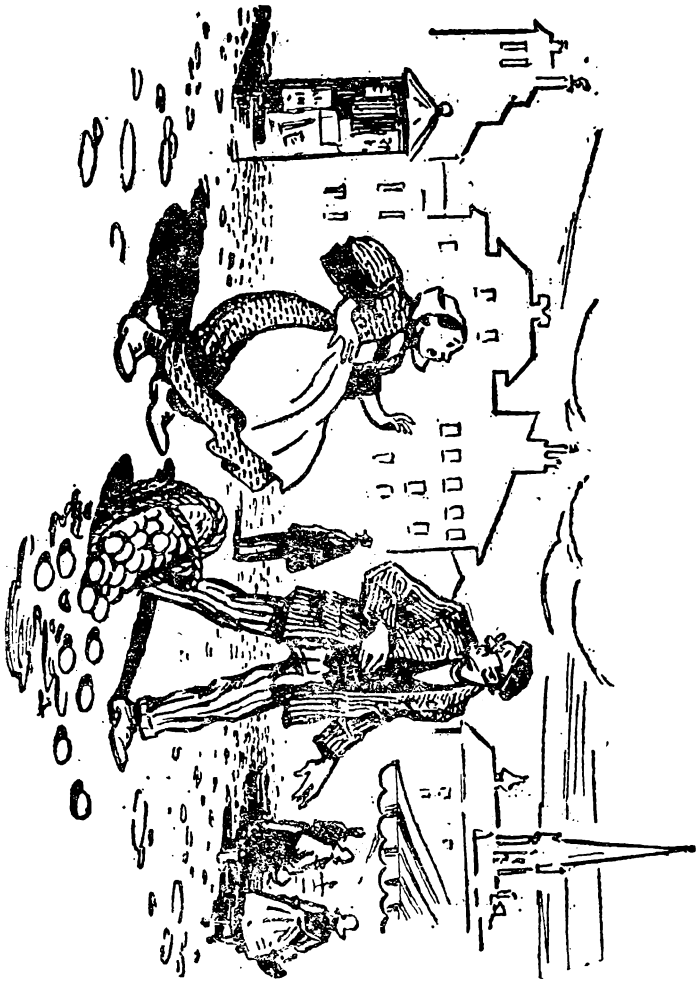
۳۰۸. سبد تخم مرغ (یك مسألهٔ قدیمی فرانسوی)

زنی، سبد تخم مرغ خودرا به بازار می‌برد. ضمن راه، یك رهگذر به زن برخورد، سبد به زمین افتاد و تخم مرغها شکست . رهگذرمتأسف شد و می‌خواست خسارت زن را جبران‌کند. پرسید:

ـ چند تخم مرغ درسبد داشتی؟

ـدرست به‌خاطرندارم، ولی‌همینقدر یادم هست‌که وقتی‌تخم‌مرغها را درگروههای۲تایی،۳تایی،۴تایی، ۵تایی ویا ۶تایی ازسبد بیرون می‌آوردم، هرباریك تخم‌مرغ درسبد باقی می‌ماند، ولی وقتی درگروههای ۷تائی جداکردم، چیزی درسبد باقی‌نماند.

چند تخم مرغ درسبد بوده است؟



مربوط بمسألهٔ ۳۰۸. چقدر خسارت وارد آمده است؟

۳۰۹. عدد سه‌رقمی

اگر از عدد سه‌رقمی که من فکر کرده‌ام ، ۷ واحد کم کنید بر ۷ بخش‌پذیر است؛ اگر ۸ واحد از آن کم کنید، بر ۸ بخش‌پذیر است و اگر ۹ واحد از آن کم کنید، بر ۹ بخش‌پذیر است. من به‌چه عددی فکر کرده‌ام؟

۳۱۰. چهار کشتی

چهار کشتی در بندر لنگر انداخته‌اند. در نیمروز دوم ژانویهٔ ۱۹۵۳، آنها باهم بندر را ترک کردند.

می‌دانیم که کشتی اول بعداز هر ۴ روز، کشتی دوم بعداز هر ۸ روز، کشتی سوم بعد از هر ۱۲ روز و کشتی چهارم بعد از هر ۱۶ روز به بندر برمی‌گردند.

در چه روزی دوباره بـرای نخستین‌بار، هر چهار کشتی در بندر خواهند بود.

۳۱۱. اشتباه صندوق‌دار

خریدار رو به صندوق‌دار کرد و گفت:

من دو بسته نمک برداشته‌ام، بسته‌ای ۹ ریال؛ ۲ قالب کره، قالبی ۲۷ ریال؛ ۳ پاکت قند و ۶ عدد پیراشکی، ولی قیمت قند و پیراشکی را نمی‌دانم.

صندوق‌دار حساب کرد و گفت روی‌هم ۲۸۴ ریـال می‌شود . ولی خریدار به‌او گفت:

ـ شما بدون تردید اشتباه کرده‌اید، لطفاً یکبار دیگر حساب کنید.

صندوق‌دار، دوباره حساب کرد و حق‌را به‌مشتری داد و رقم دیگری جلو او گذاشت.

مشتری از کجا مطمئن بود که صندوق‌دار اشتباه کرده است؟

۳۱۲. رابطهٔ عددی

عدد t ورقم a را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$[۳(۲۳۰+t)]^۲=\overline{۴۹۲a۰۴}$$

۳۱۳. نشانهٔ بخش‌پذیری بر ۱۱

یکی از روشهای مهم حل مسأله اینست که حل مسألهٔ مفروض را منجربه حل مسألهٔ دیگری کنیم که از آن ساده‌تر باشد. مثلاً، وقتی که این حکم در برابر ماست: آیا عدد مفروض چندرقمی برعدد دیگری بخش‌پذیر است یا نه، معمولاً لازم نیست به تقسیم مستقیم بپردازیم. اغلب، حل چنین مسأله‌ای منجربه حل مسألهٔ بسیار ساده‌تر مربوط به بخش‌پذیری عدد دیگری، که با استفاده از رقمهای عدد مفروض بدست آمده است، می‌شود. از همین جاست که نشانه‌هایی برای بخش‌پذیر بودن عددها، پیدا شده است.

مثلاً، آیا شما از نشانهٔ سادهٔ بخش‌پذیری برعدد ۱۱، اطلاع دارید؟

اگر مجموع یك درمیان رقمهای یك عدد با مجموع یك درمیان سایر رقمهای این عدد برابر باشد، یا تفاضل این دومجموع، بخش‌پذیر بر ۱۱ باشد، خود عدد هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است. ولی اگر این دومجموع باهم برابر نباشند وتفاضل آنها هم بر ۱۱ بخش‌پذیر نباشد، عدد مفروض بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست.

مثال. آیا عدد ۳۵۲۸۰۴۱ بر ۱۱ بخش‌پذیر است؟

مجموع رقمها را یك‌درمیان محاسبه می‌کنیم:

$$S_۱=۳+۲+۰+۱=۶،$$

$$S_۲=۵+۸+۴=۱۷،$$

$$S_۲-S_۱=۱۱$$

$S_۲-S_۱$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، بنابراین عدد ۳۵۲۸۰۴۱ هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است. حال، اگر از تقسیم مستقیم استفاده کنید، متوجه می‌شوید که این روش، شمارا فریب نداده است.

اگر به‌این‌نکته توجه کنیم که عددهای به‌صورت

$$۱۰+۱,$$
$$۱۰۰-۱,$$
$$۱۰۰۰+۱,$$
$$۱۰۰۰۰-۱,$$
$$۱۰۰۰۰۰+۱,$$
$$\cdots\cdots$$

بر ۱۱ بخش‌پذیرند، پیداکردن دلیل نشانه‌ای که برای بخش‌پذیری بر ۱۱ ذکر کردیم، روشن می‌شود.

ابتدا تفاضلهارا درنظر می‌گیریم

$$۱۰۰-۱=۹۹$$
$$۱۰۰۰۰-۱=۹۹۹۹$$
$$۱۰۰۰۰۰۰-۱=۹۹۹۹۹۹$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

می‌بینیم که همهٔ این تفاضلها شامل تعداد زوجی رقمهای ۹ هستند و بنابراین واضح است که بر ۱۱ بخش‌پذیرند. همهٔ مجموعهای به‌صورت

$$۱۰+۱=۱۱$$
$$۱۰۰۰+۱=۹۹\times۱۰+۱۱$$
$$۱۰۰۰۰۰+۱=۹۹۹۹\times۱۰+۱۱$$

هم بر ۱۱ بخش‌پذیرند، زیرا هرکدام ازآنها ازدوجمله تشکیل‌شده است و هرکدام ازاین‌دوجمله هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

حالا به‌نشانهٔ بخش‌پذیری بر ۱۱ برمی‌گردیم. عدد چندرقمی، مثل ۳۵۱۶۲۸۲ را درنظر می‌گیریم وآنرا به‌این‌ترتیب تبدیل می‌کنیم:

$$۲+۸\times۱۰+۲\times۱۰۰+۶\times۱۰۰۰+۱\times۱۰۰۰۰+۵\times$$
$$\times۱۰۰۰۰۰+۳\times۱۰۰۰۰۰۰$$

همهٔ عاملهای دوم را (آنهاکه از۱ وچند صفرتشکیل‌شده‌اند)، باتوجه به مجموعها و تفاضلهایی که قبلاً نام بردیم ، تغییرشکل می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
۳۵۱۶۲۸۲ &= ۲+۸(۱۰+۱-۱)+۲(۱۰۰-۱+۱)+\\
&\quad +۶(۱۰۰۰+۱-۱)+۱(۱۰۰۰۰-۱+۱)+\\
&\quad +۵(۱۰۰۰۰۰+۱-۱)+۳(۱۰۰۰۰۰۰-۱+۱)=\\
&= ۲+۸(۱۰+۱)-۸+۲(۱۰۰-۱)+۲+\\
&\quad +۶(۱۰۰۰+۱)-۶+(۱۰۰۰۰-۱)+۱+\\
&\quad +۵(۱۰۰۰۰۰+۱)-۵+۳(۱۰۰۰۰۰۰-۱)+۳=\\
&= (۲-۸+۲-۶+۱-۵+۳)+\\
&\quad +[۸(۱۰+۱)+۲(۱۰۰-۱)+۶(۱۰۰۰+۱)+\\
&\quad +(۱۰۰۰۰-۱)+۵(۱۰۰۰۰۰+۱)+۳(۱۰۰۰۰۰۰-۱)]
\end{aligned}$$

همهٔ جمله‌هایی‌که در داخل‌کروشه قرارگرفته‌اند ، بر۱۱ بخش‌پذیرند ، بنابراین وقتی‌عددمفروض بر۱۱بخش‌پذیراست‌که مقدارداخل پرانتز اول بر۱۱بخش‌پذیر باشد، و اگرمقدارداخل این پرانتز بر۱۱ بخش‌پذیرنباشد، عدد مفروض هم بر۱۱بخش‌پذیرنیست. ولی در داخل پرانتز اول، تفاضل مجموعهای یك‌درمیان رقمها وجود دارد:

$$(۲+۲+۱+۳)-(۸+۶+۵)=-۱۱$$

چون این‌تفاضل، یعنی۱۱ــ، بر۱۱بخش‌پذیر است، عدد مفروض هم‌بر۱۱ بخش‌پذیر است.

به‌این‌ترتیب ، مسألهٔ بخش‌پذیری یك عدد بر۱۱، منجربه‌مسألهٔ ساده‌تری می‌شود که بنابرآن بخش‌پذیری تفاضل مجموعهای یك‌درمیان رقمهای عدد را بر۱۱،آزمایش‌کنیم.

***

حالا این مسأله را حل کنید:

چگونه می‌توان به‌سرعت رقم a و عدد x را پیدا کرد، به‌نحوی که تساوی زیر برقرار باشد:

$$[۱۱(۴۹۲+x)]^۲=\overline{۳۷a۱۰۲۰۱}$$

۳۱۴. یکی کردن نشانه‌های بخش‌پذیری بر ۷، ۱۱ و ۱۳

در جدول عددهای اول ، سه عدد ۷، ۱۱ و ۱۳ پشت سرهم قرار گرفته‌اند. حاصلضرب این سه‌عدد برابر است با:

$$۷\times۱۱\times۱۳=۱۰۰۱=۱۰۰۰+۱$$

عدد $۱۰۰۰+۱$ بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است، ضمناً اگر یك عدد سه‌رقمی در ۱۰۰۱ ضرب شود، در حاصلضرب عددی شش رقمی بدست می‌آید که از تکرار همان عدد سه‌رقمی بدست آمده است.

$\overline{abc}$ را عددی سه‌رقمی فرض کنید (a ، b و c رقمهای این عدد ند). آنرا در ۱۰۰۱ ضرب می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} \overline{abc}\times \\ ۱۰۰۱ \\ \hline \overline{abc} \\ \overline{abc} \\ \hline \overline{abcabc} \end{array}$$

بنابراین ، همهٔ عددهایی که به صورت $\overline{abcabc}$ باشند ، بر ۷ ، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیرند. در حالت خاص، عدد ۹۹۹۹۹۹، یعنی $۱۰۰۰۰۰۰-۱$ هم بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است.

با همین توضیحات می‌توان قاعده‌ای برای بخش‌پذیری یك عدد بر ۷، ۱۱ یا ۱۳ پیدا کرد. قاعده، منجر به این می‌شود که بخش‌پذیری یك عدد

چند رقمی براین‌عددها را منجر به‌آزمایش بخش‌پذیری یك عدد سه‌رقمی دیگر برآنها کنیم.

مثلاً فرض کنید که بخواهیم ببینیم کـه آیا عدد ۴۲۶۲۳۲۹۵ بر۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیراست یانه. این‌عدد را ازراست به‌چپ به‌گروههای سه‌رقمی تقسیم می‌کنیم. درگروه سمت چپ، ممکن است کمترازسه رقم باشد. حالا عدد مفروض را به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$۴۲۶۲۳۲۹۵ = ۲۹۵ + ۶۲۳ \times ۱۰۰۰ + ۴۲ \times ۱۰۰۰۰۰۰$$

یا (شبیه‌آنچه‌که درمورد بخش‌پذیری برعدد۱۱عمل کردیم):

$$۴۲۶۲۳۲۹۵ = ۲۹۵ + ۶۲۳(۱۰۰۰ + ۱ - ۱) +$$
$$+ ۴۲(۱۰۰۰۰۰۰ - ۱ + ۱) = (۲۹۵ - ۶۲۳ + ۴۲) +$$
$$+ [۶۲۳(۱۰۰۰ + ۱) + ۴۲(۱۰۰۰۰۰۰ - ۱)]$$

جمله‌های داخل کروشه بر۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیراند، بنابراین وقتی عـدد مفروض بر۷، ۱۱ یا۱۳ بخش‌پذیر است که مقدار داخل پرانتز اول براین عددها بخش‌پذیرباشد.

اگر، هرکدام ازگروههارا به‌عنوان یك عددمستقل درنظربگیریم، می‌توان قاعدهٔ زیررا برای بخش‌پذیری بر۷، ۱۱ و ۱۳ ذکرکرد:

اگر تفاضل‌مجموعهای‌گروههای سه‌رقمی یك عدد،که به‌طور یك‌درمیان انتخاب شده‌اند، بر۷، ۱۱ یا۱۳ بخش‌پذیرباشد، عدد مفروض هم بر۷، ۱۱ یا۱۳ بخش‌پذیر است.

به‌عدد۴۲۶۲۳۲۹۵ برمی‌گردیم. ببینیم تفاضل‌مجموعهای‌گروهها، به‌طور یك‌درمیان، چه می‌شود:

$$(۲۹۵ + ۴۲) - ۶۲۳ = -۲۸۶$$

عدد۲۸۶ بر۱۱ و۱۳ بخش‌پذیر است، ولی بر۷ بخش‌پذیرنیست. بنابراین، عدد ۴۲۶۲۳۲۹۵ هم بر۱۱ و۱۳ بخش‌پذیراست، ولی بر۷ بخش‌پذیرنیست.

روشن است که وقتی باعدد چهار، پنج وشش‌رقمی سروکارداریم، یعنی وقتی‌که عدد مفروض تنها از ۲ گروه تشکیل شده است (که درعمل اغلب به‌آن برخورد می‌کنیم)، بخش‌پذیری بر۷،۱۱و۱۳، تنها از روی تفاضل دوگروه بدست می‌آید. مثلاً، به سادگی معلوم می‌شود که عدد ۲۹۵۷۵ بر۷ و۱۳ بخش‌پذیراست، ولی بر۱۱ بخش‌پذیر نیست. در واقع تفاضل دوگروه عدد چنین‌می‌شود:

$$۵۷۵ - ۲۹ = ۵۴۶$$

وعدد۵۴۶ هم بر۷و۱۳ بخش‌پذیراست، ولی بر۱۱بخش‌پذیرنیست.

مسأله. قاعده‌ای راکه برای‌بخش‌پذیری یك عدد بر۷،۱۱و۱۳ ذکر کردیم،روی نمونه عددی‌که شامل۳گروه بود، شرح دادیم. استدلال همین قاعده را درمورد عددی‌که شامل۴گروه باشد، توضیح دهید.

۳۱۵. ساده‌کردن قاعدهٔ بخش‌پذیری بر۸

درمدرسه، معمولاً قاعدهٔ زیررا برای بخش‌پذیری بر۸ ذکر می‌کنند:

اگرعدد سه رقمی سمت راست عدد مفروض، بر۸ بخش‌پذیرباشد، عدد مفروض هم بر۸ بخش‌پذیراست.

به‌این‌ترتیب، مسألهٔ بخش‌پذیری بر۸، منجربه‌بخش‌پذیری یك‌عدد سه‌رقمی بر۸ می‌شود. ولی دراین‌باره چیزی نمی‌دانیم‌که چگونه می‌توان به‌سرعت فهمیدکه یك عدد سه‌رقمی بر۸ بخش‌پذیراست یانه. ازظاهریك عدد سه‌رقمی هم، بخش‌پذیربودن‌آن بر۸ معلوم نمی‌شود و بنابراین باید آنرا بر۸ تقسیم‌کرد.

نشانهٔ بخش‌پذیری بر۴، ساده‌تراست. در اینجا باید ببینیم‌که آیا عددی‌که ازدورقم‌سمت راست عددمفروض‌تشکیل‌شده‌است، بر۴بخش‌پذیر است یانه.

به‌طورطبیعی یك پرسش پیش می‌آید: آیانمی‌شود نشانهٔ بخش‌پذیری بر۸ را ساده‌کرد ؟ می‌توان ، و برای این منظور، باید نشانه‌ای برای بخش‌پذیربودن یك عدد سه‌رقمی بر۸ پیداکرد.

یك‌عدد سه‌رقمی، وقتی بر ۸ بخش‌پذیراست‌که مجموع نصف رقم یکان با عدد دو رقمی‌که ازسدگان ودهگان تشکیل شده است، بر۴ بخش‌پذیرباشد.

مثال. عدد ۵۹۲ را درنظر می‌گیریم. برای اینکه ببینیم این عدد بر۸ بخش‌پذیراست یانه، رقم یکان‌آنرا حذف می‌کنیم وعدد دورقمی‌که می‌ماند بانصف رقم یکان جمع می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$۵۹+۱=۶۰$$

عدد ۶۰ بر۴ بخش‌پذیراست، بنابراین۵۹۲ هم بر۸ بخش‌پذیراست.

این‌قاعدهٔ بخش‌پذیری یك عدد سه‌رقمی بر۸ را ثابت‌کنید وقاعدهٔ بخش‌پذیری بر۸را برای هرعدد دلخواه، به‌صورت‌ساده‌شده‌ای‌تنظیم کنید.

یادآوری۱. روشن است‌که هیچ عدد فردی بر۸ بخش‌پذیرنیست.

یادآوری۲. در اکثر موارد، وقتی‌که برای عدد سه‌رقمی، نصف یکان را باعدد دورقمی‌که ازحذف یکان بدست می‌آید جمع‌کنیم، یك عدد دورقمی بدست می‌آید. تنها در حالتی‌که عدد سه‌رقمی از ۹۸۴ تا ۹۹۸ باشد، این حاصل‌جمع سه‌رقمی می‌شود، ولی دراین‌حالت هم از۱۰۳ (۴+۹۹) تجاوز نمی‌کند.

۳۱۶. حافظهٔ شگفت‌انگیز

شما می‌توانید دربرابردوستان خود ادعاکنیدکه حتی اگرگفتگو ازعدد-های شش‌رقمی و نه‌رقمی باشدکه بر۳۷ بخش‌پذیرند، باوجودی‌که تعداد آنها خیلی زیاد است، این‌توانایی‌را داریدکه‌آنهارا نام ببرید وبشناسید.

برای‌اینکه این‌ادعای خودرا درعمل‌ثابت‌کنید، ازدوستتان‌بخواهید یك‌عدد سه‌رقمی‌بنویسد وشمابلافاصله سه‌رقم‌دیگر درکنارآن می‌نویسید،

به‌نحوی که عدد شش‌رقمی حاصل بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد.

مثلاً اگر دوست شما عدد ۴۱۲ را بنویسد، شما درسمت راست یا چپ آن، عدد ۱۴۳ را می‌نویسید، یکی از دو عدد ۴۱۲۱۴۳ یا ۱۴۳۴۱۲ بدست می‌آید که هر دوی آنها بر ۳۷ بخش‌پذیرند.

البته، اینجا گفتگو برسریك حافظهٔ فوق‌العاده نیست. شما ممکن است حافظه‌ای کاملاً عادی داشته باشید ، ولی به شرطی که از قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۳۷ آگاه باشید، می‌توانید از عهدهٔ این کار برآیید . قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۳۷ چنین است:

عدد مفروض را ازراست به‌چپ، به‌گروههای سه‌رقمی تقسیم می‌کنیم (ممکن است گروه آخرسمت چپ کامل نباشد). هرکدام ازاین گروهها را، به‌عنوان یك عدد مستقل درنظر می‌گیریم، این عددهارا جمع می‌کنیم. اگر این مجموع بر ۳۷ بخش‌پذیرباشد، عدد مفروض هم بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

مثلاً، عدد ۱۵۳۲۱۷ بر ۳۷ بخش‌پذیراست، زیرا ۲۱۷ + ۱۵۳، یعنی ۳۷۰، بر ۳۷ بخش‌پذیراست.

اثبات. N را عددی می‌گیریم که از ۲ گروه تشکیل‌شده باشد. این عدد را می‌توانیم به‌صورت

$$N=1000a+b$$

بنویسیم، که درآن a عبارتست ازگروه دوم (عدد سه‌یادویایك‌رقمی‌سمت چپ) و b عدد گروه اول (عدد سه رقمی سمت راست) . اگر N بر ۳۷ بخش‌پذیرباشد، باید داشته‌باشیم:

$$1000a+b=37k$$

(k عددی است صحیح ومثبت). ثابت می‌کنیم که دراینحالت a+b هم

بر۳۷ بخش‌پذیراست.

b را ازتساوی بالا بدست می‌آوریم ودرa+b می‌گذاریم:

$$a+b=a+(۳۷k-۱۰۰۰a)=۳۷k-۹۹۹a=۳۷(k-۲۷a)$$

وهمانطورکه می‌بینیم، a+b بر۳۷بخش‌پذیراست.

برعکس، فرض‌کنید a+b بر۳۷ بخش‌پذیر باشد، دراین‌صورت داریم:

$$a+b=۳۷k$$

b را ازاین‌تساوی‌بدست می‌آوریم ودرعبارت ۱۰۰۰a+b قرارمی‌دهیم، بدست می‌آید:

$$N=۱۰۰۰a+b=۱۰۰۰a+۳۷k-a=۹۹۹a+۳۷k=$$
$$=۳۷(۲۷a+k)$$

یعنی N بر۳۷ بخش‌پذیراست.

برای عددهایی هم‌که ازبیش از۲گروه تشکیل‌شده باشد، استدلال به‌طریق مشابه انجام می‌گیرد.

بنابراین، رمزکارشما دراینست‌که بتوانید درکنارعدد سه‌رقمی‌که دوستتان می‌نویسد، یك یا دوعدد سه‌رقمی (بسته‌به‌اینکه بخواهید عددی شش رقمی یا نه‌رقمی داشته باشید)، چنان بنویسیدکه مجموع گروههای عدد حاصل بر۳۷بخش‌پذیرباشد.

ولی همین کاررا چگونه باسرعت انجام دهید؟

خیلی‌ساده‌است. مثلاً می‌توانید عدد سه‌رقمی‌خودرا طوری‌بنویسید که درجمع باعدد سه‌رقمی دوستتان مساوی بایکی‌ازعددهای ۱۱۱، ۲۲۲، ۳۳۳،...، ۹۹۹بشود، زیرا هرعدد سه‌رقمی‌که از رقمهای مساوی‌تشکیل شده باشد، بر۳۷بخش‌پذیراست.

مثلاً اگرعدد سه‌رقمی دوستتان مساوی ۳۴۱ باشد، شمامی‌توانید

عدد۱۰۳ (که درجمع باعدد مفروض۴۴۴بشود) یا ۲۱۴را(که درجمع با عدد مفروض ۵۵۵ بشود) و... درسمت راست یاسمت چپ‌آن قراردهید. پیداکردن چنین عددهایی خیلی‌ساده است و نیازی به‌نیروی حافظهٔ زیاد ندارد.

اگر بخواهید، عدد شما نه‌رقمی بشود، دوعدد سه رقمی را طوری می‌نویسیدکه مجموع هرسه‌عدد سه‌رقمی‌مساوی عددی سه‌رقمی بارقمهای مساوی بشود.

مثلاً اگرعدد۴۱۲ دربرابرشما قراردارد، می‌توان درکنارآن مثلاً ۱۰۱ وسپس۰۴۲را قرارداد، زیرا مجموع این‌سه‌عدد مساوی۵۵۵ می‌شود وعدد ۴۱۲۱۰۱۰۴۲ بر۳۷بخش‌پذیراست.

ضمناً به‌خاطرداشته‌باشیدکه شما می‌توانید دوعدد سه‌رقمی‌خودرا، برای تنوع، دردوطرف عدد دوستتان قراردهید.

اگر عددی‌که دربرابرشما قرارمی‌دهند، خـود با رقمهای مساوی باشد، مثل ۳۳۳، شما هم می‌توانید بلافاصله عددی با سه‌رقم مساوی در کنارآن بنویسید ویا مثلاً عدد۳۷یا۷۴را ازهمان عدد دوستتان‌کم‌کنید، یا به‌آن اضافه‌کنید ودرکنارش بنویسید.

ممکن‌است دربرابرشما، یك عدد دو رقمی یا یك رقمی قراردهند، دراین‌صورت شما اول آنـرا با رقم یا رقمهای دلخواهی تکمیل‌کنید تا سه‌رقمی‌شود، بعد طبق روشی‌که می‌دانید،آنرا شش یا نه‌رقمی‌کنید.

مسأله. قاعدهٔ بخش‌پذیری بر۳۷را، برای حالتی‌که عدد ازسه‌گروه درست شده‌باشد، ثابت‌کنید.

۳۱۷. یکی‌کردن نشانهٔ بخش‌پذیری بر۳، ۷ و ۱۹

حاصلضرب سه‌عدد اول۳،۷و۱۹، برابراست‌با۳۹۹. این‌خاصیت جالب را

ثابت کنید:

اگرعدد $100a+b$ (که درآن b عددی است دو رقمی و a عددی مثبت و دلخواه)، بر۳۹۹ یا هرکدام از عاملهای‌آن بخش‌پذیرباشد، عدد $a+4b$ هم برآن عدد بخش‌پذیراست.

عکس این‌حکم را هم منظم وثابت‌کنید.

براساس این حکم وعکس‌آن، برای بخش‌پذیری بر۳،۷و۱۹، یك قاعده درست‌کنید.

۳۱۸. بخش‌پذیری دوجمله‌ایها

ابتدا به‌چند نکتهٔ مقدماتی می‌پردازیم:

۱. چند جمله‌ای به‌یك عبارت جبری به‌صورت

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

گفته می‌شود، که درآن n عددی صحیح ومثبت، ضریبهای a_0، a_1، $\ldots$، a_n عددهایی حقیقی وحرف x هم یك عدد حقیقی دلخواه است.

۲. اگرچند جمله‌ای p ، از حاصلضرب دوچند جمله‌ای m_1 و m_2 بدست‌آمده باشد: $p=m_1m_2$ ، گویند چندجمله‌ای p برچندجمله‌ای m_1 (یا m_2) بخش‌پذیراست وخارج قسمت‌تقسیم‌مساوی m_2 (یا m_1) می‌شود.

مثلاً x^2-9 بر $3x+9$ بخش‌پذیراست و خارج قسمت تقسیم، مساوی $\frac{1}{3}x-1$ می‌شود. درحقیقت:

$$(3x+9)(\tfrac{1}{3}x-1)=x^2-9$$

یادآوری می‌کنیم‌که حتی درحالتی که ضریبها در مقسوم و مقسوم‌علیه، عددهایی‌صحیح باشند، ممکن است بعضی‌ازضریبها درخارج قسمت، عددهایی‌کسری بدست‌آید.

۳. ازبخش‌پذیربودن یك چند جمله‌ای با ضریبهای صحیح بریك

چندجمله‌ای دیگر با ضریبهای صحیح، نمی‌توان این نتیجه را گرفت که مقسوم برمقسوم‌علیه ، به‌ازای هرعدد صحیحی کـه به‌جای x بگذاریم ، بخش‌پذیر است.

مثلاً، دربالا دیدیم

$$(x^۲-۹):(۳x+۹)=\frac{۱}{۳}x-۱$$

به‌ازای $x=۶$، مقسوم مساوی ۲۷ ومقسوم‌علیه هم مساوی ۲۷ می‌شود. دراینجا مقسوم برمقسوم‌علیه بخش‌پذیراست: $۲۷:۲۷=۱$. ولی به‌ازای $x=۷$، مقسوم مساوی۴۰ ومقسوم‌علیه مساوی ۳۰ می‌شود وروشن است که ۴۰ بر۳۰ بخش‌پذیرنیست.

۴. اگرضریبهای‌چندجمله‌ایهای‌مقسوم،مقسوم‌علیه وخارج‌قسمت، همه عـددهایی صحیح بـاشند، دراین‌صورت به ازای هرمقدارصحیح x ، به جزآنهاکه مقسوم‌علیه را صفر می‌کند، عدد مقسوم برعدد مقسوم‌علیه بخش‌پذیراست. مثلاً درتقسیم:

$$(۲x^۳-۳x^۲-۸x+۱۲):(x^۲-۴)=۲x-۳$$

همهٔ ضریبها، عددهایی صحیح‌اند، بنابراین‌مقدارعددی مقسوم هم‌برمقدار عددی مقسوم‌علیه،به‌ازای هرمقدارصحیحی از x ، بخش‌پذیراست، به‌جز مقادیر $x=\pm ۲$ ،که به‌ازای‌آنهامقسوم‌علیه مساوی صفرمی‌شود وتقسیم ممکن نیست. مثلاً، به‌ازای$x=۳$ داریم:

$$\text{مقدارمقسوم}=۲\times ۳^۳-۳\times ۳^۲-۸\times ۳+۱۲=۱۵$$

$$\text{مقدارمقسوم‌علیه}=۳^۲-۴=۵$$

و۱۵ هم بر۵ بخش‌پذیراست وخارج قسمت‌آن مساوی۳ می‌شود،که اگر $x=۳$ را درچندجمله‌ای خارج قسمت تقسیم قراردهیم، همین۳ بدست می‌آید.

***

برای حل بعضی مسأله‌ها، به‌خصوص برای اثبات قاعده بخش‌پذیری عددها، دانستن این مطلب مفید است که درچه حالتی دوجمله‌ای به‌صورت x^m+a^m یا x^m-a^m بر $x+a$ یا $x-a$ بخش‌پذیر است (البته برای مقادیر مثبت وصحیح m). پاسخ به‌این پرسش را درکتابهای جبر درسی داده‌اند؛ باوجود این، یادآوری آنها دراینجا بی‌فایده نیست.

عبارتهای جبری x^m+a^m و x^m-a^m، حالتهای خاصی ازچند جمله‌ای زیر است.

$$a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0 \qquad (*)$$

(دراینجا همهٔ حرفهای چندجمله‌ای را عددهایی صحیح فرض می‌کنیم). مثلاً اگرداشته باشیم:

$$m=4\,,\ a_m=1\,,$$
$$a_{m-1}=a_{m-2}=\dots=a_1=0\,,\ a_0=16$$

این حالت خاص به‌صورت x^4+16 یا x^4+2^4 درمی‌آید.

حالا، تقسیم x^4+2^4 را بر $x+2$ آزمایش می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^4+16 & x+2 \\ \hline -x^4+2x^3 & x^3-2x^2+4x-8 \\ \hline -2x^3 & \\ -2x^3-4x^2 & \\ \hline 4x^2 & \\ -4x^2+8x & \\ \hline -8x+16 & \\ -8x-16 & \\ \hline 32 & \text{(باقیمانده)} \end{array}$$

x^4+2^4 بر $x+2$ بخش‌پذیر نیست. توجه می‌کنیم که باقیماندهٔ تقسیم،

شامل x نیست و برابراست باعددی ثابت. به‌سادگی‌می‌توان ثابت‌کردکه نه‌تنها دراین‌حالت، بلکه هرجا مقسوم‌علیه عبارتی نسبت به x ، درجهٔ اول باشد، باقیمانده مساوی یک عدد می‌شود (که ممکن است این عدد مساوی صفرهم باشد).

برای اینکه، این تقسیم بدون باقیمانده باشد، باید مقسوم را به اندازهٔ باقیمانده‌کوچک‌کنیم، زیرا همیشه این حکم درست است: مقسوم منهای‌باقیمانده، برابراست‌باحاصلضرب مقسوم‌علیه درخارج‌قسمت. مثلاً

$$(x^۴+۱۶)-۳۲=(x+۲)(x^۳-۲x^۲+۴x-۸)$$

و روشن است‌که این‌تساوی جبری، باتبدیل x به‌هرعدد دلخواه، تبدیل به یک تساوی‌عددی می‌شود. درجبر، برای سهولت بیان، به‌چنین‌تساویهایی، اتحادگویند.

حالافرض می‌کنیم، عبارتی به‌صورت(*)را بردوجمله‌ای $x-a$ تقسیم وبه‌این‌تساوی رسیده باشیم:

$$A=(x-a)B+C \qquad (**)$$

که درآن، A عبارتست ازچند جمله‌ای مقسوم، B خارج قسمت و C باقیمانده.

تساوی (**)، یک اتحاد است. اثبات اتحادبودن این تساوی در حالت‌کلی، کمی مفصل است ، ولی می‌توان روی مثالهای مختلف آنرا آزمایش‌کرد.

به‌کمک اتحاد (**) می‌توان راهی پیدا کردکه بدون انجام عمل تقسیم، باقیمانده را بدست آورد. مثلاً این مسأله را درنظر می‌گیریم: ازتقسیم $x^۴+۱$ بر $x-۱$ به خارج قسمت $x^۳+x^۲+x+۱$ رسیده‌ایم، باقیماندهٔ C چقدر است؟

حل. این تساوی را تشکیل می‌دهیم:

$$x^۴+۱=(x-۱)(x^۳+x^۲+x+۱)+C$$

چون این تساوی یک اتحاد است، بنابراین می‌توان به جای x هرعدد دلخواهی قرارداد، اگر $x=۱$ فرض کنیم، بدست می‌آید: $۱+۱=۰+C$ و ازآنجا $C=۲$. هرمقدار دیگری هم که به‌جای x قرارمی‌دادیم، برای C، همین‌عدد۲ بدست می‌آمد. مثلاً $x=۲$ بگیریم، دراین‌صورت‌داریم:

$$۱۶+۱=(۲-۱)(۸+۴+۲+۱)+C$$

یا $۱۷=۱۵+C$ وازآنجا دوباره بدست می‌آید: $C=۲$.

باانجام عمل‌تقسیم هم، این‌نتیجه تأیید می‌شود و باقیماندهٔ تقسیم $C=۲$ بدست می‌آید.

آیا می‌شود بدون اینکه از خارج قسمت هم اطلاع داشته باشیم، باقیمانده را بدست آورد. مثلاً فرض کنید که بخواهیم $x^۴-۱$ را بر $x+۱$ تقسیم کنیم. چگونه می‌توان باقیمانده را بدون انجام عمل‌تقسیم بدست‌آورد؟ خارج‌قسمت را باحرف B و باقیمانده را با حرف C نشان می‌دهیم، دراین‌صورت داریم:

$$x^۴-۱=(x+۱)B+C$$

می‌دانیم که باانتخاب هرعدد دلخواه برای x، همیشه برای C یك مقدار بدست می‌آید. $x=-۱$ می‌گیریم. این‌مقدار را، به‌این‌مناسبت برای x انتخاب کردیم که به ازای آن عبارت $B(x+۱)$ مساوی صفر می‌شود و نیازی به‌محاسبهٔ مقدارخارج‌قسمت B نیست. داریم:

$$(-۱)^۴-۱=۰+C \Rightarrow C=۰$$

و این به‌معنای‌آنست‌که $x^۴-۱$ بر $x+۱$ بخش‌پذیراست. (باانجام عمل

تقسیم، آزمایش کنید.)

***

حالا می‌توان مسأله را درحالت کلی‌ترحل کرد:

با چه شرطی، دوجمله‌ای x^m+1 بر $x+1$ بخش‌پذیر است (m عددی است صحیح ومثبت)؟

حل. خارج‌قسمت را B وباقیمانده را C می‌گیریم. داریم:

$$x^m+1=(x+1)B+C$$

دراین‌اتحاد، $x=-1$ می‌گیریم: $(-1)^m+1=0+C$. روشن‌است که اگر m عددی زوج باشد $C=2$، و اگر m عددی فرد باشد $C=0$ بدست می‌آید.

بنابراین ، اگرm عددی زوج باشد ، عبارت x^m+1 بر $x+1$ بخش‌پذیر نیست،ولی‌اگر m عددی‌فردباشد، x^m+1 بر $x+1$ بخش‌پذیر است ؛ به‌این‌ترتیب ، عبارت به صورت $x^{2n+1}+1$ همیشه بر $x+1$ بخش‌پذیراست. به سادگی می‌توان فهمیدکه دراین‌تقسیم، خارج قسمت برابراست باعبارتی‌که ازتوانهای نزولی x تشکیل‌شده است و علامتهای بین‌جمله‌های‌آن یك‌درمیان مثبت ومنفی‌است. به‌رابطهٔ کلی زیرمی‌رسیم:

$$x^{2n+1}+1=(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-\dots-x+1)$$

به‌همین‌ترتیب می‌توان نتیجه‌گرفت‌که x^m-1 به‌ازای همهٔ‌مقادیر مثبت وصحیح m بر $x-1$ و به‌ازای مقادیر زوج m $(m=2n)$ بر $x+1$ بخش‌پذیراست.

برای اینکه مقدارC باقیماندهٔ تقسیم x^m+a^m بر $x+a$ را پیدا کنیم، باید اتحاد زیررا تشکیل دهیم:

$$x^m+a^m=(x+a)B+C$$

و درآن $x = -a$ قرار دهیم.

حالاخودتان چند حکم زیررا نتیجه بگیرید:

$x^{۲n}+a^{۲n}$ نه بر $x+a$ و نه بر $x-a$ بخش‌پذیر نیست؛

$x^{۲n+۱}+a^{۲n+۱}$ بر $x+a$ بخش‌پذیر است ولی بر $x-a$ بخش‌پذیر نیست؛

$x^{۲n}-a^{۲n}$ هم بر $x+a$ وهم بر $x-a$ بخش‌پذیر است؛

$x^{۲n+۱}-a^{۲n+۱}$ بر $x+a$ بخش‌پذیر نیست، ولی بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

به‌خاطرمی‌آوریم که اگر $x^m \pm a^m$ بر $x+a$ یا $x-a$ بخش‌پذیر باشد، باتبدیل x و a، به‌عددهایی صحیح، عدد مقسوم برعدد مقسوم‌علیه بخش‌پذیرخواهد بود.

مسأله. بدون محاسبهٔ عبارت $۱۱^{۱۰}-۱$، ثابت کنید، که بر ۶۰۰ بخش‌پذیراست.

۳۱۹. مطالب کهنه و نو دربارهٔ بخش‌پذیری بر ۷

عدد ۷، خیلی مورد علاقهٔ مردم بوده است و به‌همین‌مناسبت در بارهٔ آن ترانه‌ها وضرب‌المثل‌های مختلفی وجود دارد:

هفت‌بار مترکن، یکبار پاره‌کن،
هفت شهر عشق را عطار گشت،
خوشبختی درآسمان هفتم است،
هفت نفر منتظر یك نفر نمی‌مانند،...

عدد ۷، تنها در ضرب‌المثلها جای نمایانی ندارد، بلکه برای بخش‌پذیری بر ۷هم، روشهای زیادی پیدا شده‌است. شما تااینجا، دوقاعده برای بخش‌پذیری بر ۷ را می‌شناسید (ضمن یکی‌کردن این‌قاعده، باقاعدهٔ

بخش‌پذیری برعددهای دیگر). ولی قاعده‌های مستقلی هم برای بخش‌پذیری بر ۷ وجود دارد وشما می‌توانید ازهرکدام ازآنهاکه به‌نظرتان بهتر می‌رسد، استفاده کنید.

قاعدهٔ اول بخش‌پذیری بر ۷ . به‌عنوان مثال، عدد ۵۲۳۶ را درنظر می‌گیریم. این‌عدد را به‌صورت زیرمی‌نویسیم:

$$۱۰^۳\times۵+۱۰^۲\times۲+۱۰\times۳+۶$$

(دراصطلاح حساب می‌گویند که عدد را بازکرده‌ایم) و همه‌جا پایه‌های ۱۰ را به۳ تبدیل می‌کنیم[۱]:

$$۳^۳\times۵+۳^۲\times۲+۳\times۳+۶=۱۶۸$$

اگر عددی‌که بدست می‌آید بر۷ بخش‌پذیرباشد، عدد مفروض هم بر۷ بخش‌پذیر است و برعکس، اگـر این عدد بر۷ بخش‌پذیر نباشد، عدد مفروض هم بر۷ بخش‌پذیرنیست.

در اینجا، عدد ۱۶۸ بر۷ بخش‌پذیراست، بنابراین عدد ۵۲۳۶ هم بر ۷ بخش‌پذیراست.

اثبات. فـرض کنیم $a_{m-۱}$ ، $a_{m-۲}$،...، $a_۲$ ، $a_۱$ و $a_۰$ ، رقمهـای متوالی‌عدد m رقمی N باشد، دراین‌صورت داریم:

$$N=۱۰^{m-۱}a_{m-۱}+۱۰^{m-۲}a_{m-۲}+\dots+۱۰^۲a_۲+۱۰a_۱+a_۰,$$

$$P=۳^{m-۱}a_{m-۱}+۳^{m-۲}a_{m-۲}+\dots+۳^۲a_۲+۳a_۱+a_۰$$

عبارت دوم را ازعبارت اول‌کم می‌کنیم:

$$N-P=(۱۰^{m-۱}-۳^{m-۱})a_{m-۱}+(۱۰^{m-۲}-۳^{m-۲})a_{m-۲}+\dots$$
$$\dots+(۱۰^۲-۳^۲)a_۲+(۱۰-۳)a_۱$$

---

۱) در واقع مثل اینست‌که عدد را در مبنای ۳ فـرض‌کنیم، منتهی در اینجا علاوه‌بررقمهای ۰و۱و۲، که در مبنای ۳ وجود دارد، رقمهای بزرگترهم قبول شده است.

براساس آخرین قاعدهٔ $x^n \pm a^n$ بر $x \pm a$، که درصفحهٔ ۳۲۰ آوردیم، می‌توان حکم کرد که تمام دوجمله‌ایهای داخل پرانتزها بر ۳ − ۱۰؛ یعنی ۷ بخش‌پذیرند. بنابراین از تساوی به‌سادگی نتیجه می‌شود که اگر P بر ۷ بخش‌پذیر باشد، N هم بر ۷ بخش‌پذیر است و برعکس، اگر P بر ۷ بخش‌پذیر نباشد، N هم بر ۷ بخش‌پذیر نیست.

تغییر قاعدهٔ اول بخش‌پذیری بر ۷. اولین رقم سمت چپ عدد را در ۳ ضرب کنید و حاصلضرب را با رقم بعدی جمع کنید، حاصل‌جمع را در ۳ ضرب کنید و با رقم بعدی جمع کنید و غیره تا آخرین رقم. برای ساده‌شدن کار، می‌توان هرجا به‌عددی بزرگتر از ۷ برخوردکردیم، به‌اندازهٔ مضربی از ۷، از آن کم کنیم.

اگر نتیجهٔ آخر بر ۷ بخش‌پذیر باشد، عدد اصلی هم بر ۷ بخش‌پذیر است و برعکس.

مثال. می‌خواهیم ببینیم عدد ۴۸۹۱۶ بر ۷ بخش‌پذیر است یا نه. رقم سمت چپ عدد را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$۴ \times ۳ = ۱۲$$

برای محاسبهٔ بعدی می‌توان به‌جای ۱۲، از ۵ استفاده کرد. ازاین‌به‌بعد هرجا عدد a را به‌عدد b تبدیل کنیم، که به‌اندازهٔ ۷ یا مضربی از ۷، از اولی کمتر باشد، باعلامت $\equiv$ نشان می‌دهیم. مثلاً عمل اول را اینطور می‌نویسیم:

$$۴ \times ۳ = ۱۲ \equiv ۵$$

حالا رقم بعدی را به ۵ اضافه می‌کنیم:

$$۵ + ۸ = ۱۳ \equiv ۶$$

وسپس

$$۶ \times ۳ = ۱۸ \equiv ۴, \quad ۴ + ۹ = ۱۳ \equiv ۶, \quad ۶ \times ۳ = ۱۸ \equiv ۴,$$
$$۴ + ۱ = ۵, \quad ۵ \times ۳ = ۱۵ \equiv ۱, \quad ۱ + ۶ = ۷$$

نتیجهٔ آخر مساوی ۷ شده است و بنابراین عدد ۴۸۹۱۶ بر ۷ بخش‌پذیر است.

حسن این روش در اینست که می‌توان همهٔ عملها را به‌سرعت و در ذهن انجام داد.

اثبات. فرض کنید:

$$N=۱۰^{m-۱}a_{m-۱}+۱۰^{m-۲}a_{m-۲}+\dots+۱۰^{۲}a_{۲}+۱۰a_{۱}+a_{۰}$$

باانجام عملهایی که ذکر کردیم، بدست می‌آید:

$$۳a_{m-۱}+a_{m-۲},$$
$$۳^{۲}a_{m-۱}+۳a_{m-۲}+a_{m-۳},$$
$$۳^{۳}a_{m-۱}+۳^{۲}a_{m-۲}+۳a_{m-۳}+a_{m-۴},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$P=۳^{m-۱}a_{m-۱}+۳^{m-۲}a_{m-۲}+\dots+۳a_{۱}+a_{۰}$$

تفاضل $N-P$ را پیدا می‌کنیم:

$$N-P=a_{m-۱}(۱۰^{m-۱}-۳^{m-۱})+a_{m-۲}(۱۰^{m-۲}-۳^{m-۲})+\dots$$
$$\dots+a_{۱}(۱۰-۳)$$

چون m عدد صحیح و مثبتی است (m ، تعداد رقمهاست)، بنابراین همهٔ دوجمله‌ایهای داخل پرانتزها بر ۳ − ۱۰، یعنی ۷ بخش‌پذیراست و از آنجا بخش‌پذیری P بر ۷ بستگی به‌بخش‌پذیری N بر ۷ دارد و برعکس.

یادآوری. این مطلب جالب است که اگر نتیجهٔ آخر را با کم کردن مضربی از ۷، به عددی کوچکتر از ۷ تبدیل کنیم، باقیماندهٔ تقسیم عدد مفروض بر ۷ بدست می‌آید. امتحان کنید!

قاعدهٔ دوم بخش‌پذیری بر ۷. بنابراین قاعده هم باید کاملاً شبیهٔ قاعدهٔ قبل عمل کرد، تنها با این تفاوت که ضرب را به‌جای رقم سمت چپ، از رقم سمت راست شروع می‌کنیم و به‌جای ۳، در ۵ ضرب می‌کنیم.

مثال. آیا عدد ۳۷۱۸۴ بر ۷ بخش‌پذیر است؟

$$۴\times۵=۲۰\equiv۶,۶+۸=۱۴\equiv۰,۰\times۵=۰,۰+۱=۱,۱\times۵=۵,$$

ازجمع ۵ با ۷ می‌توان صرفنظر کرد؛

$$۵\times۵=۲۵\equiv۴,۴+۳=۷\equiv۰$$

عدد ۳۷۱۸۴ بر۷بخش‌پذیر است.

اثبات. فرض کنید:

$$N=۱۰^{m-۱}a_{m-۱}+۱۰^{m-۲}a_{m-۲}+\ldots+۱۰^{۲}a_{۲}+۱۰a_{۱}+a_{۰}$$

اگرطبق قاعده عمل کنیم، به‌ترتیب بدست می‌آید:

$$۵a_{۰}+a_{۱},$$
$$۵^{۲}a_{۰}+۵a_{۱}+a_{۲},$$
$$۵^{۳}a_{۰}+۵^{۲}a_{۱}+۵a_{۲}+a_{۳},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P=۵^{m-۱}a_{۰}+۵^{m-۲}a_{۱}+\ldots+۵a_{m-۲}+a_{m-۱}$$

دوطرف تساوی اخیر را در $۱۰^{m-۱}$ ضرب می‌کنیم و سپس ازآنچه‌که بدست می‌آید، N راکم می‌کنیم.

$$۱۰^{m-۱}P=۵۰^{m-۱}a_{۰}+۱۰\times۵۰^{m-۲}a_{۱}+\ldots$$
$$\ldots+۱۰^{m-۲}\times۵۰a_{m-۲}+۱۰^{m-۱}a_{m-۱},$$
$$۱۰^{m-۱}P-N=a_{۰}(۵۰^{m-۱}-۱)+۱۰a_{۱}(۵۰^{m-۲}-۱)+\ldots$$
$$\ldots+۱۰^{m-۲}a_{m-۲}(۵۰-۱)+\ldots$$

همهٔ جمله‌های داخل پرانتزها بر۱ − ۵۰، یعنی ۴۹ و در نتیجه بر۷ بخش‌پذیرند، ولی $۱۰^{m-۱}$ بر۷بخش‌پذیر نیست. بنابراین بخش‌پذیری‌عدد N بر۷ ، بستگی به‌بخش‌پذیری عدد P بر۷ دارد.

قاعدهٔ سوم بخش‌پذیری بر۷. این‌قاعده‌هم،باوجودی‌که برای محاسبهٔ ذهنی‌خیلی‌ساده نیست، خیلی‌جالب است.

اولین رقم سمت راست را دوبرابر کنید، رقم دوم ازسمت راست را ازآن‌کم کنید،نتیجه را دوبرابر کنید، رقم سوم ازسمت راست‌را به‌آن اضافه‌کنید، نتیجه را دوبرابر کنید، رقم چهارم از سمت راست را ازآن

کم کنید وغیره؛ ضمن عمل، هرجا بخواهید می‌توانید ۷ یا مضربی از ۷ را کم یا زیاد کنید. اگر نتیجهٔ آخر بر ۷ بخش‌پذیر باشد، عدد مفروض هم بر ۷ بخش‌پذیر است.

این قاعده را درمورد چند عدد آزمایش کنید و اگر مایلید خودتان آنرا ثابت کنید. البته این اثبات برای عدد درحالت کلی کمی دشوار است، ولی لااقل آنرا درمورد عددهای چهاررقمی یا پنج‌رقمی ثابت کنید.

***

اثبات این سه قضیهٔ جالب را درقسمت حل و جواب، پیدا خواهید کرد، ولی ابتدا کوشش کنید که خودتان آنهارا ثابت کنید.

قضیهٔ ۱. اگر یك عدد دورقمی بر ۷ بخش‌پذیر باشد، دراین صورت اگر رقم دهگان عدد را به مقلوب عدد اضافه کنیم، بازهم عددی بدست می‌آید که بر ۷ بخش‌پذیر است.

مثلاً ۱۴ بر ۷ بخش‌پذیر است، بنابراین ۱ + ۴۱، یعنی ۴۲ هم بر ۷ بخش‌پذیر خواهد بود.

قضیهٔ ۲. اگر یك عدد سه‌رقمی بر ۷ بخش‌پذیر باشد، اگر اختلاف سدگان از یکان عدد را از مقلوب عدد کم کنیم، بازهم عددی بخش‌پذیر بر ۷ بدست می‌آید.

مثال ۱. عدد ۱۲۶ بر ۷ بخش‌پذیر است. بنابراین عدد (۱ − ۶) − ۶۲۱، یعنی ۶۱۶ هم بر ۷ بخش‌پذیر است.

مثال ۲. عدد ۶۹۳ بر ۷ بخش‌پذیر است. بنابراین عدد (۶ − ۳) − ۳۹۶، یعنی ۳۹۹ هم بر ۷ بخش‌پذیر است.

قضیهٔ ۳. اگر در یك عدد سه‌رقمی، مجموع رقمها مساوی با ۷ باشد، این عدد تنها وقتی بر ۷ بخش‌پذیر است که رقمهای یکان و دهگان آن یکی باشد و برعکس.

۳۲۰. نشانهٔ بخش‌پذیری برعددهای دیگر

سه‌نشانه‌ای را که در بارهٔ بخش‌پذیری بر۷ آوردیم ، اساساً با نشانهٔ بخش‌پذیری بر۳ و ۹ شباهت دارد. چه‌آنجا وچه اینجا، به‌کمك عملهای سادهٔ حساب روی رقمهای عدد N ، عدد جدید P را بدست می‌آوریم که از بخش‌پذیری آن برمقسوم‌علیه مفروض ، بخش‌پذیری عدد N را برآن مقسوم‌علیه، نتیجه می‌گیریم. عدد P همیشه طوری تشکیل شده است که تفاضل $N-P$ (یاممکن‌است مجموع $N+P$). برمقسوم‌علیه مفروض بخش‌پذیرباشد. اساس روش‌کار براین‌حکم قرارگرفته است‌که a^n+b^n برای مقادیر فرد n برa+b ، و a^n-b^n برای مقادیر زوج n برa±b بخش‌پذیراست.

با به‌کاربردن همین روش ، می‌توان قاعدهٔ جالب زیر را، برای بخش‌پذیری بر۱۳، ۱۷ و۱۹، نتیجه‌گرفت.

برای اینکه ببینیم عددی بر۱۳، ۱۷یا۱۹بخش‌پذیراست، باید رقم سمت چپ عدد مفروض را در۳، ۷ یا ۹ ضرب‌کنیم، رقم بعدی را از این حاصلضرب‌کم‌کنیم، نتیجه را دوباره در۳، ۷یا۹ ضرب‌کنیم، رقم بعدی را به‌آن‌اضافه‌کنیم وبه‌همین‌ترتیب‌بعدازهرضرب، رقم بعدی را ازحاصل کم یا به‌آن اضافه‌کنیم. بعد از هرعمل، می‌توان نتیجه را به‌اندازه ۱۳، ۱۷یا۱۹، ویا مضربی ازآن‌کم یا زیادکرد.

اگرنتیجهٔ حاصل بر۱۳، ۱۷ یا ۱۹ بخش‌پذیر باشد، خود عدد هم برمقسوم‌علیه مفروض بخش‌پذیراست.

مثال ۱. آیا عدد۲۰۷۵۴۲۷ بر۱۹بخش‌پذیراست؟

قاعده را به‌کار می‌بریم:

$$۲\times۹=۱۸\equiv-۱$$

(اگرنمی‌خواهید باعدد منفی سروکارداشته باشید، می‌توانید عدد ۱۸ را

تغییر ندهید)؛

$$-۱-۰=-۱, \quad -۱\times۹=-۹, \quad -۹+۷=-۲,$$
$$-۲\times۹=-۱۸\equiv۱, \quad ۱-۵=-۴, \quad -۴\times۹=-۳۶\equiv۲,$$
$$۲+۴=۶, \quad ۶\times۹=۵۴\equiv۱۶, \quad ۱۶-۲=۱۴\equiv-۵,$$
$$-۵\times۹=-۴۵\equiv۱۲, \quad ۱۲+۷=۱۹\equiv۰$$

یعنی عدد مفروض بر ۱۹ بخش‌پذیر است.

مثال ۲. آیا عدد ۸۱۴۵۲ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

از قاعده استفاده می‌کنیم:

$$۸\times۳=۲۴\equiv-۲, \quad -۲-۱=-۳, \quad -۳\times۳=-۹,$$
$$-۹+۴=-۵, \quad -۵\times۳=-۱۵\equiv-۲, \quad -۲-۵=-۷\equiv۶,$$
$$۶\times۳=۱۸\equiv۵, \quad ۵+۲=۷$$

عدد مفروض بر ۱۳ بخش‌پذیر نیست و باقیماندهٔ تقسیم مساوی ۷ است.

اثبات این قاعده، کاملاً شبیه اثباتی است که برای قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۷ آوردیم.

۳۲۱. تعمیم قاعدهٔ بخش‌پذیری

فکر تقسیم عدد به گروهها و سپس جمع بعدی این گروهها برای تعیین بخش‌پذیری عدد مفروض، یکی از سودمندترین راههاست و منجر به پیدا کردن یك قاعده برای بخش‌پذیری عددهای چندرقمی بر تعداد زیادی از عددهای اول می‌شود. مثلاً دربارهٔ هر عدد صحیح p که عاملی از عدد $d=۱۰^n+۱$ باشد، می‌توان از روش ایجاد برش در مقسوم و تبدیل آن به گروهها، استفاده کرد (n عددی است صحیح و مثبت، ولی البته برای مقادیر بزرگ، عملاً نمی‌تواند مورد استفاده قرار گیرد).

$$n=۱ \Rightarrow d=۱۱, \quad p=۱۱;$$
$$n=۲ \Rightarrow d=۱۰۱, \quad p=۱۰۱;$$
$$n=۳ \Rightarrow d=۱۰۰۱, \quad p=۷,۱۱,۱۳;$$
$$n=۴ \Rightarrow d=۱۰۰۰۱, \quad p=۲۳,۱۳۷$$

برای تعیین بخش‌پذیری یك عدد، برهرکدام ازاین‌عددهای P باید:

۱) عدد مفروض را از راست به‌چپ، به‌گروههای n رقمی تقسیم می‌کنیم (هرعدد p متناظرباعدد n مربوط به‌خودش‌می‌باشد؛ آخرین‌گروه سمت چپ ممکن است‌کمتراز n رقم داشته‌باشد)؛

۲) با شروع از سمت راست، گروهها را یك‌درمیان باهم جمع می‌کنیم؛

۳) بقیهٔ‌گروههارا باهم جمع می‌کنیم؛

۴) ازمجموع بزرگتر، مجموع کوچکتر راکم می‌کنیم.

اگر نتیجهٔ حاصل بر p بخش‌پذیر باشد، عدد مفروض هم بر p بخش‌پذیراست وبرعکس‌اگراین‌نتیجه بر p بخش‌پذیرنباشد، عدد مفروض هم بر p بخش‌پذیرنیست.

مثلاً برای تعیین بخش‌پذیری عدد بر۱۱ (p=۱۱)، عدد را به گروههای یك‌رقمی‌تقسیم می‌کنیم(n=۱)، وعملهایی راکه ذکرکردیم، انجام می‌دهیم. واین‌همان قاعده‌ای است‌که درمسأله۳۱۳ دیده‌ایم. برای تعیین‌بخش‌پذیری‌عدد بر۷، ۱۱یا۱۳(p=۷،۱۱،۱۳)، عددرا به‌گروههای سه‌رقمی تقسیم می‌کنیم (n=۳) وبرای تعیین بخش‌پذیری عدد بر۷۳ یا ۱۳۷، آنرا به‌گروههای چهاررقمی تقسیم می‌کنیم.

مثلاً می‌خواهیم ببینیم‌که عدد پانزده‌رقمی

۸۳۱ ۵۰۴ ۱۷۲ ۳۶۲ ۸۳۷

بر۷۳ وبر۱۳۷بخش‌پذیراست یانه (p=۷۳،۱۳۷ و n=۴) .

عدد مفروض را به‌گروههای چهاررقمی (ازراست به‌چپ) تقسیم می‌کنیم:

۸۳۷ ۳۶۲۱ ۷۲۵۰ ۴۸۳۱

گروهها را یك‌درمیان باهم جمع می‌کنیم:

۷۲۵۰+	۴۸۳۱+
۸۳۷	۳۶۲۱
۸۰۸۷	۸۴۵۲

مجموع کوچکتررا ازمجموع بزرگترکم می‌کنیم:

$$۸۴۵۲ - ۸۰۸۷ = ۳۶۵$$

عدد ۳۶۵ بر۷۳ بخش‌پذیر است، ولی بر۱۳۷ بخش‌پذیرنیست؛ بنابراین عدد پانزده‌رقمی مفروض هم بر۷۳ بخش‌پذیر است و بر۱۳۷ بخش‌پذیرنیست.

***

نوع دوم ازاین قبیل، عبارتست ازهمهٔ عاملهای صحیح p ازعدد به صورت $۱۰^n - ۱$ (n عددی است صحیح و فرد). n را به‌این‌مناسبت عددی فرد می‌گیریم که به ازای مقادیر زوج n($n = ۲m$) . عبارت $۱۰^{۲m} - ۱$ می‌تواند تجزیه شود و یکی‌ازعاملهای آن همان $۱۰^m + ۱$ است‌که قبلاً دربارهٔ‌آن صحبت‌کرده‌ایم.

عدد $d = ۱۰^n - ۱$ این‌مقسوم‌علیه‌ها را می‌دهد:

$n = ۱ \Rightarrow d = ۹, \quad p = ۳;$

$n = ۳ \Rightarrow d = ۹۹۹, \quad P = ۳۷;$

$n = ۵ \Rightarrow d = ۹۹۹۹۹, \quad p = ۴۱, ۲۷۱$

برای‌تعیین‌بخش‌پذیری یك عدد برهرکدام ازاین‌عددهای p ، باید:

۱) عدد مفروض را از راست به‌چپ، به‌گروههای n رقمی تقسیم کنیم (هرعدد p متناظر با n مربوط به‌خودش‌می‌باشد؛ آخرین‌گروه سمت چپ، ممکن است‌کمتراز n رقم داشته‌باشد)؛

۲) همهٔ گروهها را جمع می‌کنیم.

اگر نتیجهٔ حاصل بر p بخش‌پذیر باشد ، عدد مفروض هم بر p بخش‌پذیراست وبرعکس.

متذکر می‌شویم که برای همهٔ مقادیر n (باشروع از $n=3$)،عددی که دارای n رقم مساوی واحد باشد، بر p مربوط به‌خودبخش‌پذیراست. مثلاً ۱۱۱ بر۳۷ و ۱۱۱۱۱ بر ۴۱ و ۲۷۱ بخش‌پذیراست.

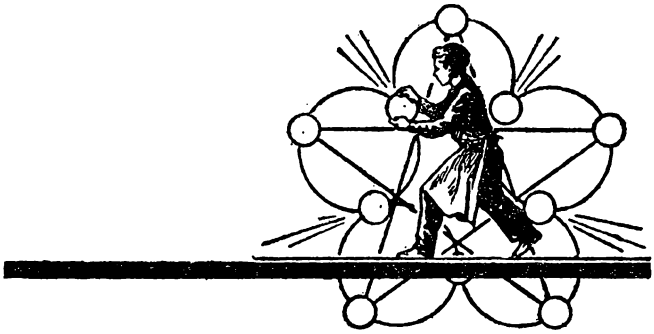
۳۲۲. بخش‌پذیری شگفت‌انگیز

به‌مناسبت پایان این بخش، چهارعدد ده رقمی زیررا می‌آوریم:

۲ ۴۳۸ ۱۹۵ ۷۶۰, ۴ ۷۵۳ ۸۶۹ ۱۲۰,

۳ ۷۸۵ ۹۴۲ ۱۶۰, ۴ ۸۷۶ ۳۹۱ ۵۲۰

که درهرکدام ازآنها، ازده رقم ۰تا۹، وهرکدام یکبار، استفاده‌شده است وهریك ازآنها برعددهای۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹،۱۰،۱۱،۱۲،۱۳،۱۴،۱۵، ۱۶،۱۷ و۱۸بخش‌پذیراست.



بخش دوازدهم

مجموعهای متقاطع ومربعهای وفقی

A. مجموعهای متقاطع

همهٔ عددهای صحیح از ۱ تا ۹ را انتخاب می‌کنیم و کوشش می‌کنیم آنهارا در دو ردیف طوری قرار دهیم که مجموع عددها در یک ردیف مساوی مجموع عددها در ردیف دیگر باشد.

آیا می‌توان این عددهارا در دو ردیف جداگانه قرارداد؟

مجموع همهٔ عددهای از ۱ تا ۹ مساوی ۴۵ است. اگر هرکدام ازاین عددها، تنها دریک ردیف باشد، درآن صورت باید مجموع عددهای هر ردیف جداگانه مساوی نصف مجموع همهٔ عددهای مفروض باشد. ولی عدد ۴۵ را نمی‌توان به دوعدد صحیح مساوی تقسیم کرد، بنابراین تنظیم همهٔ عددهای صحیح از ۱ تا ۹ در دو ردیف جداگانه، با مجموعهای مساوی، ممکن نیست. به‌این‌ترتیب، تنها راهی که برای تنظیم این ردیفها باقی می‌ماند، اینست که آنهارا در دو ردیف متقاطع قراردهیم.

مثلاً به‌این‌شکل:

```
   ۵
   ۹
۳۷۱۸۴ | ۲۳
   ۶
   ۲
  ---
  ۲۳
```

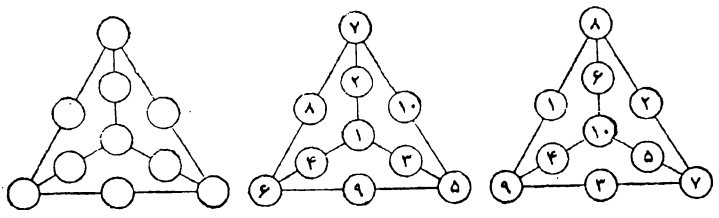
که درآن عدد۱، درهردوردیف به‌حساب‌آمده است.

گروه‌عددهای متقاطع(ودرحالت خاص،رشتهٔ عددها)بامجموعهای مساوی را مجموعهای متقاطع‌گویند. شکل‌قرارگرفتن عددها، ازقبل‌معین می‌شود، اغلب این‌عددها باید درطول خطهای یك شکل متقارن و درنقطهٔ برخورد ویاچند خط واقع شوند ومجموع‌عددها درطول یك‌خط بامجموع عددها درطول خط دیگریکی‌باشد.

ابتدا مسأله‌هایی راکه در اینجا داده شده است حل‌کنید، و سپس خودتان ازنوع‌آنها درست‌کنید. سعی‌کنید تا جایی‌که می‌توانید، عددها را به‌صورت متقارن درآورید وبه‌عنوان یك قاعده به‌خاطرداشته‌باشدکه اینگونه مسأله‌ها بیش‌ازیك جواب دارند.

۳۲۳. گروه‌بندی جالب

در۱۰ دایره‌ای‌که درطول ضلعها وشعاعهای مثلث متساوی‌الاضلاع قرار



مربوط به‌مسألهٔ ۳۲۳. دوجواب ممکن.

گرفته‌اند (شکل صفحهٔ ۳۳۲ را ببینید)، می‌توان عددهای از ۱ تا ۱۰ را طوری قرار دادکه مجموع عددهایی کـه روی محیط هریك از سه‌مثلث کوچکتر واقع شده‌اند، مساوی ۲۸باشد. جواب این‌حالت، درشکل وسط داده شده‌است. دراینجا، عدد ۱ دردایرهٔ وسط قرارگرفته است ومجموع عددهای واقع‌برمحیط هریك‌ازسه‌مثلث‌کوچکترچنین است:

$$۱+۲+۷+۸+۶+۴=۱+۴+۶+۹+۵+۳=$$
$$=۱+۳+۵+۱۰+۷+۲=۲۸$$

همین ۱۰ عدد را می‌توان در دایره‌ها طوری قراردادکه مثل شکل سمت‌راست درصفحهٔ۳۳۲،مجموع‌عددهای واقع برمحیط هریك‌ازسه‌مثلث مساوی ۳۸ شود:

$$۱۰+۶+۸+۱+۹+۴=۱۰+۴+۹+۳+۷+۵=$$
$$=۱۰+۵+۷+۲+۸+۶=۳۸$$

ولی این‌مطلب بسیارجالب است‌که می‌توان ۱۰عدد را طوری در دایره‌ها قراردادکه مجموع‌عددها درطول محیط هریك‌ازسه‌مثلث‌کوچکتر مساوی ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶یا۳۷ شود.

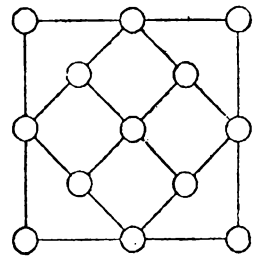
درهرکدام ازاین‌حالتها، چگونه بایده۱عدد مفروض را دردایره‌ها قرارداد؟

۳۲۴. ستاره

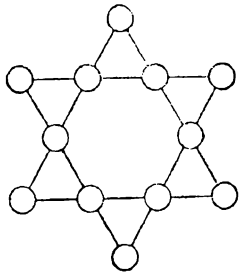
روی۱۲قطعه‌کاغذکوچك، عددهای از۱تا۱۲ را بنویسید وآنها را در۱۲ دایرهٔ ستارهٔ شش‌پر(شکل‌صفحهٔ۳۳۴را ببینید)طوری قراردهیدکه مجموع عددها درچهاردایرهٔ هرخط راست مساوی۲۶شود.

۳۲۵. بلور

روی شکل‌قسمتی ازیك شبکهٔ بلوری خیالی داده شده است،که «اتمهای»



مربوط به‌مسألهٔ ۳۲۵



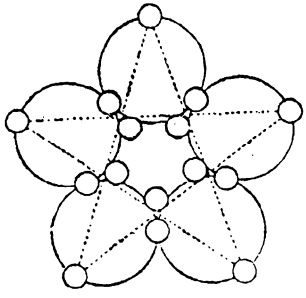
مربوط به‌مسألهٔ ۳۲۴

آن در۱۰ ردیف و در هرردیف۳ اتم قرارگرفته است (روی شکل، این ردیفها با خط راست مشخص شده است). ۱۳ عدد صحیح انتخاب‌کنید، طوری‌که ۱۱تای‌آنها متفاوت و۲تای آنها یکی باشد وآنها را درجای «اتمها» طوری قراردهید که مجموع عددها درهرردیف (درطول هرخط راستی‌که نشان داده شده است)، مساوی۲۰ باشد.

کوچکترین این‌عددهامساوی ۱ وبزرگترین‌آنها مساوی۱۵ است.

۳۲۶. آرایش ویترین

دانش‌آموزهنرستان برای آرایش ویترین مغازه، طرح یك پنج ضلعی ستاره‌ای را ریخت وسپس دایره‌هایی با سیم برهرمثلث محیط‌کرد و دور هردایره پنج قاب دایره‌ای قرارداد (شکل را ببینید).



مربوط به‌مسألهٔ ۳۲۶

دانش‌آموزهنرمند، هرکدام ازقابها را باسنگهای رنگی زینت داد. دریکی یك سنگ، در دیگری ۲ سنگ، در سومی ۳ سنگ و... بالاخره درقاب پانزدهم، ۱۵سنگ

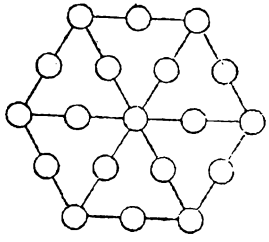
قرارداد.

ولی سنگها طوری قرارداده شدکه تعداد سنگها درمحیط هردایرهٔ سیمی مساوی۴۰ وتعداد سنگهایی هم‌که درقابهای پنج راس ستاره قرار گرفته‌اند، مساوی ۴۰ شد.

تعداد سنگهارا درهرقاب معین‌کنید.

۳۲۷. چه‌کسی زودترموفق می‌شود؟

دودسته فیش تهیه‌کنید، هردسته شامل۱۹فیش است وروی هرفیش یکی ازعددهای ۱تا۱۹ را بنویسید.



مربوط به‌مسألهٔ ۳۲۷

دو شش‌ضلعی، یکی برای خودتان و دیگری برای دوستتان، مطابق شکل رسم‌کنید، یك‌دسته از فیشها را برای خود نگه دارید و دستهٔ دوم را به‌دوستتان بدهید.

باید فیشهارا در دایره‌های شکل‌طوری قراردهیدکه مجموع‌عددها درطول هرضلع و هرشعاع شش‌ضلعی برای یکی‌ازشما دونفرمساوی۲۲ و برای دیگری مساوی۲۳بشود.

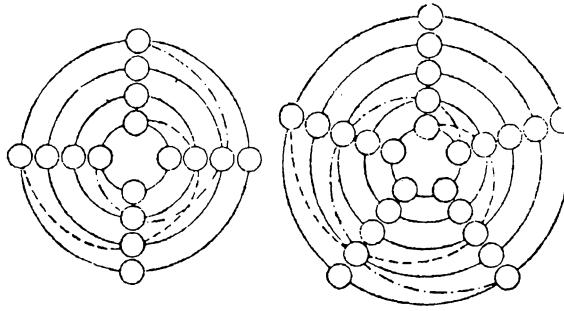
کدامیك ازشما زودترموفق می‌شوید؟

توجه داشته‌باشیدکه قبلاً باید باهم قراربگذاریدکه‌کدامیك‌ازشما درهرردیف مذکور۲۲ واحد وکدامیك۲۳ واحد باید بدست‌آورید.

۳۲۸. «سیاره‌نما»

در«سیاره‌نمای»کوچکتر، همهٔ «سیاره‌ها» روی۴ مدارقراردارند و درطول هرشعاع هم ۴ «سیاره» واقع شده است ، ولی در «سیاره‌نمای» بزرگتر،

روی۵مدار ودرطول هرشعاع،۵«سیاره» (شکل‌را ببینید). وزن هر«سیاره» در«سیاره‌نمای» کوچکتربایکی‌ازعددهای صحیح ۱تا۱۶ ودر«سیاره‌نمای» بزرگتربایکی‌ازعددهای صحیح ۱تا۲۵بیان شده است.



مربوط به‌مسألهٔ ۳۲۸. «سیاره‌نمای»کوچك و«سیاره‌نمای» بزرگ

بدون اینکه طرح شکل را بهم بزنید «سیاره‌ها»را طوری‌قراردهید که هردودستگاه در «تعادل» باشد، یعنی مجموع وزن «سیاره‌ها» درطول هرشعاع «سیاره‌نمای»کوچکترمساوی۳۴ ودرطول هرشعاع «سیاره‌نمای» بزرگترمساوی ۶۵ بشود. علاوه‌برآن برای وزن «سیاره‌هایی» هم‌که روی یك مدار قرارگرفته‌اند، و یا «سیاره‌هایی»که روی منحنی مارپیچی قرار گرفته‌اند، باید همین عددها بدست آید. ایـن منحنی‌هـای مارپیچی به این‌ترتیب‌اند: مثلاً درسیاره‌نمای‌کوچکترازیك سیارهٔ مدار اول‌به‌سیاره‌ای درمداردوم وازآنجا به‌سیاره‌ای درمدارسوم وبالاخره ازآنجا به‌سیاره‌ای درمدارچهارم می‌رود(به‌عنوان‌نمونه، درهر«سیاره‌نما» دومنحنی‌مارپیچی، که در دوجهت مخالف‌اند، با خطچین مشخص‌شده است).

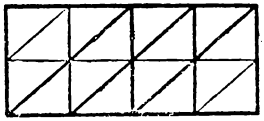
شرط اضافی، تنها مربوط به«سیاره‌نمای»کوچکتراست: عدد ۳۴ باید ازجمع وزنهای چهارسیاره‌ای هم‌که روی هردومدارمجاور ودرطول شعاعهای مجاورقرارگرفته‌اند، بدست‌آید. به‌این‌ترتیب روی «سیاره‌نمای»

کوچکتر، لااقل۲۸مجموع مساوی، و روی «سیاره‌نمای» بزرگتر، لااقل ۲۰مجموع مساوی پیدا می‌شود.

باوجود اینکه این‌مسأله شرطهای زیادی دارد، می‌توان جوابهای زیادی بدست آورد، ولی اگر به «رمز»کارآشنا نباشیم، برای پیداکردن حتی‌یك جواب هم دچاراشکال می‌شوید. البته رمزکارهم به‌سادگی‌بدست می‌آید، وشما هم اگرهمین بخش را ادامه دهید، باآن‌آشنا می‌شوید.

۳۲۹. مثلثهای بزرگ

درشکل،۱۶مثلث‌کوچك می‌بینید، ولی باترکیب مناسب‌چهارمثلث، می‌توان یك مثلث بزرگتربدست‌آورد(شکل را ببینید). به‌سادگی می‌توان متوجه شد که روی‌هم شش‌مثلث بزرگ وجوددارد، که البته به‌هم «دوخته» شده‌اند.



مربوط به‌مسألهٔ ۳۲۹

عددهای۱تا۱۶ را (بدون‌تکراریك عدد) درمثلثهای‌کوچکترطوری قراردهیدکه مجموع‌عددها درهریك‌ازشش‌مثلث بزرگ، مساوی۳۴بشود.

۳۳۰. بازهم‌گروه‌بندی جالب

دراین‌شکل۳مثلث (که هرکدام از۴مثلث‌کوچکتر تشکیل‌شده است) و۳ ذوزنقه (که هرکدام شامل ۵ مثلث‌کوچك است)، وجود دارد. در مثلثهای کوچك، عددهـای ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸ و۹ طوری گذاشته شده است‌که مجموع‌عددها درهرمثلث بزرگ‌مساوی۱۷ودرهرذوزنقه‌مساوی۲۸است:

مربوط به‌مسألهٔ ۳۳۰

$۷+۳+۶+۱=۱۷$, $۷+۶+۱+۵+۹=۲۸$,
$۸+۳+۴+۲=۱۷$, $۷+۶+۳+۴+۸=۲۸$,
$۹+۲+۵+۱=۱۷$, $۸+۴+۲+۵+۹=۲۸$

همین‌عددهای از ۱ تا ۹ را درخانه‌های مثلثی‌شکل به‌ترتیب دیگری‌قراردهید، به‌نحوی‌که همین‌مجموعها بدست‌آید. شما می‌توانید این‌عددهارا طوری قراردهیدکه مجموع‌عددهای هرمثلث بزرگ مساوی ۲۰ ومجموع‌عددهای هرذوزنقه مساوی ۲۵شود (۴جواب) یامجموع عددهای هرمثلث بزرگ مساوی۲۳ ومجموع عددهای هرذوزنقه مساوی۲۲شود (۲جواب).

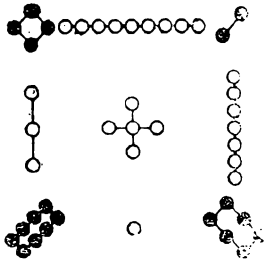
همهٔ این‌جوابها را پیداکنید.

برای اینکه‌کارتان‌آسان باشد، ۹ فیش تهیه‌کنید و روی هرکدام یکی از عددهای ۱ تا ۹ را بنویسید. به‌این‌ترتیب‌کار جابه‌جاکردن عددها، درخانه‌های شکل‌آسان‌تر می‌شود.

B. مربعهای وفقی

۳۳۱. بیگانه‌هایی ازچین وهند

یکی‌ازقدیمی‌ترین وکامل‌ترین انواع مجموعهای متقاطع، مربعهای وفقی (یا جادویی) است.



مربوط بهمسألهٔ ۳۳۱. قدیمی‌ترین مربع وفقی

اختراع مربعهای وفقی، ظاهراً مربوط به چینی‌هاست، زیرا قدیمی‌ترین جایی‌که ازآن نام برده می‌شود، یکی از کتابهای‌چینی‌است‌که بین ۴۰۰۰تا۵۰۰۰ سال پیش‌ازمیلاد نوشته شده است.

قدیمی‌ترین مربع وفقی درجهان، که مربوط به‌چین است، دراین‌صفحه داده شده است. دراین‌مربع، دایره‌های سیاه، عددهای زوج و دایره‌های سفید، عددهای فرد را مشخص

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

کرده‌اند. این مربع درنوشتهٔ معمولی، به‌صورتی که در شکل سمت چپ نشان داده‌ایم ، درمی‌آید . و چه‌مجموع متقاطع جالبی! ۹ عدد پشت سرهم، در ۹ خانهٔ مربع چنان قرارگرفته‌اند که مجموع عددها درطول هرضلع، هرستون وهرکدام از دو قطر، یکی شده است (خاصیت اصلی مربع وفقی).

قدیمی‌ترین آگاهی که دربارهٔ مربعهای وفقی از هند بدست آمده است، مربوط به‌سدهٔ اول میلادی است. یکی از قدیمی‌ترین آثار ازاین‌قبیل را، که قریب ۲۰۰۰ سال ازآن می‌گذرد، درسمت‌چپ می‌بینید.

۱	۱۴	۱۵	۴
۱۲	۷	۶	۹
۸	۱۱	۱۰	۵
۱۳	۲	۳	۱۶

دراینجا ۱۶ عدد پشت‌سرهم در۱۶ خانهٔ مربع قرارگرفته است، به نحوی که خاصیت اصلی مربعهای وفقی دربارهٔآن صدق می‌کند. درواقع:

$$+\begin{cases} ۱+۱۴+۱۵+۴=۳۴, \\ ۱۲+۷+۶+۹=۳۴, \\ ۸+۱۱+۱۰+۵=۳۴, \\ ۱۳+۲+۳+۱۶=۳۴ \end{cases}$$

$$۳۴ \quad ۳۴ \quad ۳۴ \quad ۳۴$$

و

$$۱+۷+۱۰+۱۶=۳۴$$

$$۱۳+۱۱+۶+۴=۳۴$$

هرعدد ازمربع‌وفقی در دومجموع وهرعدد روی‌قطر، درسه‌مجموع شرکت می‌کند، وهمهٔ این‌مجموعها هم باهم برابرند.

بی‌جهت نیست که درآن دوران دوردست، هندیهای خرافاتی و

به دنبال آنها مردم کشورهای شرق میانه و نزدیك، برای این مربعهای عددی، خاصیتهای جادویی وسحرآمیز قائل بودند.

در «فاوست» گوته، صحنه‌ای وجود داردکه جادوگر، یك معجون جوانی‌تهیه می‌کند. جمله‌هایی‌که جادوگربه‌صورت پیچیده و رمزآمیزی به‌کارمی‌برد، معمولاً برای خوانندهٔ «فاوست» نامفهوم وبی‌معنی به‌نظر می‌رسد:

Du musst verstehen!	. . . . .
Aus Eins mach' Zehn,	از واحد، ۱۰ را بساز،
Und Zwei lass gehn,	از ۲ عبورکن،
Und Drei mach' gleich,	وهمینطور از۳،
So bist reich.	. . . . .
Verlier die Vier!	۴ را حذف‌کن،
Aus Fünf und Sechs,	از ۵ و ۶
So sagt die Hex,	. . . . .
Mach' Sieben und Acht,	۷ و ۸ بساز (وبرعکس)،
So ist's vollbracht:	مربع‌آماده است.
Uud Neun ist Eins,	. . . . .
Und Zehn ist keins,	. . . . .
Das ist das Hexen –	. . . . .
Einmal – Eins!	

ولی‌گوته نمی‌تواند دست ازروش هنرمندانهٔ خود بردارد و۱۳سطر رمزگونه به‌صورت شعرمی‌دهد.

بسیاری از مفسران و محققان ادبی، بدون هیچ نتیجه‌ای نیروی خودرا درراه پیداکردن معنای این‌سیزده سطر، صرف‌کردند. هیچ‌کدام از آنها به‌این‌فکرنیفتادندکه قلم وکاغذ بردارند وآنچه راکه جادوگرگفته است، عمل‌کنند.

ما به‌این‌آزمایش می‌پردازیم . مربعی با ۹ خـانه می‌سازیم و در خانه‌های‌آن، عددهای از ۱تا۹ را به‌ردیف ازچپ به‌راست و بالابه‌پایین، قرارمی‌دهیم .

از واحد ، ۱۰می‌سازم ـ درخانهٔ اول، عدد۱را به۱۰تبدیل می‌کنیم.

از ۲ عبور می‌کنم و همینطور از ۳ ـ همانطورکه‌گفته است، عددهای ۲و۳ را عوض نمی‌کنیم.

۴ را خط می‌زنم ـ این به‌معنای آنست که به جـای ۴، باید صفر قراردهیم.

از ۵ و ۶ ، ۷ و ۸ می‌سازم (وبرعکس)ـ ۵ و۶ را به‌ترتیب با عدد‌های ۷ و ۸ عوض می‌کنیم (شکلهای a و b را ببینید).

۱	۲	۳
۴	۵	۶
۷	۸	۹

a)

۱۰	۲	۳
۰	۷	۸
۵	۶	۹

b)

۱۰	۲	۳
۰	۷	۸
۵	۶	۴

c)

جادوگر می‌گوید که مربع‌آمـاده است، ولی در اینجا حیله‌گری می‌کند؛ هنوزباید درآخرین‌خانهٔ مربع، ۹ را با۴ عوض‌کرد.

به‌این‌ترتیب «طلسم» شکسته می‌شود. سه‌سطرآخر این‌سیزده سطر، چیزی به‌آنچه‌که جادوگر درسطرهای قبل‌گفته است، اضافه نمی‌کند.

خصوصیت‌مربعی‌که بدست می‌آید دراینست‌که مقدارثابت‌جادویی (۱۵) تنها از مجموع عددهایی‌که درطول هرسطر یاستون قرارگرفته‌اند، بدست می‌آید، درحالیکه این عدد، ازمجموع عددهایی‌که درطول قطرها قرارگرفته‌اند، بدست نمی‌آید (ودرحقیقت یکی‌ازقطرها).

وقتی که یك مربع، این خاصیت را داشته باشد، به‌آن نیم وفقی گویند.

تبدیل مربع اولیه، به‌مربع نیم وفقی، همهٔ راز جوان‌کردن را، از نظر «فاوست»گوته آشکار می‌کند.

دراروپا، مربعهای وفقی درابتدای سدهٔ پانزدهم پیدا شده است و یکی از این مربعها، در ابتدای سدهٔ شانزدهم به وسیلهٔ ۲. دیورر ، نقاش مشهورآلمانی (که ریاضی‌هم می‌دانست) دریکی‌ازنقاشیهای او، جاودان شده است (سال۱۵۱۴).

مربع وفقی‌که دیورر درنقاشی‌خودآورده است، باکمی‌تفاوت،شبیه مربع۱۶خانه‌ای‌که درصفحهٔ ۳۳۹آمده است.

جذابیت مربعهای وفقی،تنهادرمجموع‌ثابت‌آنها(که تنهاخاصیت اصلی مربعهای وفقی است)، نمی‌باشد و درکنار این خاصیت اصلی ، خاصیتهای زیبای دیگری هم می‌تواند وجود داشته باشد.

مثلاً دربارهٔ مربع شانزده‌خانه‌ای‌که درصفحهٔ۳۳۹آوردیم،می‌توان این‌خاصیتهای اضافی را ذکرد:

۱. مجموع‌چهارعددی‌که درچهارگوشهٔاین‌مربع قرارگرفته‌است، مساوی۳۴، یعنی همان مجموع ثابت سطرها وستونها وقطرهاست.

۲. مجموع عددها در هرمربع‌کوچکتر (که از۴ خانه تشکیل شده است)، چه درچهارگوشهٔ مربع اصلی و چه در مرکزآن، بازهم مساوی همان عدد۳۴ است.

$$۱+۱۴+۱۲+\ ۷=۳۴,$$
$$۸+۱۱+۱۳+\ ۲=۳۴,$$
$$۱۰+\ ۵+\ ۳+۱۶=۳۴,$$
$$۷+\ ۶+۱۱+۱۰=۳۴$$

۳. درهرسطر، دوعدد متوالی به‌مجموع ۱۵، و دوعدد متوالی به مجموع ۱۹ وجود دارد.

۴. مجموع مجذورهای عددهای هرسطررا محاسبه می‌کنیم:

$$۱^۲+۱۴^۲+۱۵^۲+۴^۲=۴۳۸, \quad ۱۳^۲+۲^۲+۳^۲+۱۶^۲=۴۳۸,$$
$$۱۲^۲+۷^۲+۶^۲+۹^۲=۳۱۰, \quad ۸^۲+۱۱^۲+۱۰^۲+۵^۲=۳۱۰$$

می‌بینیم که این مجموعها درمورد دوسطر مرزی یکی، و درمورد دوسطر مرکزی هم یکی است.

۵. به‌سادگی می‌توان فهمیدکه دربارهٔ ستونها هم، همین‌خاصیت وجود دارد: مجموع مجذورهای عددهای دوستون دوطرف باهم برابر است، ومجموع مجذورهای دوستون وسط هم یکی است.

۱	۱۴	۱۵	۴
۱۲	۷	۶	۹
۸	۱۱	۱۰	۵
۱۳	۲	۳	۱۶

a)

۱۲	۷	۶	۹
۱	۱۴	۱۵	۴
۸	۱۱	۱۰	۵
۱۳	۲	۳	۱۶

b)

۶. اگرمربعی درمربع‌مفروض‌محاط‌کنیم، به‌نحوی‌که رأسهای‌آن در وسط ضلعهای مربع اصلی واقع باشد،آنچه‌که در شکل a نشان داده شده است، بدست می‌آید:

الف)مجموع عددهایی‌که روی هردوضلع روبروی درمربع‌محاطی قراردارد، مساوی همان مجموع ثابت۳۴ می‌شود:

$$۱۲+۱۴+۳+۵=۱۵+۹+۸+۲=۳۴$$

ب) این هم جالب است‌که هم مجموع مجذورهـا و هم مجموع

مکعبهای این‌عددها هم، برابربایکدیگربدست می‌آید:

$$۱۲^۳+۱۴^۳+۳^۳+۵^۳=۱۵^۳+۹^۳+۸^۳+۲^۳,$$
$$۱۲^۳+۱۴^۳+۳^۳+۵^۳=۱۵^۳+۹^۳+۸^۳+۲^۳$$

اگر همهٔ ستونهای مربع وفقی را به‌ترتیب با سطرهای آن عوض کنیم، یعنی عددهای ستون اول را به‌همان ردیف درسطر اول قراردهیم، عددهای ستون دوم را درسطردوم وغیره،مربع، وفقی باقی می‌ماند وهمهٔ خاصیتهای قبلی‌آن حفظ می‌شود.

اگرجای سطرها ویا ستونهارا باهم عوض‌کنیم، ممکن‌است بعضی ازخاصیتهای‌آن ازبین برود، وممکن است همهٔ‌آن خاصیتها باقی‌بماند و حتی خاصیتهای تازه‌ای پیدا شود. مثلاً اگرجای دوسطر اول و دوم را باهم عوض‌کنیم، مربعی بدست می‌آیدکه درشکل b صفحهٔ قبل‌نشان داده شده است.

روشن است‌که دراین وضع، مجموع سطرها یا ستونها تغییرنمی‌کند، ولی مجموع عددها درطول قطرها تغییر می‌کند وغیراز۳۴می‌شود. مربع وفقی، بعضی‌ازخاصیتهای خود را از دست می‌دهد و به‌صورت یك مربع نیم وفقی درمی‌آید.

با ادامه تغییرجای سطرها و ستونها در مربع، مربعهای وفقی و نیم وفقی تازه وتازه‌تری از۱۶عدد بدست می‌آورید.

مسأله. جای سطرها وستونها را درمربع وفقی صفحهٔ ۳۳۹ طوری تغییردهیدکه:

۱) خاصیت اصلی‌مربع وفقی برقرارباشد (مجموع عددها درطول هرسطر، هرستون وهرقطر، یکی‌باشد)؛

۲) مجموع مجذورهای عددها در طول یك قطر برابر با مجموع

مجذورهای عددها درطول قطردیگرباشد؛

۳) مجموع مکعبهای عددها در یکی از قطرها، برابر با مجموع مکعبهای عددها، درطول قطردوم باشد.

۳۳۲. چگونه می‌توان مربع وفقی درست‌کرد؟

اگرچند عدد مرتب، و مثلاً عددهای از۱تا۱۶ یا از۱تا۹، یا از۱تا۲۵، یا از۱تا۱۰۰ وغیره را، به‌شکل یك مربع طوری قراردهیم‌که مجموع‌عددها درطول هرسطر، هرستون وهرقطرمربع یکی‌بشود، به‌چنین‌مربعی،همانطور که می‌دانیم، یك مربع‌وفقی یا مربع سحرآمیزگویند.

تعداد خانه‌های هرردیف در مربع وفقی، نوع آنرا معین می‌کند. مربع وفقی مرتبهٔ سوم ، یعنی‌مربعی‌که درهرردیف۳خانه دارد، مربع‌وفقی مرتبهٔ چهارم ، یعنی مربعی‌که درهرردیف ۴ خانه دارد وغیره.

فکرتشکیل‌مربع وفقی، نزدیك هفت هزارسال سابقه داردوبه‌تدریج هم مورد توجه ریاضیدانهای متخصص و هم‌کسانی‌که به سرگرمیهای ریاضی‌علاقه‌مند هستند، قرارگرفته است.

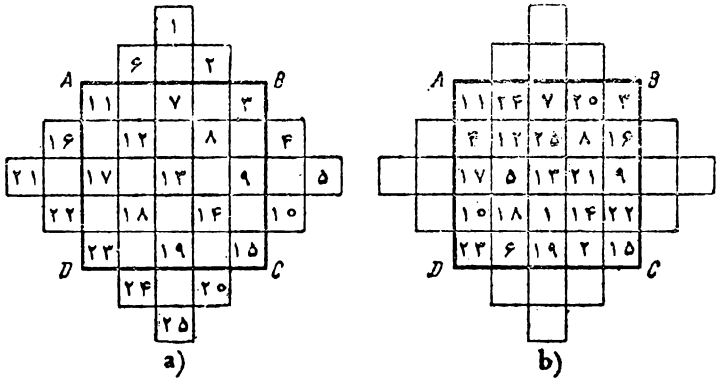
هنوز هم بررسیهای مربوط به جستجوی بنیان نظری این پدیدهٔ شگفت و زیبا در جهان عددها، ادامه دارد. در جریان صدهاسال، صدها روش وقاعدهٔ جالب برای تشکیل‌مربعهای وفقی مختلف، پیدا شده‌است.

آیا شما می‌خواهید بابعضی‌ازجالب‌ترین این‌روشهاآشنا شوید؟

ما دراین‌مورد شبیه یك رادیوسازعمل می‌کنیم. درآنجا می‌توان، بدون آشنایی‌کامل به نظریهٔ علمی رادیوسازی، قطعه‌هایی راکه از قبل آماده شده است، طبق طرحی‌که وجود دارد، جمع‌کرد و رادیویی‌که‌کار می‌کند،آماده‌کرد. درمورد مربعهای وفقی، قطعه‌های‌آماده، همان عددها وطرح لازم، همان مربع تقسیم‌شده به‌خانه‌هاست.

مربعهای وفقی با مرتبهٔ فرد. روشهای زیادی برای تشکیل مربعهای وفقی مرتبهٔ فرد وجود دارد وما، یکی ازآنها را برای تشکیل مربع‌مرتبهٔ پنج می‌آوریم؛ شما می‌توانید، بدون هیچ اشکالی، همین روش را برای تشکیل مربعهای وفقی مرتبهٔ سوم و یا هرمربعی با تعداد ردیفهای فرد، به‌کاربرید.

مربع ABCD را با۲۵خانه رسم می‌کنیم وخانه‌ها را درهرطرف ضلع آن‌به‌طورمتقارن‌وپله‌ای،مطابق‌شکل a درهمین‌صفحه،ادامه می‌دهیم، طوری‌که در هرطرف به‌یك خانه ختم شود. حالا عددهای از ۱ تا ۲۵ را به‌ترتیب درخانه‌های این‌شکل‌به‌صورت قطری،باشروع ازخانهٔ بالابه‌طرف پایین و راست، قرارمی‌دهیم. به‌این‌ترتیب بعضی‌ازعددها در خارج مربع قرار می‌گیرند وضمناً بعضی‌ازخانه‌های مربع، خالی می‌ماند. عددهایی را که درخارج مربع ABCD قراردارند درهمان سطریاستون مربوط به‌خود آنها، به‌خانهٔ پنجم منتقل می‌کنیم. مثلاً عدد ۶ را درخانهٔ زیر۱۸، عدد ۲۴ را در خانهٔ بالای ۱۲، عدد ۱ را درخانهٔ زیر۱۳، عدد ۲۵ را درخانهٔ



مربوط به‌مسألهٔ۳۳۲. ساختن مربع وفقی مرتبهٔ پنجم

بالای۱۳، عدد ۱۶ را درسمت راست ۸، عدد ۴ را درسمت چپ۱۲وغیره قرارمی‌دهیم. به‌این‌ترتیب،مربع وفقی‌مرتبهٔ پنجم‌که درشکل b می‌بینید، بدست می‌آید.

این‌مربع، دارای خاصیت اصلی یك مربع وفقی می‌باشد: مجموع عددها درطول هرسطر، هرستون وهرقطرمقدارثابتی‌است برابر با ۶۵. عدد ۶۵ را مقدار ثابت مربع مرتبهٔ پنجم‌گویند.

ولی‌دراین‌مربع، یك خاصیت‌اضافی‌هم می‌توان‌کشف‌کرد: مجموع هردوعددی‌که نسبت به‌خانهٔ مرکزی مربع قرینه هم باشد ، مقدار ثابتی است، یعنی:

$$۱+۲۵=۱۹+۷=۱۸+۸=۲۳+۳=۶+۲۰=۲+۲۴=$$
$$=۴+۲۲=\dots$$

وقتی‌که یك‌مربع وفقی‌دارای این‌خاصیت‌باشد،آنرا متقارن‌گویند.

مسأله. بااستفاده از روشی‌که دربالاآوردیم،مربع وفقی‌مرتبهٔ سوم ومربع وفقی مرتبهٔ هفتم را درست‌کنید.

مربع وفقی‌که مرتبهٔ آن مضربی از چهار باشد ($n=۴k$) (مربعهای وفقی بامرتبهٔ زوج زوج). برای تشکیل‌مربعهای وفقی‌که تعداد خانه‌های آن درهرردیف مساوی

$$n=۴, ۸, ۱۲, \dots, ۴k$$

باشد، می‌توان ازطرح سادهٔ زیر استفاده‌کرد:

۱) عددها را درخانه‌های مربع مفروض، به‌ردیف صعودی قرار می‌دهیم؛

۲) درچهارگوشهٔ مربع مفروض چهار مربع‌کوچکتر به ضلع $\frac{n}{۴}$ و درمرکز مربع مفروض هم یك مربع به‌ضلع مساوی $\frac{n}{۲}$ مشخص می‌کنیم.

۳) در پنج مربعی که مشخص کرده‌ایم، جای هر دوعددی که نسبت به مرکز مربع مفروض متقارن‌اند، عوض می‌کنیم، یعنی در ردیف طبیعی عددهای مربع مرتبهٔ چهارم ، جای عددهای ۱ و۱۶، ۴ و۱۳، ۶ و۱۱، ۷ و ۱۰ را عوض می‌کنیم (شکلهای a و b)، و در مربع مرتبهٔ هشتم، جای عددهای ۱و۶۴، ۱۰ و ۵۵، ۲ و۶۳، ۹ و۵۶،۱۹و۴۶،۲۸و۳۷، ۲۰و۴۵، ۲۷و۳۸،۲۱و۴۴، وغیره (شکلهای c و d).

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶

a)

۱۶	۲	۳	۱۳
۵	۱۱	۱۰	۸
۹	۷	۶	۱۲
۴	۱۴	۱۵	۱

b)

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶
۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲
۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸
۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶
۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴

c)

۶۴	۶۳	۳	۴	۵	۶	۵۸	۵۷
۵۶	۵۵	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۵۰	۴۹
۱۷	۱۸	۴۶	۴۵	۴۴	۴۳	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۳۸	۳۷	۳۶	۳۵	۳۱	۳۲
۳۳	۳۴	۳۰	۲۹	۲۸	۲۷	۳۹	۴۰
۴۱	۴۲	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۴۷	۴۸
۱۶	۱۵	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۱۰	۹
۸	۷	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۲	۱

d)

مربوط به‌مسألهٔ ۳۳۲. ساختن مربعهای وفقی مرتبهٔ چهار ومرتبهٔ هشت مربعهایی که به‌این‌ترتیب درست‌شوند، مربعهای وفقی‌متقارن‌اند.

دومسأله . (بدون جواب وبرای حل پیش‌خودتان):

مسألهٔ ۱. در طرحی که برای تشکیل مربعهای وفقی با مرتبهٔ $4k$

دادیم، شرط ۳ را تغییرمی‌دهیم: جای عددها را درپنج مربعی‌که مشخص کرده‌ایم، تغییر نمی‌دهیم و به‌جای‌آن عددهایی از چهار مستطیلی را که باقی‌می‌ماند، تغییر می‌دهیم: جای هردوعددی راکه نسبت به مرکزمربع مفروض، قرینهٔ یکدیگرند، عوض می‌کنیم. در نتیجه بازهم یك مربع وفقی بدست می‌آید.

مسألهٔ ۲. یك مربع وفقی مرتبهٔ ۱۲ درست‌کنید.

مربعهایی که مرتبهٔ‌آنها «وج و بخش‌ناپذیر بر۴ است ($n=4k+2$) (مربعهای وفقی با مرتبهٔ زوج‌فرد). برای‌تشکیل‌مربعهای وفقی‌که تعداد ردیفهای‌آن مساوی۶، ۱۰، ...، $4k+2$ باشد، بهترین روش همانست‌که م. شتیفل درسال ۱۵۴۴آورده است. طبق این روش، باید با هرروشی‌که مایلیم، ابتدا مربع وفقی با $n-2$ ردیف (که البته تعداد ردیفهای آن مضربی از ۴ می‌شود)، تشکیل دهیم، سپس مربع وفقی بدست‌آمده را در قابی قرار دهیم‌که با خود مربع روی‌هم، یك مربع وفقی مرتبهٔ n درست کند. به‌این‌ترتیب، به‌کمك مربعهای وفقی مرتبهٔ ۴ و۸، می‌توان‌مربعهای وفقی مرتبهٔ ۶ و۱۰ بدست‌آورد وغیره. بنابراین‌تمام مطلب، منجربه‌این می‌شودکه خانه‌های خالی قاب خارجی را پرکنیم. این روش را می‌توان برای تشکیل مربعهای وفقی‌که تعداد ردیفهای‌آنها، عددی فرد است، نیز به‌کاربرد، یعنی به‌کمك مربع مرتبهٔ۳، مربع مرتبهٔ ۵ بدست‌آورد وغیره.

فرض‌کنیم‌که می‌خواهیم، مربع وفقی باعددهای

$$1, 2, 3, \ldots, n^2$$

بسازیم. به‌این‌ترتیب عمل می‌کنیم:

۱) مربع وفقی با مرتبهٔ $(n-2)$ از عددهای ۱، ۲، ...، $(n-2)^2$ تشکیل می‌دهیم و به هرکدام از عددها، به اندازهٔ $h=2n-2$ اضافه

کتابخانه مجازی ریاضیات

می‌کنیم؛

۲) این مربع را به‌وسیلهٔ قابی به‌حاشیهٔ یك خانه، بزرگ می‌کنیم (شکل بالا درصفحهٔ ۳۵۱ را ببینید).

حالا باید عددهای ۱، ۲، ...، $2n-2$ و متممهای[۱] آنها نسبت به n^2+1 را درخانه‌های قاب قرارداد، به‌نحوی‌که خاصیتهای مربع وفقی برقرارشود. این عمل‌را چگونه باید انجام داد؟ طبق کدام قانون باید عددها را در قاب قرارداد؟ وقتی‌که n عددی کوچك باشد، می‌توان جای عددها را با چندآزمایش پیداکرد. در مورد قراردادن عددها، درخانه‌های قاب، باید مجموع ثابت (S) را درمورد مربع وفقی درنظرداشت. این مقدارثابت را می‌توان به سادگی و ازقبل معین‌کرد: مجموع همهٔ عددهایی‌که مربع را پرکرده‌اند، برابراست با

$$1+2+\ldots+n^2=\frac{(1+n^2)\,n^2}{2}$$

که اگرآنرا به n تقسیم کنیم، مقدارثابت مربع وفقی بدست می‌آید:

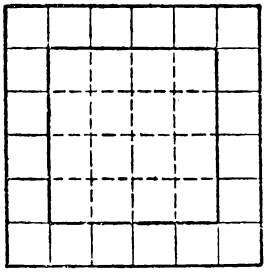
$$S=\frac{(1+n^2)n}{2}$$

تعیین جای عددها را درخانه‌های خارجی قاب، بدون‌آزمایش هم می‌توان‌بدست‌آورد، ضمناً کافی‌است‌که تنهاجای‌عددهای ۱، ۲، ...، $2n-2$ را پیداکرد. در واقع، اگر یکی از این‌عددها، مثلاً در یکی از خانه‌های گوشه‌ای قرارگیرد، متمم آن نسبت به عدد n^2+1، انتهای قطر و در خانهٔ مقابل‌آن قرارخواهدگرفت (برای‌اینکه، مقدارثابت مربع وفقی، در طول قطرتأمین‌شود). به‌همین‌دلیل، اگریکی‌ازعددهای ۱، ۲، ...، $2n-2$،

---

۱) متمم عدد h نسبت به k ($k>h$)، یعنی $k-h$. مثلاً متمم ۲ نسبت‌به۳۷ مساوی ۳۵ ومتمم۱۴ نسبت به۱۵۱، مساوی ۱۴ — ۱۵۱، یعنی ۸۷ است.

هرکدام ازخانه‌های دیگرقاب را پرکند، متمم‌آن نسبت به‌عدد n^2+1، باید روی همان سطریاستون ودرضلع مقابل قرارگیرد.



۱	۹				۲
۶					
۱۰					
					۷
					۸
		۳	۴	۵	

a)

۱	۹	۳۴	۳۳	۳۲	۲
۶					۳۱
۱۰					۲۷
۳۰					۷
۲۹					۸
۳۵	۲۸	۳	۴	۵	۳۶

b)

۲۶	۱۲	۱۳	۲۳
۱۵	۲۱	۲۰	۱۸
۱۹	۱۷	۱۶	۲۲
۱۴	۲۴	۲۵	۱۱

c)

۱	۹	۳۴	۳۳	۳۲	۲
۶	۲۶	۱۲	۱۳	۲۳	۳۱
۱۰	۱۵	۲۱	۲۰	۱۸	۲۷
۳۰	۱۹	۱۷	۱۶	۲۲	۷
۲۹	۱۴	۲۴	۲۵	۱۱	۸
۳۵	۲۸	۳	۴	۵	۳۶

d)

مربوط به‌مسألهٔ ۳۳۱. تشکیل مربع وفقی مرتبهٔ ۶، طبق رابطهٔ بیبرباخ

ل. بیبرباخ ، ریاضیدان مشهور آلمانی، درسال ۱۹۵۴ ثابت کرد که دربالا وپایین قاب، باید عددهایی از دنبالهٔ ۱،۲،...،۲n ــ۲ را قرارداد که به‌کمك رابطهٔ زیرجمع‌آوری می‌شود:

$$a+b+\left(\overline{\frac{n-۴}{۲}}\right)_{ب}=\left(\overline{\frac{n}{۲}}\right)_{پ}$$

و بقیهٔ عددهای این دنباله، در دوطرف راست و چپ قاب و با توجه به رابطهٔ زیر:

$$a-b+\left(\overline{\frac{n-۲}{۲}}\right)_{چ}=\left(\overline{\frac{n-۲}{۲}}\right)'_{ر}$$

ایـن رابطه‌ها را بـاید اینطور فهمید: دوعدد دلخواه از دنبالهٔ ۱،۲،...،۲n ــ۲ را a و b می‌نامیم،به‌این‌شرط‌که a<b باشد وa+b بر۲بخش‌پذیرنباشد؛ در داخل پرانتزها، باید به‌تعداد عددی‌که زیرعلامت خط(ــ) قرارگرفته‌است، ازعددهای باقیماندهٔ دنباله، انتخاب‌کرد.

عددهایی راکه در داخل پرانتزها، قرار می‌گیرند، باید درخانه‌های قاب وبه‌طور دلخواه قرار داد، منتهی بااین شرط: «ب»، یعنی‌بالا؛ «پ»، یعنی پایین؛ «چ»، یعنی چپ و «ر»، یعنی راست؛ عددهای a و b را هم باید به‌ترتیب در دو خانهٔ‌گوشه‌های چپ و راست ضلع بالای قاب قرارداد.

به‌عنوان نمونه، به‌قاب مربوط به‌مربع وفقی۶ ردیفی، بنابررابطهٔ بیبرباخ می‌پردازیم.چون n=۶؛بنابراین ۲n−۲=۱۰و۳۷=۱+n۲؛ یعنی درخانه‌های قاب، باید عددهای۱،۲،۳،...،۱۰، وهمچنین متممهای آنها نسبت به۳۷=۱+n۲، یعنی عددهای ۳۶،۳۵،۳۴،...،۲۷ را قرار داد. a=۱ وb=۲ می‌گیریم.حالاباید جای عددهای۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ و

۱۰ را پیداکرد. رابطه‌های بیبرباخ، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\text{ب}(\bar{۱})+\text{ب}(\bar{۳})=\text{پ}(\bar{۳}) \Rightarrow ۱+۲+۳=\text{پ}(\bar{۱})+\text{چ}(\bar{۲})$$

$$\text{چ}(\bar{۲})=\text{چ}(\bar{۲})' \Rightarrow ۱-۲+۱=\text{چ}(\bar{۲})+\text{چ}(\bar{۲})'$$

و این به‌معنای آنست‌که باید عددهای ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ را به چهارگروه طوری تقسیم‌کرد که درگروه اول یك عدد، درگروه دوم سه‌عدد، درگروه سوم دوعدد و درگروه چهارم دوعدد وجود داشته‌باشد. از رابطهٔ اول معلوم می‌شودکه عددگروه اول ($\bar{۱}$) را بایدطوری‌انتخاب کردکه حاصل‌جمع آن با عدد ۳، برابرباشد با مجموع سه‌عددگروه دوم ($\bar{۳}$). از رابطهٔ دوم هم معلوم می‌شودکه باید مجموع دوعددگروه سوم ($\bar{۲}$) وعدد۱ـ برابرباشد بامجموع دوعددگروه چهارم $\bar{۲}'$). بااانتخاب عددهای این‌گروهها بدست می‌آید:

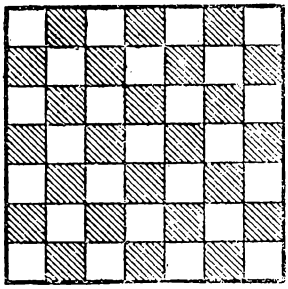
$$\text{پ}(۹)=(۳+۴+۵)+۳$$

$$\text{چ}(۶+۱۰)=(۷+۸)+۱-$$

به‌این‌ترتیب، جای همهٔ عددها پیدا می‌شود: درگوشه‌های بالای قاب ۱و۲؛ علاوه‌برآن، عدد ۹ هم درضلع بالای قاب است، عددهای۳ و ۴ و ۵ به‌ترتیب دلخواه، درضلع پایین قاب؛ ۶ و۱۰ در ضلع سمت چپ و ۷ و ۸ در ضلع سمت راست (شکل a را در صفحهٔ ۳۵۱ ببینید). تنها این عددها را باید طوری درخانه‌های قاب قراردادکه مثلاً عدد ۹ در هرخانه‌ای ازضلع بالا قرارگرفته‌است، خانهٔ مقابل‌آن درضلع پایین‌خالی بماند، به‌همین‌ترتیب مقابل خانه‌های ضلع سمت چپ که شامل عددهای ۶ و۱۰ است، درضلع سمت راست خالی‌باشد. حالا یك مربع وفقی‌مرتبهٔ ۴آماده برمی‌داریم (مثلاً مربع وفقی شکل b درصفحهٔ ۳۳۸)، به‌هرعدد آن ۱۰واحد اضافه می‌کنیم ($۱۰=۲-۲n$) تا مربع وفقی مرتبهٔ چهار

جدیدی بدست‌آید (شکل c صفحهٔ ۳۵۱). این‌مربع را داخل قاب‌آماده‌شده می‌گذاریم و در خانه‌های خالی قاب، متممهای عدد مقابل‌آنرا نسبت به $n^2+1=37$ قرارمی‌دهیم (شکل d صفحهٔ ۳۵۱).

بااستفاده از رابطه‌های بیبرباخ، خودتان مربعهای وفقی ۸ ردیفی و۱۰ردیفی درست‌کنید.



مربوط به‌مسألهٔ ۳۳۳

۳۳۳. آزمایش اندیشه

درخانه‌های سفید این شکل، عددهای از ۳۰ تا ۵۴ را چنان قرار دهیدکه مجموع عددها در هریك از۷ ردیف افقی وهریك از۷ ردیف قائم‌مساوی ۱۵۰، و در طول هرکدام از دو قطر مساوی ۳۰۰ شود. سعی‌کنید برای جادادن عددها، طرحی بریزید وطبق‌آن طرح،مسأله را حل‌کنید.

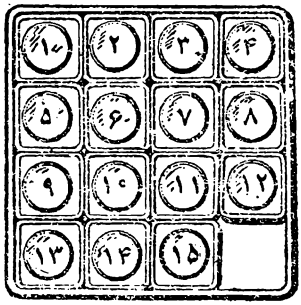
۳۳۴. بازی سحرآمیز با «۱۵»

یك صفحهٔ مربع‌شکل به۱۶قسمت مساوی تقسیم شده است، ولی تنها ۱۵ قالب شماره‌دار درآن وجود دارد ویکی‌ازجاها خالی‌است. معمولاً،بازی با «۱۵» عبارتست از ردیف‌کردن قالبها، از هرحالت غیرمرتب به‌ردیف طبیعی(شکل‌صفحهٔ۳۵۵رابببینید)؛ برای‌این‌منظور می‌توان‌هرقالبی‌راکه‌در مجاورت خانهٔ خالی قراردارد، درآن قرارداد، ولی نمی‌توان آنها را از صفحه جداکرد.

دراین‌وضع، بازی با «۱۵»، محتوی چندانی ندارد. ولی با بعضی شرطهای اضافی، می‌توان ، محتوی‌ریاضی‌آنرا تقویت‌کرد؛ مثلاً قالبها

را طوری قرار دهیم که یك مربع مرتبهٔ ۴ وفقی داشته باشیم (خانهٔ خالی در هرکجا که باشد، صفر به حساب می‌آید).

اگر جعبهٔ بازی با «۱۵» را در اختیار نداشته باشید، خودتان می‌توانید آنرا بسازید.



مربوط به‌مسألهٔ ۳۳۴. بازی با «۱۵». ترتیب درست.

حالا، قالبهای بازی با «۱۵» را مطابق شکل دوم بچینید (همهٔ قالبها، به‌جز دوتا به‌ردیف‌اند). بدون اینکه قالبی را از صفحه جداکنید، و تنها با جابه‌جاکردن به‌کمك خانهٔ خالی، یك مربع وفقی با مقدارثابت ۳۰ درست کنید.

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۵	۱۴	

مربوط به مسألهٔ ۳۳۴. دوقالب خارج ازردیف‌اند.

مسأله را باتعدادی حرکت، که بیشتر از ۵۰ نباشد، حل کنید.

از حالت طبیعی قالبها (شکل اول) هم می‌توان مربع وفقی درست کرد، منتهی مربع وفقی راکه در اینحالت پیدا می‌شود، نمی‌توان به‌کمك وضع شکل دوم بدست‌آورد، ثابت کنید!

۳۳۵. مربع وفقی غیرعادی

برای تشکیل یك مربع وفقی مرتبهٔ n، معمولاً ازعددهای صحیح ۱ تا n^2 استفاده می‌کنند و به‌این‌ترتیب، ازهرعدد، تنها یکبار استفاده می‌شود. در حالت کلی‌تر، می‌توان خانه‌های یك مربع را، با عددهای دلخواه، پرکرد و به‌صورت یك مربع وفقی درآورد.

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۸	۷	۶	۵
۴	۳	۲	۱

مربوط به‌مسألهٔ ۳۳۵

مسألهٔ ۱. فرض کنید درشانزده خانهٔ یك مربع، همانطورکه درشکل دیده می‌شود، عدد‌های ۱ تا ۸، وازهرکدام دومرتبه، استفاده‌شده باشد. این‌عددها را طوری درمربع قرار دهیدکه مجموع عددها در هرسطر، هر ستون، در طول هرقطر و همچنین مجموع عددهای چهارگوشهٔ مربع، مساوی ۱۸ شود. علاوه‌برآن باید:

۱)مجموع عددها درهرمربع کوچکی که از۴خانه تشکیل‌شده‌است، مساوی همان مقدارثابت ۱۸ باشد؛

۲) بین‌چهارعددی‌که درچهارگوشهٔ هرمربع نه‌خانه‌ای قرارگرفته است، همچنین بین همهٔ عددهایی‌که مجموع ۱۸ را به‌وجودآورند،نباید عدد تکراری باشد.

مسأله را به‌طریق‌آزمایشی‌حل‌کنید ودربارهٔ طرح‌حل‌آن فکرکنید.

مسألهٔ ۲. با شانزده عدد فرد از۱تا۳۱، مربع وفقی بسازیدکه این خاصیتهای اضافی را هم داشته باشد:

۱) مجموع عددهایی‌که به ترتیب زیر قرارگرفته‌اند، مساوی ۶۴ باشد: a) درچهار رأس‌مربع شانزده خانه‌ای، b) درچهار رأس‌چهارمربع نه‌خانه‌ای، c) درچهار رأس نه‌مربع‌چهارخانه‌ای، d) درچهار رأس‌هریك ازشش‌مستطیلی‌که به‌طول۴خانه وعرض۲خانه‌اند، e) درطول هر دو ضلع روبرو ازمربع محاطی‌که رأسهای‌آن وسط ضلعهای مربع اصلی باشد؛

۲) مجموع مجذورهای عددهای دو سطر با یکدیگر، و مجموع مجذورهای عددهای دوسطر دیگرهم با یکدیگربرابر باشند؛

۳) مجموع مجذورهای عددهای دوستون با یکدیگر، و مجموع

مجذورهای عددهای دوستون دیگرهم با یکدیگربرابر باشند.

96	11	69	68
88	69	91	16
61	86	18	99
19	98	66	81

مربوط بمسألهٔ ۳۳۵. جدول عجیب

با تغییردادن جای سطرها و ستونها، در مربع وفقی که قبلاً درست کرده‌اید، می‌توانید مربعی باتمام این‌خاصیتها بسازید.

***

مربعی که درکنار می‌بینید، یك مربع وفقی بامجموع ثابت $S=۲۶۴$ است. عددهای این مربع را عمداً با نمادهای لاتینی‌نوشته‌ایم، زیرا به‌این‌صورت دارای خاصیت عجیبی است. آیا می‌توانید این‌خاصیت را پیداکنید؟

۳۳۶. درخانهٔ مرکزی چه‌عددی است؟

به‌کمك عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹، یك مربع وفقی‌مرتبهٔ سوم‌درست کنید. حالا، این مربع را به اندازهٔ ۹۰ درجه، ۱۸۰ درجه و ۲۷۰ درجه بچرخانید ۳ مربع وفقی تازه بدست می‌آید. در هرکدام از این چهار مربع وفقی، می‌توانید جای سطرهای بالا و پایین را عوض‌کنید، در هرحال بازهم یك مربع وفقی خواهید داشت. یکی از این مربعها را در شکل نشان داده‌ایم. همانطورکه می‌بینید، در مرکز این مربع، عدد ۵ قرار گرفته است، که برابر است با $\frac{۱}{۳}$ مقدار ثابت مربع وفقی مرتبهٔ سوم. ثابت‌کنیدکه در مرکز مربع وفقی مرتبهٔ سوم، عدد دیگری نمی‌تواند قرارگیرد.

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

مربوط به‌مسألهٔ ۳۳۶

$a_۱$	$a_۲$	$a_۳$
$a_۴$	$a_۵$	$a_۶$
$a_۷$	$a_۸$	$a_۹$

مربوط به مسألهٔ ۳۳۶

برای اثبات جبری، از حالت کلی مربع وفقی مرتبهٔ سوم استفاده کنید (شکل پائین صفحهٔ ۳۵۷ را ببینید). بنابه تعریف مربع وفقی، ۸ معادله پیدا می‌شود:

$$a_1+a_2+a_3=S, \qquad a_1+a_4+a_7=S,$$
$$a_4+a_5+a_6=S, \qquad a_2+a_5+a_8=S,$$
$$a_7+a_8+a_9=S, \qquad a_3+a_6+a_9=S,$$
$$a_1+a_5+a_9=S, \qquad a_3+a_5+a_7=S$$

که در آن ، S عبارتست از مقدار ثابت مربع وفقی .

ثابت کنید که حتی در حالتی هم که مربع وفقی ، غیر عادی باشد (یعنی از عددهای متوالی تشکیل نشده باشد) ، باز هم برای عدد خانهٔ مرکزی داریم :

$$a_5=\frac{S}{3}$$

۳۳۷ . شگفتیهای حساب

باز هم رابطه‌های عجیب و جالبی ، بین عددهای صحیح پیدا می‌کنیم . مثلا ، ۱۲ عدد صحیح معمولی در نظر می‌گیریم ؛

۲۲ و ۲۱ و ۱۳ و ۱۱ و ۳ و ۲ ؛ ۲۳ و ۱۸ و ۱۷ و ۷ و ۶ و ۱

حال ، مجموع عددهای هریك از دوگروه را مقایسه کنید :

$$۱+۶+۷+۱۷+۱۸+۲۳=۷۲,$$
$$۲+۳+۱۱+۱۳+۲۱+۲۲=۷۲$$

این مجموعها ، برابرند . اما مجموع مجذورهای این عددها ؟

$$۱^۲+۶^۲+۷^۲+۱۷^۲+۱۸^۲+۲۳^۲=۱۲۲۸$$
$$۲^۲+۳^۲+۱۱^۲+۱۳^۲+۲۱^۲+۲۲^۲=۱۲۲۸$$

مجموع مجذورها هم برابرند. مجموع مکعبها چطور؟ خودتان می‌توانید

آزمایش کنید و ببینید که مجموع مکعبها ، مجموع توانهای چهارم و مجموع توانهای پنجم این عددها هم یکی است :

$$۱^۳+۶^۳+۷^۳+۱۷^۳+۱۸^۳+۲۳^۳=۲^۳+۳^۳+۱۱^۳+$$
$$+۱۳^۳+۲۱^۳+۲۲^۳,$$

$$۱^۴+۶^۴+۷^۴+۱۷^۴+۱۸^۴+۲۳^۴=۲^۴+۳^۵+۱۱^۵+۱۳^۴+$$
$$+۲۱^۴+۲۳^۴,$$

$$۱^۵+۶^۵+۷^۵+۱۷^۵+۱۸^۵+۲۳^۵=۲^۵+۳^۵+۱۱^۵+۱۳^۵+$$
$$+۲۱^۵+۲۳^۵$$

بازهم یك مطلب دیگر : اگر یك عدد دلخواه صحیح به همهٔ این عددها اضافه کنیم و یا از آنها کم کنیم ، دوگروه عددی جدید بدست می‌آید که باز هم همین خاصیتها را دارند.

مثلا ، اگر ۱۲ واحد از عددهای مفروض کم کنیم، بـه دوگـروه عددی زیر می‌رسیم :

$$-۱۱,-۶,-۵,۵,۶,۱۱ \quad \text{و} \quad -۱۰,-۹,-۱,۱,۹,۱۰$$

روشن است که مجموع عددهای گروه اول، برابر است با مجموع عددهای گروه دوم (هردو مجموع برابر است با صفر). همین‌طور ، مجموع هـر توان فردی (و من‌جمله توانهای سوم و پنجم) ازگروه اول برابر است با مجموع همان توان از عددهای گروه دوم (این مجموعها هم برابر صفـر است). به سادگی می‌توان آزمایش کرد که مجموع مجذورها و مجموع توانهای چهارم دوگروه هم برابر است :

$$(-۱۱)^۲+(-۶)^۲+(-۵)^۲+۵^۲+۶^۲+۱۱^۲=$$
$$=(-۱۰)^۲+(-۹)^۲+(-۱)^۲+۱^۲+۹^۲+۱۰^۲,$$

$$(-۱۱)^۴+(-۶)^۴+(-۵)^۴+۵^۴+۶^۴+۱۱^۴=$$
$$=(-۱۰)^۴+(-۹)^۴+(-۱)^۴+۱^۴+۹^۴+۱۰^۴$$

به‌این ترتیب، رابطه‌ای بدست می‌آورید که به‌کمك آن می‌توانید هرچند گروههای دوگانه‌ای که بخواهید با خاصیتهای فوق بدست آورید:

$$(m-۱۱)^n+(m-۶)^n+(m-۵)^n+(m+۵)^n+(m+۶)^n+$$
$$+(m+۱۱)^n=(m-۱۰)^n+(m-۹)^n+(m-۱)^n+(m+۱)^n+$$
$$+(m+۹)^n+(m+۱۰)^n$$

که در آن m عبارتست از هرعدد صحیح دلخواه و n برابر با یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ .

عددهائی که از m کم یا به آن اضافه شده‌اند، جالب است، هرکدام از این عددها، با انتخاب علامت مثبت و منفی برای آنها، از دوسطر اول و سوم مربع وفقی ناقصی گرفته شده‌اندکه‌مجموع عددها در هرسطر و هرستون آن مساوی صفر است (شکل را ببینید) .

۶	-۱۱	۵
-۱۶	۱۲	۴
۱۰	-۱	-۹

بین عددهای مربع وفقی صفر هم، رابطه‌های جالبی وجود دارد:

۱) $۶^۲+(-۱۱)^۲+۵^۲=۱۰^۲+(-۱)^۲+(-۹)^۲$, مربوط به مساله ۳۳۷

$$۶^۴+(-۱۱)^۴+۵^۴=۱۰^۴+(-۱)^۴+(-۹)^۴$$

۲) مجموع حاصلضربهای عددهای هرسطر با مجموع حاصلضربهای عددهای هرستون، و همچنین بامجموع حاصلضربهای عددهای همهٔ قطرهایی که دراثر جابه‌جاکردن سطرها و ستونهای مربع بدست می‌آید، برابرند :

$$[۶\times(-۱۶)\times۱۰]+[(-۱۱)\times۱۲\times(-۱)]+[۵\times۴\times(-۹)]$$
$$=[۶\times(-۱۱)\times۵]+[(-۱۶)\times۱۲\times۴]+[۱۰\times(-۱)\times$$
$$\times(-۹)]=[۶\times۱۲\times(-۹)]+[(-۱۱)\times۴\times۱۰]+[۵\times$$

$$\times(-۱۶)\times(-۱)=[۵\times۱۲\times۱۰]+[(-۱۱)\times(-۱۶)\times$$
$$\times(-۹)]+[۶\times۴+(-۱)]=-۱۰۰۸$$

۳) اگر عددهای یك سطر یا یك ستون را با حرفهای a ، b و c نشان دهیم، علاوه بررابطهٔ $a+b+c=۰$ ، این رابطه‌ها هم‌بین آنها برقرار است (ثابت کنید) :

$$a^۲-bc=b^۲-ca=c^۲-ab \quad , \quad a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$$

C . ورودی به نظریهٔ مربعهای وفقی

۳۳۸ . مربع وفقی با شرطهای اضافی

$a, a', b, b', c, c', d, d', e, e', f, f', g, g', h, h'$ را عنصرهای یك مربع وفقی‌عادی مرتبهٔ چهارم فرض کنید (شکل را ببینید) ، ضمناً

$$a+a'=b+b'=c+c'=\ldots=h+h'=۱۷$$

چنین رابطه‌ای بین‌عددهای مربع ممکن است، زیرا شانزده عدد صحیحی که مربع را پرکرده‌اند، می‌توان به دوگروه هشت عددی ، طوری تقسیم کردکه مجموع هر عدد از گروه اول با یکی از عددهای گروه دوم ، مساوی ۱۷ شود. مثلا ۱ و ۱۶ ،۲ و ۱۵ ، ۳ و ۱۴ و غیره . این مسأله رادر نظر می‌گیریم :

a	h	e	c
g	b	d	f
e'	c'	a'	h'
d'	f'	g'	b'

مربوط به مسائل ۳۳۸

با تبدیل حرفها به عددها ، چند مربع وفقی مختلف می‌توان بدست‌آورد ، به‌نحوی که مجموع عددها در طول هرضلع ، هر ستون هر قطر ، در چهارگوشهٔ مربع اصلی ، در هر مربعی‌که ازچهار خانهٔ مجاور تشکیل شده‌است در چهارگوشهٔ هر مربعی‌که از ۹ خانهٔ مجاور تشکیل شده است ، مساوی مقدار ثابت مربع ، یعنی ۳۴ باشد .

دو مربع را وقتی متفاوت به حساب می‌آوریم که یکی از دیگری باجابه‌جاکردن سطر ها و ستونها و تبدیل سطرها به ستونها ، بدست نیاید .

بنابر شرط : $a+b+g+h=۳۴$. می‌توان ، بدون از دست دادن کلیت مسأله ، $a=۱$ فرض کرد ، در اینصورت $a'=۱۶$ می‌شود در چنین حالتی b ، g و h از ۱۶ کوچکترند . از آنجا ضمناً نتیجه می‌شود که هرکدام از آنها از۳ بزرگترند ، زیرا اگر مثلاً $b<۳$ باشد، باید g یا h از ۱۶ بزرگتر و یا مساوی ۱۶ باشد ،که ممکن نیست .

طبق شرط داریم : $a+b'+c+d'=۳۴$. با استدلالی شبیه قبل معلوم می‌شود که هرکدام از عددهای b' ، c و d' از۳ بزرگترند.اگر b مساوی ۱۴ یا ۱۵ باشد ، b' مساوی ۳ یا ۲ می‌شود که ممکن نیست . بنابراین باید داشته باشم: $۳<b<۱۴$.

بدون اینکه کلی بودن بحث از بین برود ، می‌توان فرض کرد $b\leqslant ۸$ ، زیرا اگر $b>۸$ باشد، $b'\leqslant ۸$ می‌شود که می‌توان جای آنرا با b عوض کرد . به این‌ترتیب کافی است که تنها مقادیر ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ و ۸ را برای b مورد بررسی قرار داد.

با فرض $h>g$ ، به کلی بودن بحث لطمه‌ای نمی‌خورد . حالا دیگر می‌توان همهٔ مقادیر ممکنه گروه عددهای (a , b , g و h) را شمرد :

(۱،۸،۱۰،۱۵)، (۱،۶،۱۳،۱۴)، (۱،۴،۱۴،۱۵)،
(۱،۸،۱۱،۱۴)، (۱،۷،۱۱،۱۵)، (۱،۵،۱۳،۱۵)،
(۱،۸،۱۲،۱۳)، (۱،۷،۱۲،۱۴)، (۱،۶،۱۲،۱۵)،

برای هرکدام از این ترکیبها ، می‌توان مقادیر ممکنه را برای c و d'

انتخاب کرد ، زیرا طبق فرض داریم : $a+b'+c+d'=۳۴$.

مثلاً ، اگر a,b,g,h رابه ترتیب مساوی ۱،۴،۱۴ و ۱۵ بگیریم (ترکیب اول) ، $b'=۱۳$ و $c+d'=۲۰$ می‌شود وبرای c و d' تنها مقادیر ۸ و ۱۲ یا ۱۲ و ۸ همچنین ۹ و ۱۱ یا ۱۱ و ۹ بدست می‌آید (مقادیر دیگری ممکن نیست ، زیرا عددها نباید تکرار شوند).

به همین ترتیب می‌توان همهٔ مقادیر ممکنه c و d' را در مورد سایر ترکیبهای a,b,g,h پیداکرد . این مقادیر را پیداکنید و در نتیجه همهٔ ترکیبهای ممکن را برای مقادیر a,b,g,h,b',c,d' بدست آورید. تعداداین ترکیبها خیلی زیاد نیست و رویهم ۲۴ حالت وجود دارد.

حالابرای هرکدام ازاین ۲۴ حالت، باید مقادیر f و f' راانتخاب کنیم . می‌توان از اینجا شروع کردکه مجموع عددهای واقع برچهار گوشهٔ هر مربعی که از ۹ خانهٔ مجاور تشکیل شده است ، باید برابر با مقدار ثابت مربع ، یعنی ۳۴ ، باشد :

$$b+f+b'+f'=۳۴$$

در انتخاب مقادیر f و f' باید به این نکته توجه داشت که از آنها باید بتوان بلافاصله مقادیرزوج بعدی e و e' رابه صورت یك‌جوابی، بدست آورد ، وقتی که روی ۲۴ حالت موجود آزمایش کنید ، معلوم می‌شود که در ۱۰ حالت آنها مقادیری برای f و f' پیدا نمی‌شود ، در ۴ حالت وقتی که سه عدد از یك سطریا ستون پیدا می‌شود ، نمی‌توان عدد چهارم را طوری قبول کردکه مجموع چهار عدد مساوی ۳۴ شود ، زیرا اگر مثلاً سه عدد(۱۳ ، ۱۰ ، ۱) یا (۱۵ ، ۹ ، ۱) بدست آید ، در حالت اول برای عدد چهارم ، ۱۰ و در حالت دوم ، ۹ پیدا می‌شود (تامجموعشان ۳۴ شود)که قابل قبول نیستند، زیرا درحالت اول، عدد ۱۰ و در حالت

دوم، عدد ۹ تکراری است. در ۷ حالت مربعهای متفاوت بدست نمی‌آید، یعنی مربعهای حاصل را می‌توان با جابه‌جاکردن سطرها و ستونها یا تغییر سطرها به ستونها، به یکدیگر تبدیل کرد، و تنها در ۳ حالت، تمام شرطهای مسأله جمع می‌شود.

۱	۱۵	۱۰	۸
۱۴	۴	۵	۱۱
۷	۹	۱۶	۲
۱۲	۶	۳	۱۳

۱	۱۵	۶	۱۲
۱۴	۴	۹	۷
۱۱	۵	۱۶	۲
۸	۱۰	۳	۱۳

۱	۱۵	۴	۱۴
۱۲	۶	۹	۷
۱۳	۳	۱۶	۲
۸	۱۰	۵	۱۱

مربوط به مسألهٔ ۳۳۸ . سه حالت ممکن ومختلف مربعهای وفقی

به‌این ترتیب، تنها سه‌نوع مربع وفقی مرتبهٔ چهارم، باشرطهای اضافی که قبلاً یادکردیم، وجود دارد و ما این سه مربع‌رادر شکل‌نشان داده‌ایم . سومین جوابی که بدست می‌آید، تنهادر جای سطرها وستونها بامربعی که در صفحهٔ ۳۴۳ دیدیم ، فرق دارد. همانطورکه به‌خاطردارید این‌مربع دارای خاصیتهای اضافی‌فراوانی است وتقریباً همهٔ این‌خاصیتها را ، دومربع دیگرهم دارند .

برای کسانی که با دترمینانها آشنائی دارند ، می‌توان خاصیت دیگری از این سه مربع وفقی را هم نام‌برد : اگر هرکدام ازاین مربعها را، به‌عنوان یك دترمینان مرتبهٔ چهارم درنظر بگیریم، چنین دترمینانی مساوی صفر خواهد بود. بعضی از مربعهای وفقی مرتبهٔ هشتم هم‌دارای این خاصیت هستند .

۳۳۹ . مربع وفقی منتظم مرتبهٔ چهارم

هر مربع وفقی مرتبهٔ چهارم را می‌توان به مجموع چهار مربع

طوری تبدیل کرد که در مربع اول تنها عدد ۱ ، در مربع دوم تنها عدد ۲ ، در مربع سوم تنها عدد ۴ و در مربع چهارم تنها عدد ۸ قرار گرفته باشد . در واقع ، عنصرهای یك مربع وفقی مرتبهٔ چهارم عبارتست از همه عددهای صحیح از ۱ تا ۱۶، واگر از آنها یك واحد کم کنیم ، مربع وفقی بدست می‌آوریم که عنصرهای آن عبارتست از همهٔ عددهای صحیح از ۰ تا ۱۵ .

همهٔ عددهای از ۱ تا ۱۵ را می‌توان به مجموعی از عددهای ۱ ، ۲ ، ۴ و ۸ تبدیل کرد ، به نحوی که در هریك از این مجموعها ، از هرکدام از این چهار عدد ، بیش از یکبار استفاده نشود :

۱=۱,	۶=۲+۴,	۱۱=۱+۲+۸,
۲=۲,	۷=۱+۲+۴,	۱۲=۴+۸,
۳=۱+۲,	۸=۸,	۱۳=۱+۴+۸,
۴=۴,	۹=۱+۸,	۱۴=۲+۴+۸,
۵=۱+۴,	۱۰=۲+۸,	۱۵=۱+۲+۴+۸

حالا ، چهار مربع شانزده خانه‌ای رسم می‌کنیم و یك مربع وفقی مرتبهٔ چهارم با عددهای ۰ تا ۱۵ را راهنمای خود قرار می‌دهیم . درمربع اول تنها عدد ۱ رادر خانه‌هایی که عدد آنها در تبدیل به مجموع شامل عدد ۱ می‌باشد ، قرار می‌دهیم ؛ در مربع دوم ، تنها عدد ۲ را در خانه‌هایی که عدد آنها شامل جملهٔ ۲ می‌باشد ؛ در مربع سوم ، تنها عدد ۴ را در خانه‌هایی که عددآنها شامل جملهٔ ۴ می‌باشد، و بالاخره در مربع چهارم تنهاعدد ۸ رادر خانه‌هایی که عددآنهاشامل جملهٔ ۸ می‌باشد، می‌نویسیم. به‌این ترتیب، توانسته‌ایم، مربع وفقی مرتبهٔ چهارم را به مجموع چهار مربع ، تجزیه کنیم .

مثلا، مربعی راکه درشکل صفحهٔ ۳۶۶ قرار گرفته‌است(مربع بالا)، به‌مجموع چهار مربعی که درهمان شکل داده شده است، تجزیه کرده‌ایم.

همچنین مربع وفقی صفحهٔ ۳۶۷ (مربع بالا) هم به مجموع چهار مربع تجزیه شده است.

مربع وفقی مرتبهٔ چهارم را منتظم گویند، وقتی که هرکدام از

۹	۱۴	۲	۵
۱۵	۴	۸	۳
۰	۱۱	۷	۱۲
۶	۱	۱۳	۱۰

۱			۱
۱			۱
	۱	۱	
	۱	۱	

	۲	۲	
۲			۲
	۲	۲	
۲			۲

	۴		۴
۴	۴		
		۴	۴
۴		۴	

۸	۸		
۸		۸	
	۸		۸
		۸	۸

مربوط به مسألهٔ ۳۳۹، مربع وفقی منتظم ومربعهای تشکیل دهندهٔ آن

چهار مربع تشکیل دهندهٔ آن ، مربعهایی وفقی باشند . به‌این ترتیب ، مربع وفقی که درشکل اول(صفحهٔ۳۶۶) داده شده است، منتظم است ،در حالی که مربع وفقی شکل دوم (درهمین صفحه) منتظم نیست(مجموع عددها،در

۱۱	۱۵	۴	۰
۶	۲	۱۳	۹
۱	۵	۱۰	۱۴
۱۲	۸	۳	۷

۲	۲		
۲	۲		
		۲	۲
		۲	۲

۱	۱		
		۱	۱
۱	۱		
		۱	۱

۸	۸		
		۸	۸
۸	۸		
		۸	۸

	۴	۴	
۴			۴
	۴	۴	
۴			۴

مربوط به مسألهٔ ۳۳۹ . مربع وفقی نامنتظم وچهار مربع تشکیل دهندهٔ آن

طول قطرهای دو تا از این مربعها ، مساوی مجموع عددهای هرسطر یا یاهرستون نیست).

ساده‌ترین مربعهای وفقی ،که درخانه‌های آنها ، تنها از دو عدد استفاده شده باشد ، هشت نوع‌اند (شکل پائین‌این‌صفحه را ببینید) .

اگر این هشت مربع را چهار به چهار بـا هم جمـع کنیم ، همـهٔ

a	a	a'	a'
a'	a'	a	a
a	a	a'	a'
a'	a'	a	a

β	β'	β	β'
β	β'	β	β'
β'	β	β'	β
β'	β	β'	β

c	c'	c	c'
c'	c	c'	c
c'	c	c'	c
c	c'	c	c'

d	d'	d'	d
d'	d	d	d'
d	d'	d'	d
d'	d	d	d'

e	e	e'	e'
e'	e'	e	e
e'	e'	e	e
e	e	e'	e'

f	f'	f'	f
f	f'	f'	f
f'	f	f	f'
f'	f	f	f'

g	g	g'	g'
g	g'	g	g'
g'	g	g'	g
g'	g'	g	g

h	h'	h	h'
h'	h'	h	h
h	h	h'	h'
h'	h	h'	h

مربوط به مسالهٔ ۳۳۹ . مربعهای وفقی با دوعدد

انواع مختلف مربعهای وفقی منتظم مرتبهٔ چهارم بدست می‌آید . بین این‌مربعهای وفقی منتظم ، تنهایازده مربع وجود داردکه همهٔ عددهای آنها باهم فرق دارند.

اگراین هشت مربع را به‌ترتیب باحرفهای A،B،C،D،E،F،G و H نشان دهیم، یازده مربع وفقی منتظمی‌که بدست می‌آید، عبارتست از :

A+B+C+D,	B+C+D+F,
A+B+C+E,	B+C+E+F,
A+B+D+F,	C+D+E+F,
A+B+E+F,	C+E+G+H,
A+C+D+F,	D+F+G+H,
A+D+E+F,	

درهرکدام ازاین یازده مربع، بایدبه‌جای‌حرفهای a و a′، b و b′، c و c′ وغیره، به‌ترتیبی،چهارزوج عددهای ۰و۱، ۰و۲، ۰و۴، ۰و۸ را قرارداد .

به‌عنوان نمونه، مربع C+E+G+H را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

c=۰, e=۴, g=۸, h=۰

c′=۲, e′=۰, g′=۰, h=۱

دراینصورت، مربع وفقی بدست می‌آیدکه درشکل مجاورنشان داده شده‌است.

۱۲	۱۵	۰	۳
۱۱	۱	۱۴	۴
۲	۸	۷	۱۳
۵	۶	۹	۱۰

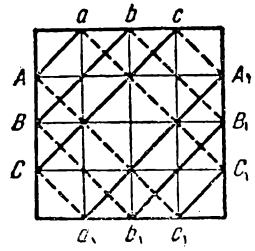
مربوط به مسألهٔ ۳۳۹

ازآنجا که چهارزوج عدد را به۲۴طریق می‌توان انتخاب کرد ، وعددهای هرزوج هم به‌دو طریق قابل انتخاب است، تعداد همهٔ مربعهای وفقی‌منتظم، رویهم مساوی ۲۴×۱۶×۱۱،

یعنی ۴۲۲۴ می‌شود . واگر این موضوع را به‌حساب آوریم که از هر مربع وفقی ، می‌توان ۸ مربع‌وفقی، باچرخاندن مربع اول بدست‌آورد، تعداد کل مربعهای وفقی منتظم ومختلف مساوی ۸:۴۲۲۴، یعنی ۵۲۸ می‌شود .

۳۴۰. مربعهای وفقی «اهریمنی» ومربعهای وفقی دیگر

یك مربع وفقی‌را «اهریمنی» یا فوق وفقی‌گویند، وقتی‌که‌نه‌تنها درطول هرسطر، هرستون وهرقطراصلی، بلکه حتی درطول به‌اصطلاح قطرهای شکسته هم ، مجموعهای مساوی داشته باشد . قطرهای شکستهٔ مربع مرتبهٔ چهارم در شکل مجاورنشان داده شده‌است. هرقطرشکسته عبارتست ازیك زوج پاره‌خط موازی :



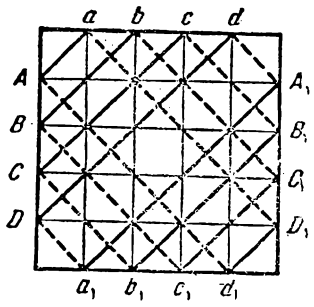
مربوط به مسألهٔ ۳۴۰

$$Aa\text{و}a_1A_1;\ Bb\text{و}b_1B_1;\ Cc\text{و}c_1C_1;$$
$$cA_1\text{و}Ac_1;\ bB_1\text{و}Bb_1;\ aC_1\text{و}Ca_1$$

پاره‌خطهای هرقطر شکسته ، دردوطرف قطراصلی قراردارند ودرمجموع، از n خانه می‌گذرند (n ،مرتبهٔ‌مربع وفقی‌است). درمربع مرتبهٔ چهارم، ۶ قطرشکسته‌ودرمربع مرتبهٔ پنجم، ۸ قطرشکسته وجود دارد(شکل‌صفحهٔ ۳۷۱رابببینید) وغیره .

آیا مربع فوق وفقی وجود دارد ؟ شرطهای چنین مربعی خیلی زیاد است وطبیعی است که با زیاد شدن شرطها ، تشکیل چنین مربعی دشوارتر می‌شود .

چون تعداد کل مربعهای وفقی مرتبهٔ سوم مساوی ۸ است ،



مربوط به مسلهٔ ۳۴۰

می‌توان به سادگی و به‌طور مستقیم متوجه شد که در بین آنها، مربع فوق وفقی وجود ندارد . همچنین ریاضیدانها به طور قطع ثابت کرده‌اند که برای حالت $n=4k+2$. یعنی برای مربعهای مرتبهٔ ششم، مرتبهٔ دهم و غیره، ساختن مربعهای فوق وفقی ، ممکن نیست .

برای بقیهٔ مقادیر n ، می‌توان مربعهای فوق وفقی را تشکیل داد . حتی رابطه‌ای پیدا شده است که به کمک آن می‌توان خانه‌ای از مربع مرتبهٔ n (به استثنای $n=3$ و $n=4k+2$) را پیدا کرد که باید عدد مفروض را در آن قرار داد .

جای هر خانهٔ مربع را با دو عدد (x,y) معین می‌کنیم . عدد اول یعنی x ، نمایندهٔ شمارهٔ ستون و عدد دوم ، یعنی y ، نمایندهٔ شمارهٔ سطر است . ضمناً ستونها و سطرها را از ۰ تا $n-1$ به حساب می‌آوریم . عدد ۱ را می‌توان در هر خانهٔ دلخواه (x_1, y_1) قرارداد . در اینصورت نشانی (x,y) هرعدد z ، از دنباله ۱ ، ۲ ، ... ، n^2 به کمک رابطه‌های زیر بدست می‌آید :

$$x \equiv x_1 + \alpha (z-1) + \gamma \left[\frac{z-1}{n}\right] \quad (\text{نسبت به مدول } n)$$

$$y \equiv y_1 + \beta (z-1) + \delta \left[\frac{z-1}{n}\right] \quad (\text{نسبت به مدول } n)$$

علامت «$\equiv$» ، همراه با عبارت «نسبت به مدول n » ، به معنای آنست که x و y برابرند با باقیماندهٔ تقسیم نتیجه عملهای طرف دوم بر

n ، که در آن n عبارتست از مرتبهٔ مربع فوق وفقی که می‌خواهیم تشکیل بدهیم . علامت [ ] به این معناست که از عدد داخل آن (عددی که بعداز تقسیم $z-1$ بر n بدست می‌آید) باید تنها قسمت صحیح آنرا انتخاب کرد و از قسمت کسری آن صرفنظر کرد. عددهای α، β، γ و δ را می‌توان به دلخواه انتخاب کرد ، ولی با این شرط که عدد n با هیچکدام از هفت عدد زیر ، مقسوم‌علیه مشترکی نداشته باشد :

$$\alpha,\beta,\alpha\delta-\beta\gamma,\alpha+\beta,\alpha-\beta,\gamma+\delta,\gamma-\delta$$

اثبات شرط لازم وکافی این رابطه‌ها را د. لهمر ، ریاضیدان امریکایی ، درسال ۱۹۲۹ داده است .

با استفاده از رابطه‌های لهمر ، مربع فوق وفقی مرتبهٔ پنجم را تشکیل می‌دهیم .

فرض کنیده $x_1=$ و $y_1=$ ه. یعنی تصمیم گرفته‌ایم که عدد ۱ رادر خانه‌های که درگوشهٔ چپ و بالای مربع قرارگرفته است ، بگذاریم . سپس فرض می‌کنیم : $\alpha=۴$ ، $\beta=۲$، $\gamma=۳$ و $\delta=۱$ دراینصورت

$$\alpha\delta-\beta\gamma=-۲, \qquad \alpha+\beta=۶,$$

$$\alpha-\beta=۲, \qquad \gamma+\delta=۴, \qquad \gamma-\delta=۲$$

شرط لهمر برقرار است ، یعنی هیچک از عددهای ۴ ، ۲ ، ۲ - و ۶ با عدد $n=۵$ ، مقوم‌علیه مشترکی ندارند.

رابطه‌های لهمر در این حالت ، به این صورت درمی‌آیند:

$$x\equiv ۴(z-۱)+۳\left[\frac{z-۱}{۵}\right] \quad (\text{نسبت به مدول } ۵)$$

$$y \equiv ۲(z-۱) + \left[\frac{z-۱}{۵}\right] \quad (\text{نسبت به مدول } ۵)$$

خانه‌هایی را پیدا می‌کنیم که باید در آنها، عددهای ۲ ، ۳ ،...، ۲۵ راقرارداد. وقتی‌که z مساوی یکی‌ازعددهای ۲،۳،۴ و ۵ باشد ،مقدار کروشه مساوی صفر می‌شود (به‌خاطر بیاورید‌که باید تنها مقدارصحیح داخل‌کروشه را انتخاب‌کنیم) ؛ وقتی‌که z مساوی یکی از عددهای۶ ، ۷ ، ۸، ۹، و ۱۰ باشد ، مقدارکروشه مساوی ۱ می‌شود و غیره . دراین صورت اگر $z=۲$ یاشد ، $x=۴$ و $y=۲$ بدست‌می‌آید . بنابراین جای عدد ۲ در خانهٔ (۴،۲) است . اگر $z=۳$ باشد :

$z \equiv ۸$ (نسبت به مدول ۵)

$y \equiv ۴$ (نسبت به مدول ۵)

یعنی $x=۳$ و $y=۴$.بنابراین جای عدد ۳ درخانهٔ (۳،۴) است. برای $z=۴$ داریم :

$x \equiv ۱۲$ (نسبت به‌مدول ۵)

$y \equiv ۶$ (نسبت به‌مدول ۵)

یا $x=۲$ و $y=۱$. بنابراین جای عدد ۴ در خانهٔ (۲،۱) است . برای $z=۵$ داریم :

$x \equiv ۱۶$ (نسبت به‌مدول۵)

$y \equiv ۸$ (نسبت به‌مدول۵)

بنابراین ، جای عدد ۵ درخانه (۱،۳) است . برای$z=۶$ داریم:

$z=۲۳$ (نسبت به‌مدول۵)

$y=۱۱$ (نسبت به‌مدول ۵)

و جای عدد ۶ در خانهٔ (۳،۱) است و به همین ترتیب ، برای بقیهٔ عددها . باقرار دادن عددها به‌جای خود ،مربع‌فوق وفقی مرتبهٔ‌پنجم بدست می‌آید(شکل‌راببینید). امتحان‌کنید: بایدمقدارثابت $S=۶۵$ در ۲۰ حالت برای این مربع برقرار باشد (۵ سطر، ۵ ستون، دو قطر کامل و ۸قطر شکسته).

	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۱	۸	۱۵	۱۷	۲۴
۱	۲۰	۲۲	۴	۶	۱۳
۲	۹	۱۱	۱۸	۲۵	۲
۳	۲۳	۵	۷	۱۴	۱۶
۴	۱۲	۱۹	۲۱	۳	۱۰

مربوط به‌مسالهٔ ۳۴۰ .مربع فوق‌وفقی مرتبهٔ پنجم

حالا، به مسألهٔ ۳۲۸ (صفحهٔ۳۳۵) برمی‌گردیم.

آیا متوجه نشدید که چگونه می‌توان مربع فوق وفقی راکه‌بدست آورده‌اید ، به «سیاره‌نمای بزرگی» کـه دربارهٔآن درپایان مسألـهٔ ۳۲۸ گفتگوکردیم،تبدیل‌کرد؟ و «راز» تشکیل و حل مسألهٔ مربوط به «سیاره نماها» هم همین است.

د. لهمر ثابت کرد که اگر شرطهای مربوطبه انتخاب مقادیر α ، β، γ و δ را به سه شرط تقلیل دهیم: n با هیچیك از عددهای α ، β و $\alpha\delta-\beta\gamma$ مقسوم علیه مشترك نداشته باشد،دراین صورت‌ازهمین‌رابطه‌ها می‌توان‌مربعهای وفقی (ونه‌فوق وفقی) ،ازهرمرتبهٔn ،به‌جز $n=۴k+۲$ بدست‌آورد .

با رابطه های لهمر ، برای تشکیل مربعهای وفقی و فوق وفقی از مرتبه‌های مختلف تمرین‌کنید.

مربعهای وفقی‌دیگر. اگرشما بتوانیدیك مربع‌وفقی(ولومربع‌وفقی

غیرعـادی) درست کنید که با تبدیل عددهای آن بـه مجذورهای آنها (مکعبهای آنها و غیره)، مربع وفقی تـازه‌ای بدست آیـد، دراینصورت شما توانسته‌اید مربع دو وفقی (سه‌وفقی وغیره) تشکیل دهید.

اگر شما بتوانید عددهای متوالی را به ترتیب درخانه‌های‌مربع، با حرکت متوالی اسب (دربازی شطرنج) قرار دهید، به‌نحوی‌کـه مربع حاصل یك مربع وفقی باشد، به این معناست‌که مربع وفقی اسبی تشکیل داده‌اید. ولی برای‌تشکیل مربع وفقی‌اسبی، روی مربعهای با مرتبهٔ‌کمتر ازهشت و مربعهایی‌که مرتبهٔ‌آنها مضربی از چهار است،آزمایش‌نکنید.

۳۴۱. انتخاب عدد، برای مربع وفقی با مرتبهٔ دلخواه

مربعی‌که از n^2 خانه‌تشکیل شده (n عددصحیح دلخواهی‌است)، داده شده است. می‌خواهیم‌همهٔ خانه‌های این مربع را باعددهای صحیح، طوری پرکنیم‌که مجموع‌آنها درهرسطر، هرستون و هرقطر، مساوی‌عدد مفروض S باشد (S، مقدار ثابت‌مربع‌است). به عبارت دیگر، بایدمربع وفقی تشکیل‌داد،کـه لزومی ندارد عـادی باشد، یعنی لازم نیست‌که از عددهای‌متوالی اولیه تشکیل‌شده باشد. به‌این ترتیب، می‌توانیم‌خانه‌های مربع را باهرعدد صحیحی،که‌می‌تواند منفی یا تکراری هم باشد،پرکنیم (ولی البته هر n^2 عدد نباید مساوی‌باشند).

می‌توان ثابت‌کردکه با این‌آزادی درانتخاب عـددها، مسألهٔ مـا بسیار ساده می‌شود. آزمایش‌کنید، خواهید دید که شما هم می‌توانید در این مورد موفق شوید. پیشنهاد می‌کنیم که‌حتماً برای تشکیل لااقل‌مربع مرتبهٔ پنجم از عددهای دلخواه وبا مقدارثابت مفروض،خود را امتحان

کنید و بعد ، مطالعهٔ این‌بخش را ادامه دهید.

پیش از آنکه به حالت کلی بپردازیم، دربارهٔ مربعهای مرتبهٔ‌سوم و مرتبهٔ چهارم گفتگو می‌کنیم. بررسی را به‌کمك جبر ادامه می‌دهیم.

مربع مرتبهٔ سوم. همهٔ عددهای‌مجهول را با حرف a همراه بادوعدد به‌صورت اندیس آن، نشان می‌دهیم (شکل را ببینید). عدد اول اندیس، نمایندهٔ سطری است که a درآن گرفته‌است، وعدد دوم، نمایندهٔ‌ستون آن.

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

چون‌بنابرفرض، این‌یك مربع وفقی‌است، مربوط به‌مسالهٔ ۳۴۱ ۸ معادله‌بدست می‌آید: ۶معادله برای مجموع‌عددها درهرسطروهرستون و ۲ معادله برای مجموع عددها، درهرقطر. ولی، به سادگی می‌توان روشن‌کردکه در واقع ، بیش از ۶ معادله نداریم (۲ معادلهٔ ، نتیجه‌ای از ۶ معادلهٔ دیگر است). در واقع، می‌دانیم‌که $a_{22}=\frac{S}{3}$ ، که درآن S عبارتست از مقدار ثابت مربع (صفحه‌های ۳۵۷ و ۳۵۸ را ببینید) ، دراین صورت، دستگاه معادله‌های زیر بدست می‌آید:

$$a_{11}+a_{12}+a_{13}=S, \qquad (1)$$

$$a_{31}+a_{32}+a_{33}=S, \qquad (2)$$

$$a_{11}+a_{21}+a_{31}=S, \qquad (3)$$

$$a_{13}+a_{23}+a_{33}=S, \qquad (4)$$

$$a_{21}+a_{23}=\frac{2}{3}S, \qquad (5)$$

$$a_{12}+a_{32}=\frac{2}{3}S, \qquad (6)$$

$$a_{11}+a_{33}=\frac{2}{3}S, \qquad (۷)$$

$$a_{13}+a_{31}=\frac{2}{3}S \qquad (۸)$$

اگر معادله‌های (۶) و (۷) و (۸) را باهم جمع و معادلهٔ (۲) را ازحاصلجمع، کم کنیم، معادلهٔ(۱) بدست‌می‌آید. این‌مطلب به‌معنای آنست که‌معادلهٔ(۱) معادله‌ای مستقل‌نیست‌وبه‌عبارت دیگر،معادلهٔ(۱)نتیجه‌ای از سایر معادله‌هاست. اگـرمعادله‌های (۵) ، (۷) و (۸) را باهـم جمع کنیم و از نتیجه، معادلهٔ (۳) راکم‌کنیم ، معادلهٔ (۴) بدست می‌آید. از اینجا نتیجه می‌شودکه معادلهٔ (۴) هم نتیجه‌ای ازبقیهٔ معادلـه‌هاست . باحذف این‌دومعادله،به‌دستگاهی با ۶معادله و ۸ مجهول می‌رسیم. حالا باید ثابت‌کنیم که این ۶ معادله، یعنی معادله‌های (۲) ، (۳) ، (۵)، (۶) (۷) و (۸) ، مستقل از یکدیگرند. برای این منظور باید ۶ مجهول از ۸ مجهول‌راانتخاب‌کردوهرکدام ازآنهارابرحسب دومجهول دیگر و مقدار ثابت S پیداکرد. اگر این‌کار ممکن‌باشد، به معنای آنست که‌معادله‌های دستگاه، مستقل از یکدیگرند. خودتان در این مورد عمل‌کنید و دستگاه معادله‌های (۲)، (۳) ، (۵) ، (۶) ، (۷) و (۸) را ، نسبت بـه مجهولهای a_{11} ، a_{12} ، a_{13} ، a_{21} ، a_{23} و a_{32} ، حل کنید.

$k+x$	$k-x-y$	$k+y$
$k-x+y$	k	$k+x-y$
$k-y$	$k+x+y$	$k-x$

مربوط‌به‌مسألهٔ ۳۴۱. رابطهٔ مربع وفقی مرتبهٔ سوم

به این ترتیب، از ۸ معادله با ۹ مجهـول، شش معادلـهٔ مستقل پیدا می‌شود، و ایـن به‌ما امکان می‌دهدکـه سه مجهول را بـه دلخواه انتخاب کنیم.

با توجه به اینکه $a_{۲۲}=\frac{S}{۳}$ ، فرض می‌کنیم :

$$a_{۲۲}=k$$

عددهای $a_{۱۱}$ و $a_{۱۳}$ را به‌ترتیب مساوی $k+x$ و $k+y$ می‌گیریم (k و x و y ، عددهای دلخواهند) :

$$a_{۱۱}=k+x \text{ و } a_{۲۲}=k \text{ و } a_{۱۳}=k+y$$

دراینصورت جواب مسأله، به‌صورتی که درشکل صفحهٔ ۳۷۷ داده شده است، بدست می‌آید. اگر x را به $-x$، یا y را به $-y$، یا x را به y و y را به x تبدیل کنیم، به‌همین عددها می‌رسیم، که ممکن است نسبت به حالت قبل، باتبدیل سطرها به ستونها یا نوع دیگری از تبدیل بدست آمده باشد. بنابراین می‌توان فرض کرد:

$$x \geqslant y$$

که درآن x و y ،عددهایی‌مثبت‌اند. کوچکترین عدد، دراین‌مربع مساوی $k-x-y$ و بزرگترین آنها $k+x+y$ است. با توجه به این موضوع، می‌توان مربع وفقی عادی را درست کرد. برای این منظور، کوچکترین عدد را ۱ وبزرگترین‌را۹ می‌گیریم:

$$k-x-y=۱$$
$$k+x+y=۹$$

علاوه برآن می‌دانیم:

$$k=\frac{S}{۳}=\frac{۱۵}{۳}=۵$$

از آنجا بدست می‌آید :

$$x=۳ \text{ و } y=۱$$

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

و تنها وضع استقرار عددها را (با تقریب استقرار سطرهاوستونها) ، برای مربع وفقی عادی ، بدست می‌آوریم (شکل مجاور را ببینید).

مربع مرتبهٔ چهارم . برای پیداکردن شانزده عددی که به کمك آنها بتوان یك مربع وفقی مرتبهٔ چهارم تشکیل داد، تنها ۸ معادلهٔ مستقل وجود دارد (شکل را ببینید).

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

اگر بتوان ۸ مجهول را انتخاب کرد و به آنها عددهای دلخواهی نسبت‌داد، می‌توان بقیهٔ ۸ مجهول را به‌کمك دستگاه معادله‌ها، بدست آورد .

یادآوری این مطلب خوب است که در هرمربع وفقی مرتبهٔ چهارم، مجموع چهار عدد مرکزی، برابر بامجموع هرردیف، یعنی مقدار ثابت S است:

$$a_{22}+a_{23}+a_{32}+a_{33}=S$$

اثبات این خاصیت جالب مربع وفقی مرتبهٔ چهارم را می‌توانید خودتان به سادگی بدست آورید.

در سال ۱۸۸۴ ، پروفسور د.پ.یوماکوف در «مجلهٔ ریاضیات مقدماتی»، رابطه‌ای می‌دهدکه می‌توان آنرا به‌صورت مجموع دومربع وفقی نشان داد (شکل صفحهٔ ۳۸۰ را ببینید).

با انتخاب ۸ عدد به دلخواه

$$A,B,C,D,a,b,c,d$$

و جمع دومربع با هم (یعنی اگر دومربع را رویهم قرار دهیم ، عددهای هردوخانه‌ای راکه رویهم قرار گرفته است باهم جمع کنیم)،مربع وفقی مورد نظر بدست می‌آید:

A	C	D	B
D	B	A	C
B	D	C	A
C	A	B	D

+

	a+b	-a-b	
c-d	-a-c	a-c	c+d
-c+d	-a+c	a+c	-c-d
	a-b	-a+b	

مربوط بهٔ مسألهٔ ۳۴۱. رابطهٔ یرماکوف

دراین‌باره‌که این ۸ عدد را چگونه باید انتخاب‌کرد تـا درمربعی که بدست می‌آید، همهٔ عددهای صحیح از ۱ تا ۱۶ قرارگرفته‌باشد(یعنی یك مربع وفقی عـادی پیدا شود) ، یرماکـوف می‌نویسد: «مـا برای این پرسش جواب ساده‌ای نداریم و به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم کـه خودش آنها را پیدا کند».

اگر ۸ عدد دلخواه A، B، C، D، a، b، c، d را به ایـن ترتیب انتخاب کنیم:

$$a_{۳۲}=A,\ a_{۲۲}=B,\ a_{۲۳}=C,\ a_{۳۳}=D,\ a_{۱۱}=A-a,$$
$$A_{۱۲}=C+a+c,\ A_{۱۳}=B+b-c,\ a_{۲۱}=D+a-d$$

پیدا کردن ۸ عدد دیگر دشوار نیست و در نتیجه برای مربع وفقی مرتبهٔ چهارم به رابطه‌ای می‌رسیم که درشکل مجاور نشان داده‌ایم (این رابطه را برگولتس در سال ۱۹۱۰ پیدا کرد).

$A-a$	$C+a+c$	$B+b-c$	$D-b$
$D+a-d$	B	C	$A-a+d$
$C-b+d$	A	D	$B+b-d$
$B+b$	$D-a-c$	$A-b+c$	$C+a$

مربوط به مسألهٔ ۳۴۰. رابطهٔ مربع وفقی مرتبهٔ چهارم.

ساده‌ترین رابطه، برای تشکیل مربع وفقی مرتبهٔ چهارم به وسیلهٔ یودی ستاسویچ، کارگر ساختمانی از شهر آلچوسك داده شده است.

این رابطه را در شکل مجاور می‌بینید. x، y، z و t راهرمقدار دلخواه بگیرید، یك مربع وفقی مرتبهٔ‌چهارم با مقدار ثابت $S=x+y+z+t$ بدست می‌آورید. با رابطهٔ ستاسویچ می‌توان مربع وفقی عادی‌هم بدست آورد. برای این منظور باید فرض کرد :

$۲z-y$	$y+t-x$	$y+t-z$	$۲x-t$
$x+y-z$	x	z	$z+t-x$
$x+y-t$	y	t	$z+t-y$
$۲t-x$	$x+z-y$	$x+z-t$	$۲y-z$

مربوط به‌مسألهٔ ۳۴۱. رابطهٔ ستاسویچ

$$x=۷ \quad و \quad y=۱۱ \quad و \quad z=۶ \quad و \quad t=۱۰$$

خودتان بررسی کنید که آیا بنابر رابطهٔ ستاسویچ می‌توانید برای تشکیل مربع وفقی عادی، عددهای دیگری برای x، y، z، t انتخاب کنید .

مربع‌مرتبهٔ n ($n > ۴$). عددهایی که‌مربع‌مرتبهٔ n ام راپرمی‌کنند، می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$a_{۱۱}, a_{۱۲}, \cdots, a_{۱,p-۱}, a_{۱p}, a_{۱,p+۱}, \cdots, a_{۱,n-۱}, a_{۱n},$$

$$a_{۲۱}, a_{۲۲}, \cdots, a_{۲,p-۱}, a_{۲p}, a_{۲,p+۱}, \cdots, a_{۲,n-۱}, a_{۲n},$$

$$a_{۳۱}, a_{۳۲}, \cdots, a_{۳,p-۱}, a_{۳p}, a_{۳,p+۱}, \cdots, a_{۳,n-۱}, a_{۳n},$$

.....

.....

$$a_{n-۱,۱}\ a_{n-۱,۲}, \cdots, a_{n-۱,p-۱}, a_{n-۱,p}, a_{n-۱,p+۱}, \cdots,$$

$$a_{n-۱,n-۱}, a_{n-۱,n},$$

$$a_{n۱}, a_{n۲}, \cdots\ a_{n,p-۱}, a_{n,p}, a_{n,p+۱}, \cdots, a_{n,n-۱}, a_{n,n}$$

در اینجا $n^۲$ عدد داریم کـــه می‌توانند هرمقدار جبری دلخواه باشند، منتهی مجموع آنها در طول هرسطر، هرستون و هریـك از دو قطر باید مساوی مقدار ثابت دلخواه S ،که‌خودتان انتخاب می‌کنید، باشد.

بنا به شرط، برای $n^۲$ مجهول، $۲n+۲$ رابطهٔ خطی داریم ، که از آنها $۲n$ رابطـه ، مستقل ازیکدیگـرند. و این به معنای آنست‌کـــه $n^۲-۲n$ ازمقادیر a را می‌توان به دلخواه انتخاب کـــرد. مطلب برسر اینست‌که چه مقادیری از a را باید مقدار ثابت‌گـرفت ، تا اینکه بتوان درهمهٔ حالتها، مقادیری‌که برای $۲n$ مجهول باقیماندهٔ a بدست‌می‌آید، سازگار با شرطهای یك مربع وفقی باشد.

مقادیری را که باید به دلخواه انتخاب کنیم،با همان حرف a و اندیسهای مربوط نشان می‌دهیم و برای بقیهٔ مجهولهااز حرفهـای $b_۱$ ،

b_{2n} ، b_{2n-1}،...،b_2 استفاده می‌کنیم و آنها را در خانه‌های مربع، به صورت زیر قرار می‌دهیم:

a_{11}, a_{12}, a_{13},..., $a_{1,p-1}$, a_{1p}, $a_{1,p+1}$,..., $a_{1,n-2}$,

$a_{1,n-1}$, $a_{1,n}$,

a_{21}, a_{22}, a_{23},..., $a_{2,p-1}$, a_{1p}, $a_{2,p+1}$,..., $a_{2,n-2}$,

$a_{2,n-1}$, b_1,

a_{31}, a_{32}, a_{33},..., $a_{3,p-1}$, a_{3p}, $a_{3,p+1}$,...,

$a_{3,n-2}$, $a_{3,n-1}$, b_2,

.....

$a_{n-2,1}$, $a_{n-2,2}$, $a_{n-2,3}$,..., $a_{n-2,p-1}$, $a_{n-2,p}$,

$a_{n-2,p+1}$,..., $a_{n-2,n-2}$, $a_{u-2,n-1}$, b_{n-3},

b_{2n-2}, $a_{n-1,2}$, $a_{n-1,3}$,..., $a_{n-1,p-1}$, b_{2n-1},

$a_{n-1,p+1}$,..., $a_{n-1,n-2}$, $a_{n-1,n-1}$, b_{n-1},

b_{2n-3}, b_{2n-4}, b_{2n-5},..., b_{2n-p-1}, b_{2n}, b_{2n-p-2},...,

b_{n+1}, b_n, b_{n-2}

R_i را مجموع عددهای a در ردیف i ام وضمناً $R_1=S$ و C_iرامجموع عددهای a در ستون i ام می‌گیریم. مجموع‌عددهای a درطول دو قطر را هم D_1 و D_2 فرض می‌کنیم:

$$D_1=a_{11}+a_{22}+a_{33}+\dots+a_{n-1,n-1}$$

$$D_2=a_{1,n}+a_{2,n1}-+a_{3,n-2}+\dots+a_{n-1,2}$$

مجموع همهٔ عددهای a را ، که درمربع وجوددارد، به S نشان‌می‌دهیم. اگرمقادیر a رامعلوم‌فرض‌کنیم ، می‌توانیم مقادیر b را به‌ترتیب‌به‌کمك تساویهای زیر بدست آوریم:

$$
\left.
\begin{aligned}
b_1 &= R_1 - R_2 \\
b_2 &= R_1 - R_3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{n-3} &= R_1 - R_{n-2}, \\
b_{n-2} &= R_1 - D_1, \\
b_{n-1} &= R_1 - C_n - (b_1 + b_2 + \ldots + \\
&\qquad b_{n-3} + b_{n-2}), \\
b_n &= R_1 - C_{n-1}, \\
b_{n+1} &= R_1 - C_{n-2}, \\
b_{2n-p-2} &= R_1 - C_{p+1}, \\
b_{2n-p-1} &= R_1 - C_{p-1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{2n-4} &= R_1 - C_2, \\
b_{2n-3} &= R_1 - D_2, \\
b_{2n-2} &= R_1 - C_1 - b_{2n-3}, \\
b_{2n-1} &= R_1 - R_{n-1} - b_{n-1} - b_{2n-2}, \\
b_{2n} &= R_1 - C_p - b_{2n-1}
\end{aligned}
\right\} \quad (1)
$$

متذکرمی‌شویم‌که b_{2n-1} ، خانه‌ای ازسطر $(n-1)$ ام راگرفته

است، ولی دراین و یا آن قطر، شرکت ندارد وچنین وضعی برای‌حالت $n\leqslant ۴$ ، ممکن نیست. بنابراین، طرح مذکور برای این حالتها صادق نیست، ولی ما این حالتها را به‌طور جداگانه بررسی کرده‌ایم.

همهٔ مقادیر b ، که در سطر آخر قرارگرفته‌اند، بدون ارتباط با یکدیگر پیدا می‌شوند، بنابراین باید آزمایش کردکه آیا مجموع آنها

$$b_{n-۲}+b_n+b_{n+۱}+\ldots+b_{۲n-۳}+b_{۲n} \qquad (۲)$$

مساوی S ، مقدار ثابت مربع،که همان $R_۱$ است، می‌شودیا نه . برای این منظور، رابطه‌های متناظر را از تساویهای(۱) انتخاب‌می‌کنیم و به بعضی ازآنها قبلا تغییراتی می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
b_{n-۱}&=R_۱-C_n-(b_۱+b_۲+\ldots+b_{n-۲}+b_{n-۲})=\\
&=R_۱-C_n-(R_۱-R_۲+R_۱-R_۳+\ldots+R_۱-\\
&\qquad -R_{n-۲}+R_۱-D_۱)=\\
&=R_۱-C_n-R_۱+R_۲-R_۱+R_۳-\ldots-R_۱+\\
&\qquad +R_{n-۲}-R_۱+D_۱=\\
&=D_۱-C_n+(R_۱+R_۲+\ldots+R_{n-۲})-\\
&\qquad -\underbrace{(R_۱+R_۱+\ldots+R_۱)}_{(n-۲)\text{ مرتبه}}
\end{aligned}$$

با توجه به مقادیر R_i و $\bar{S}$ و توجه به این نکته کـه مقادیر a در همهٔ سطرها، به جز سطر آخر، قرار گرفته است، داریم:

$$R_۱+R_۲+\ldots+R_{n-۲}-\bar{S}-R_{n-۱}$$

بنابراین:

$$b_{n-1}=D_1-C_n+\bar{s}-R_{n-1}-(n-2)R_1'$$

.....

$$b_{2n-2}=R_1-C_1-b_{2n-3}=R_1-C_1-(R_1-D_2)=D_2-C_1,$$

$$\begin{aligned}b_{2n-1}&=R_1-R_{n-1}-b_{n-1}-b_{2n-2}=R_1-R_{n-1}-\\&-[D_1-C_n+\bar{s}-R_{n-1}-(n-2)R_1]-(D_2-C_1)\\&=(n-1)R_1+C_1+C_n-D_1-D_2=\bar{s},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{2n}&=R_1-C_p-b_{2n-1}=\\&=R_1-C_p-(n-1)R_1-C_1-C_n+D_1+D_2+\bar{s}=\\&=D_1+D_2-C_1-C_p-C_n-(n-2)R_1+\bar{s}\end{aligned}$$

مقادیری راکه پیداکرده‌ایم در (۲) می‌گذاریم، بدست می‌آید:

$$b_{n-2}+\underbrace{(b_n+b_{n+1}+\ldots+b_{2n-4}+b_{2n-3})}_{\text{جمله }(n-2)}+b_{2n}=$$

$$\begin{aligned}&=R_1-D_1+(R_1-C_{n-1}+R_1-C_{n-2}+\ldots+R_1-C_2+\\&+R_1-D_2)+D_1+D_2-C_1-C_p-C_n-(n-2)R_1+\bar{s}\\&=R_1-D_1+[R_1(n-2)-(C_{n-1}+C_{n-2}+\ldots+C_2)-\\&-D_2]+D_1+D_2-C_1-C_p-C_n-(n-2)R_1+\bar{s}=\\&=R_1-(C_n+C_{n-1}+\ldots+C_p+\ldots+C_2+C_1)+\bar{s}\end{aligned}$$

ولی روشن است که :

$$C_1+C_2+\ldots+C_{n-1}+C_n=\bar{s}$$

بنابراین:

$$b_{n-2}+b_n+b_{n+1}+\ldots+b_{2n-3}+b_{2n}=R_1$$

به این ترتیب، قاعدهٔ کلی‌که دراینجا آورده‌ایم،می‌تواندهرمربع

•	•	•	•	•
•	•	•	•	b_1
•	•	•	•	b_2
b_8	•	b_9	•	b_4
b_7	b_6	b_{10}	b_5	b_3

وفقی را (ودر حالت کلی، غیرعادی) به وجود آورد.

درحالت $n=5$ ، ساختمان مربع وفقی، به وضعی است که درشکل مجاور نشان داده‌ایم.

به‌جای نقطه‌ها ، عددهای دلخواه بگذارید، b_1 ، b_2 ، ...، b_{10} را معین کنید. مربعی که ازاین راه بدست می‌آید. بدون تردید، وفقی خواهد بود.

۳۴۲. حاصلضربهای وفقی

یکی از مسأله‌های مربوط به‌مربعهای وفقی عنارتست از مسألهٔ مربوط به‌پرکردن خانه‌های یك مربع از عددهای صحیح مختلف، به نحوی که حاصلضرب این‌عددها در طول هرسطر، هرستون وهریك از دوقطر،مقدار

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

a)

$۲^۴$	$۲^۹$	$۲^۲$
$۲^۳$	$۲^۵$	$۲^۷$
$۲^۸$	۲	$۲^۶$

=

۱۶	۵۲۱	۴
۸	۳۲	۱۲۸
۲۵۶	۲	۶۴

b)

مربوط به‌مسألهٔ ۳۴۲. مربع وفقی با حاصلضرب ثابت ۲۱۵

ثابتی باشد. چنین مربعی راکسی‌نتوانسته است باعددهای متوالی‌درست کند و به‌نظر می‌رسدکه چنین‌کاری، ممکن نباشد. ولی اگر خود را بـه عددهای‌متوالی‌محدود نکنیم، می‌توان برای تشکیل‌چنین مربعی،عددهای

مناسب را پیدا کرد.

یکی از روشهای تشکیل اینگونه مربعها، براساس قاعدهٔ مشهور ضرب توانها قراردارد: حاصلضرب دو توانی که پایه‌های مشترك داشته باشند، عبارتست از توانی‌که پایهٔآن همان پایهٔ مشترك عددها، ونمای آن مجموع نماهای آنهاست. مثلاً

$$۲^۶ \times ۲^۸ = ۲^{۶+۱+۸} \quad \text{یا} \quad ۲^۴ \times ۲^۳ \times ۲^۸ = ۲^{۴+۳+۸}$$

در مثالهائی‌که انتخاب‌کردیم، مجموع نماها، یکی است:

$$۴+۳+۸=۸+۱+۶$$

وبنابراین، حاصلضرب توانها هم با یکدیگر برابر می‌شوند:

$$۲^۴ \times ۲^۳ \times ۲^۸ = ۲^۸ \times ۲ \times ۲^۶$$

حالا روشن است که‌اگرعدد دلخواهی‌مثل۲رابه‌عنوان‌پایه انتخاب کنیم و نماهای آنرا، عددهای یك مربع وفقی با مقدار ثابت مجموع در نظربگیریم (شکل a صفحهٔ۳۸۷)، مربعی وفقی با حاصلضرب ثابت P بدست می‌آید (شکل b همان صفحه). برای این مربع داریم:

$$P = ۲^۴ \times ۲^۳ \times ۲^۸ = ۲^۴ \times ۲^۹ \times ۲^۲ = ۲^۴ \times ۲^۵ \times ۲^۶ = \ldots =$$
$$= ۲^{۱۵} = ۳۲۷۶۸$$

به این ترتیب، به‌کمك هر مربع وفقی با مجموع ثابت، می‌توان مربع «وفقی» با حاصلضرب ثابت درست‌کرد.

برای‌تشکیل‌مربعهای وفقی باحاصلضرب‌ثابت، می‌توان به ترتیب دیگری هم عمل کرد که ارتباطی با مربعهای وفقی با مجموع ثابت،

نداشته باشد.

a^3 رابه سه‌عامل تجزیه می‌کنیم: $a^3=a^2.a.1$، با انتخاب‌مناسب این عاملها در خانه‌های‌یك مربع مرتبهٔ سوم، به‌سادگی می‌توان یك‌مربع وفقی با حاصلضرب ثابت a^3 بدست آورد. برای این منظور، ابتدا این سه عامل ۱ ، a و a^2 را در خانه‌های یکی از قطرها، و مثلاً ازگوشهٔ چپ‌پائین به طرف بالا و راست‌قرار می‌ددیم (شکل a).سپس‌درخانه‌های

a	۱	a^2
a^2	a	۱
۱	a^2	a

a)

۱	b^2	b
b^2	b	۱
b	۱	b^2

b)

a	b^2	a^2b
a^2b^2	ab	۱
b	a^2	ab^2

c)

مربوط به مسألهٔ ۳۴۲ . ساختن مربعهای وفقی باحاصلضربهای ثابت a^2b^2 ، b^3 ، a^3

آزاد، عاملهای ۱ ، a و a^2 راازهرکدام دوبار، به نحوی‌قرارمی‌دهیم که درهرردیف عامل تکراری پیدا نشود و ضمناً نسبت به‌قطری‌که در ابتدا پرکرده‌ایم، متقارن‌باشند(شکل a) .

به این ترتیب، مربعی وفقی باحاصلضرب ثابت a^3 بدست‌می‌آید، ولی مربع بدست آمده، این‌عیب را داردکه درآن عددهای تکراری‌وجود دارد.

مربع دیگری به همین ترتیب، با عددهای ۱ ، b ، b^2 می‌سازیم، منتهی قطراول را به‌نحو دیگری و مثلاً ازگوشهٔ چپ بالا به طرف‌گوشهٔ

راست‌پائین می‌گیریم (شکل b). دومربع را رویهم قرار می‌دهیم وهردو عدد خانه‌هایی را که رویهم قرار می‌گیرند در یکدیگر ضرب می‌کنیم، تا مربع جدیدی بدست‌آید(شکل c). در مربع اخیر، حاصلضرب‌عددهای هرسطر، هرستون و هرقطر، مقدار ثابتی است برابر با $a^۳b^۳$.

۲	۹	۱۲
۳۶	۶	۱
۳	۴	۱۸

مربوط به‌مسألهٔ ۳۴۲.
$P=۲۱۶$

حالا، اگر به جای a و b، عددهای دلخواهی قرار دهیم (وبهتر است که این عددها، اول باشند تا احتمالا عددهای تکراری پیدانشود) مربع وفقی عددی، با حاصلضرب ثابت، بدست می‌آید.

مثلاً اگر $a=۲$ و $b=۳$ فرض‌کنیم، مربع وفقی باحاصلضرب ثابت $P=۲۱۶$ پیدا می‌شود (شکل را ببینید).

مسألهٔ ۱. مربع‌وفقی‌مرتبهٔ سومی باسه پارامتر a، b و c تشکیل دهید، به‌نحوی حاصلضرب ثابت آن مساوی $a^۳b^۳c^۳$ باشد.

* * *

برای‌تشکیل‌مربع‌وفقی‌مرتبهٔ چهارم‌با حاصلضرب‌ثابت‌هم، می‌توان طرحی تهیه‌کرد[۱] (شکل a صفحهٔ ۳۹۱). در اینجا $P=ABCDabcd$.
حالا اگر به جای حرفها مثلاً $A=۱$، $B=۲$، $C=۷$، $D=۹$، $a=۱$، $b=۳$، $c=۴$ و $d=۵$، بگیریم، مربع وفقی با حاصلضرب ثابت $P=۷۵۶۰$ بدست می‌آید (شکل b).

* * *

۱. به‌مناسبت دیگری، همین‌طرح را درحل مسألهٔ ۱۱۵ هم داده‌ایم.

Aa	Bd	Cb	Dc
Db	Cc	Ba	Ad
Bc	Ab	Dd	Ca
Cd	Da	Ac	Bb

a)

۱	۱۰	۲۱	۳۶
۲۷	۲۸	۲	۵
۸	۳	۴۵	۷
۳۵	۹	۴	۶

b)

مربوط به مسألهٔ ۳۴۲. دستور ونمونهٔ مربع وفقی مرتبهٔ چهارم با حاصلضرب ثابت.

یك مربع وفقی ناقص مرتبهٔ سوم، با حاصلضرب ثابت درسطرها و ستونها، در شکل مجاور داده شده است، که دارای خاصیت اضافی جالبی است:

۱	۱۲	۱۰
۱۵	۲	۴
۸	۵	۳

مربوط بهمسألهٔ ۳۴۲.

$$۸^۲+۵^۲+۳^۲=۷^۲+۷^۲$$

$$۸^۴+۵^۴+۳^۴=۷^۴+۷^۴$$

مسألهٔ ۲. مربع وفقی مرتبهٔ سوم ناقصی مربع‌وفقی‌ناقص‌مرتبهٔ‌سوم. که در بالا آوردیم، درحالت کلی ، حاصلضربی مساوی $a^۳bc$ دارد . جای حرفها را در خانه‌های مربع پیدا کنید.

* * *

ی. سلکون ، دانشجوی‌پزشکی (از ایروان)، نتیجه‌گیری جالبی برای تشکیل‌مربعهای وفقی با حاصلضرب ثابت دارد: چون عملهای‌جمع وضرب، دارای یك رشته خاصیتها وکیفیتهای مشترك هستند، بنابراین

باید با تبدیل جمع به‌ضرب وتفریق به تقسیم، در رابطه‌های مربوط به مربعهای وفقی با مجموع ثابت، مربعهای وفقی با حاصلضرب ثابت بدست آید.

مثلا، از رابطه‌ای که در صفحهٔ ۳۸۱ دادیم، می‌توان بلافاصله، رابطه‌ای برای تشکیل مربعهای وفقی مرتبهٔ سوم با حاصلضرب ثابت، بدست آورد (شکل را ببینید)؛ (دراینجا، شکل b از روی شکل a، به

kx	$\frac{k}{xy}$	ky
$\frac{ky}{x}$	k	$\frac{kx}{y}$
$\frac{k}{y}$	kxy	$\frac{k}{x}$

(a

x^2y	1	xy^2
y^2	xy	x^2
x	x^2y^2	y

b)

مربوط به مسألهٔ ۳۴۲. دستوری برای تشکیل مربعهای وفقی مرتبهٔ سوم با حاصلضرب ثابت

این ترتیب بدست‌آمده است که همهٔ جمله‌های خانه‌های مربع a را در xy ضرب و $k = ۱$ فرض کرده‌ایم). همچنین از رابطهٔ ستاسویچ (صفحهٔ ۳۸۱) ویرماکوف (صفحهٔ ۳۸۰)، می‌توان رابطه‌هایی برای مربع مرتبهٔ چهارم با حاصلضرب ثابت پیدا کرد (شکل زیررا ببینید).

$\frac{z^2}{y}$	$\frac{yt}{x}$	$\frac{yt}{z}$	$\frac{x^2}{t}$
$\frac{xy}{z}$	x	z	$\frac{zt}{x}$
$\frac{xy}{t}$	y	t	$\frac{zt}{y}$
$\frac{t^2}{x}$	$\frac{xz}{y}$	$\frac{xz}{t}$	$\frac{y^2}{z}$

A	Cab	$\frac{D}{ab}$	B
$\frac{Dc}{d}$	$\frac{B}{ac}$	$\frac{Aa}{c}$	Ccd
$\frac{Bd}{c}$	$\frac{Dc}{a}$	Cac	$\frac{A}{cd}$
C	$\frac{Aa}{b}$	$\frac{Bd}{a}$	D

مربوط به‌مسألهٔ ۳۴۲. دستوری برای تشکیل مربعهای وفقی‌مرتبهٔ چهارم با حاصلضرب ثابت

بر اساس همین فکر، دانشجو ی . چرنوف ، روشی بـرای تشکیل مربعهای وفقی از مرتبهٔ دلخواه با حاصلضرب ثابت پیدا کرد ، کـه به کمك آن می‌توان مربعهای باحداقل حاصلضرب ثابت P را بدست‌آورد.

برای اینکه طبق این روش، یك مربع وفقی مرتبهٔ n تشکیل‌دهیم بابد این عملها را انجام دهیم:

۱) کوچکترین عددی راکـه دارای $n^۲$ مقسوم‌علیه باشد، درنظر می‌گیریم و همهٔ مقسوم‌علیه‌های این عدد را می‌نویسیم؛

۲) یك مربع‌وفقی‌دلخواه مرتبهٔ n بامجموع ثابت درنظرمی‌گیریم و همهٔ عددهای آنرا ، با مقسوم‌علیه‌هایی که پیدا کرده‌ایم، و به‌ترتیب معینی (که درمثال روشن خواهد شد)، عوض‌کنیم.

هرعدد N را می توان به اینصورت نوشت:

$$N=p_۱^{\alpha_۱}\cdot p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_k^{\alpha_k}$$

که درآن $p_۱$ ، $p_۲$ ، ...، p_k عددهایی اول‌و متمایز ازیکدیگرنـد. تعداد همهٔ مقسوم علیه‌های‌عدد N (با به‌حساب‌آوردن۱ وخودعدد)برابراست‌با

$$(\alpha_۱+۱)(\alpha_۲+۱)\cdots(\alpha_k+۱)$$

مثلاً ، اگر داشته باشیم :

$$N=a^۲b^۲$$

(a ، b عددهایی اول و متمایزند)، عدد N دارای

$$(۲+۱)(۲+۱)=۹$$

مقسوم‌علیه خواهد بود . این مقسوم علیه‌ها چنین‌اند:

$$۱ , a , a^۲ , b , ab , a^۲b , b^۲ , ab^۲ , a^۲b^۲$$

متوجهٔ ردیفی که برای مقسوم‌علیه‌ها انتخاب کرده‌ایم، باشید. همتشه همین ردیف را باید درنظر داشت.

۶	۱	۸
۷	۵	۳
۲	۶	۴

a)

a^2b	۱	ab^2
b^2	ab	a^2
a	a^2b^2	b

b)

۱۲	۱۱	۱۸
۹	۶	۴
۲	۳۶	۳

c)

مربوط به مسألهٔ ۳۴۲. تشکیل مربع وفقی مرتبهٔ سوم، باحاصلضرب ثابت

به تشکیل مربع‌وفقی‌مرتبهٔ سوم، باحاصلضرب ثابت، می‌پردازیم. برای این منظور، یك مربع وفقی مرتبهٔ سوم، با مجموع ثابت درنظر می‌گیریم (شکل a) و به‌ترتیب به‌جای عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ نه‌مقسوم‌علیه عدد $N=a^2b^2$ را قرار می‌دهیم (باهمان ردیفی که آنها را دربالا نوشته‌ایم) . مربع وفقی مرتبهٔ سومی که برای ماآشناست ، با حاصلضرب‌ثابت‌بدست‌می‌آید(شکل b). اگر a و b را مساوی کوچکترین عددهای اول بگیریم، یعنی مساوی ۲ و ۳ ، مربع وفقی مرتبهٔ سوم ، با کمترین مقدار برای حاصلضرب ثابت ، $P=۲۱۶$ ، بدست می‌آید (شکل c).

به همین ترتیب، عدد $N=a^3b^3$ دارای $۴\times۴=۱۶$ مقسوم‌علیه است ، یعنی‌بااین مقسوم‌علیه‌ها می‌توان مربع وفقی مرتبهٔ چهارم با حاصلضرب ثابت، درست‌کرد. خودتان آنرا تشکیل‌دهید.

عدد $N_۱=abcd$ هم دارای $۲\times۲\times۲\times۲=۱۶$ مقسوم‌علیه

است ،کـه با انتخاب کـوچکتریـن عـددهای اول بـرای a ، b، c، d
(a=۲ ، b=۳ ، c=۵ ، d=۷) ، مقدار N_1 کوچکتر از N میشود:

$$N=2^2\times3^3=216\ ;\quad N_1=2\times3\times5\times7=210$$

abcd	*a*	*b*	*cd*
c	*bd*	*ad*	*abc*
d	*bc*	*ac*	*abd*
ab	*acd*	*bcd*	۱

a)

۲۱۰	۲	۳	۳۵
۵	۲۱	۱۴	۳۰
۷	۱۵	۱۰	۴۲
۶	۷۰	۱۰۵	۱

b)

مربوط بهمسألهٔ ۳۴۲. تشکیل مربع وفقی مرتبهٔ چهارم باحاصلضرب ثابت

۲۱۰، کوچکترین عددی استکه دارای ۱۶ مقسومعلیه است. بنابراین بهکمك $N_1=abcd$ میتوان مربع وفقیمرتبهٔ چهارم را، باکوچکترین مقدار حاصلضرب ثابت P ، بـدست آورد. برای اینکـه، ایـن مربع را تشکیل دهیم، مقسوم علیههای $N_1=abcd$ را مینویسیم:

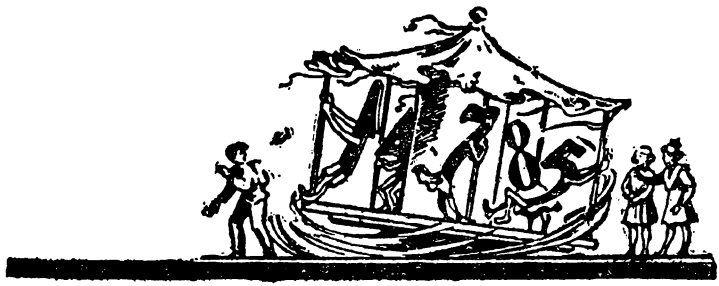
۱,a,b,ab,c,ac,bc,abc,d,ad,bd,

abd,cd,acd,abcd,

حالا، شکل b صفحهٔ ۳۴۸ را درنظر میگیریم و به جایعددهای ۱، ۲، ...، ۱۶، مقسوم علیههای عدد N را قرار میدهیم، سپس بـه جای a، b، c و d مقادیرعددیشان رامیگذاریم و مربع آمادهاست. مربع وفقیشکل b درهمینصفحه، بهازای a=۲ ، b=۳ ، c=۵ ، d=۷ بدستآمدهاست.

با استفاده از روش چرنوف ، شما میتوانید با استفاده ازمقسوم

علیه‌های عددهای $N = a^4b^4$ و $N = a^5b^5$، مربعهای وفقی‌مرتبهٔ پنجم و مرتبهٔ ششم با حاصلضرب‌ثابت‌رادرست کنید. ولی‌آیا مقدار ثابت P ، دراین موارد، کمترین مقدار ممکن است؟



بخش سیزدهم

شوخی و جدی دربارهٔ عددها

درمورد اشیایی‌که درجهان دور وبرما وجـود دارد، شما قبل از ازهمه به خاصیتهای حداگانهٔ‌آنها توجه می‌کنید، خاصیتهایی‌که‌وسیلهٔ تشخیص یك چیز از چیز دیگر می‌شود.

فراوانی ویژگیها و خاصیتهای انفرادی، خاصیتهای‌کلی را که مربوط به همهٔ این اشیاء است، در ابهام و تاریکی قرار می‌دهد وکشف آنرا دشوار می‌کند.

یکی از ویژگیهای‌کلی ومهم اشیاء، اینست‌که می‌توان همهٔ‌آنها را محاسبه کرد و اندازه گرفت و این خاصیت کلی اشیاءرا در مفهوم عدد ، منعکس می‌کنیم.

نیاز به محاسبه‌کردن ومقایسه‌کردن (اندازه‌گیری) اشیاء،یکباره به‌وجود نیامده است ، بلکه ازهمان نخستین مرحله‌های تکامل انسان و به خاطر فعالیتهای روزانهٔ او ، پیدا شده است.

مردم، خیلی به‌کندی ودرطول سده‌های بسیار و در مبارزهٔسخت

به‌خاطر هستی خود، شمردن را آموختند. به قول انگلس

«برای شمردن علاوه براشیاء قابل شمارش ، باید این استعداد را هم داشت‌که بتوان همهٔ خاصیتهای دیگر راکه‌دراین اشیاء وجود دارد، به جز خاصیت شمردن، ازآنها جداکرد، واین استعداد هم تنها در اثر تجربهٔ طولانی و با تکیه برتکامل تاریخی، بدست می‌آید».

امروزه، هرکسی شمردن را به سادگی، ازهمان دوران‌کودکی و تقریباً همراه با آغاز حرف‌زدن، یاد می‌گیرد، اما چیزی‌که تا این‌اندازه برای ما عادی است، در مسیر تکاملی خود، راهی بسیار طولانی و به شکلهای گوناگون پیموده است.

زمانی بودکه برای‌شمردن اشیاء، تنها ازدو عدد یك ودواستفاده می‌کردند. درجریان‌گسترش بعدی دستگاه عدد شماری، از عضوهای‌بدن آدمی، و در درجهٔ اول، از انگشتها استفاده شد، و اگر این « رقمها » کافی نبود، قطعه چوبها، سنگریزه‌ها و اشیاء دیگر، برای شمردن،به‌کار گرفته می‌شد.

ن.ن. میکلوخو ـ ماکلای ، درکتاب‌خود به‌نام «مسافرت» از روش عجیبی‌که مردم گینهٔ نو ، برای شمردن به‌کار می‌برند، گفتگو می‌کند:

«روش‌جالب مردگینه‌ای، برای شمردن چنین است‌که انگشتهای دست خود را یکی بعد از دیگری می‌بندد و همراه آن صدایی ازخود در می‌آورد شبیه «به، به، به»... به‌این ترتیب تا پنج می‌شمارد، وقتی به پنج رسیدمی‌گوید «ایبون‌به» (دست). بعد شروع به‌خواباندن‌انگشتهای دست دیگر خودمی‌کند و دوباره می‌گوید «به، به...» تا به «ایبون‌آلی»

(دودست) برسد. سپس شمردن را با تکرار «به، به» ادامه می‌دهد تا به «سامبابه» و«سامباآلی» (یك‌پا،دوپا) برسد. اگرمردگینه‌ای‌بخواهدهنوز به شمردن ادامه دهد، از دستها و پاهای مرد دیگری استفاده می‌کند[1].

وقتی‌که عدد به‌وجود آمد ومفهوم آن تکامل پیداکرد؛ به‌تدریج دانش مربوط به خاصیتها و قانونهای عـدد، یعنی «نظریهٔ عـددها» پیدا شد.

ضمن کارکردن‌باعدد،یعنی‌انجام‌عملهای‌ریاضی،ازیکطرف‌خاصیتهای کلی این عددها، کشف می‌شود،که در «نظریهٔ عددها» مورد بررسی‌قرار می‌گیرد، ازطرف دیگر خاصیتهای ویژه‌ای‌که تنها مربوط به‌گـروهی از عددها و یا حتی یك عدد مشخص است، روشن می‌شود . این خاصیتهای ویژه،ممکن است اهمیت‌نظری چندانی نداشته باشد، ولی در عوض‌بسیار جالب وسرگرم‌کننده‌اند. وقتی‌که روی انبوه‌عـددها، کـه بیشتر ازهمهٔ سنگهای روی زمین‌اند،کارکنیم، به خاصیتهای عجیب، جالب،بامزه و غیرمنتظره‌ای برخورد می‌کنیم.

شما به عددهای منحصری،یعنی‌عددهایی‌که شبیه آنها دربین سایر عددها وجود ندارد، و همچنین. به دسته عددهایی برخورد می‌کنید کـه می‌توانید به‌کمك آنها، ترکیبهای بسیار زیبایی درست‌کنید.

۳۴۳. ده‌رقم

I. امروزه تقریباً درتمام جهان، از دستگاه عدد شماری ب.ه‌مبنای

---

۱) برای‌آگاهی‌بیشتر دراین مورد، می‌توانید به‌کتاب «ریاضیات‌درشرق» فصل «گامهای نخستین» درتکامل شمار، ترجمهٔ پرویز شهریاری،مراجعه‌کنید.

کتابخانه مجازی ریاضیات

۱۰، استفاده می‌کنند. دراین دستگاه، از ده رقم ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۰ استفاده می‌شود و این ده رقم برای نوشتن هرعدد دلخواهی، کفایت می‌کند.

بزرگترین عدد ده‌رقمی که‌با استفادهٔ همهٔ این رقمهامی‌توان‌نوشت وقتی بدست می‌آیدکه این رقمها را به ترتیب و از بزرگ بـه‌کوچك، پشت‌سرهم بنویسیم، یعنی عدد

۹۸۷۶۵۴۳۲۱۰

هـرترتیب دیگری ازاین ده رقم، بدون تردید منجر بـه عددی کوچکتر می‌شود. آیا اینطور نیست؟

این مطلب جالب است‌که روشن‌کنیم با این ده‌رقم، چندعـدد ده رقمی می‌توان نوشت، به نحوی‌که در هرکدام ازآنها ازهررقم تنها یك بار استفاده شده باشد.

یك‌ملیو ن؟ یاکمتر؟ چگونه می‌توانید تعداد این عددها را،بدون اینکه آنها را بنویسید، پیداکنید؟

II. باتوجه به اینکه‌تعداد عددهای ده رقمی، بدون تکراررقمها در هرعدد، بیشتر ازسه‌ملیون است (قسمت حل و جواب را ببینید)،تنها ۶ عدد زیر را آنها انتخاب می‌کنیم:

۱ ۰۳۷ ۲۴۶ ۹۵۸، ۱ ۰۴۶ ۳۸۹ ۷۵۲، ۱ ۲۸۶ ۳۷۵ ۹۰۴،

۱ ۳۰۷ ۶۲۴ ۹۵۸، ۱ ۳۷۰ ۲۵۸ ۶۹۴، ۱ ۴۶۲ ۹۳۸ ۵۷۰،

چه چیز جالبی در این عددها وجود دارد؟

هرکدام از این شش عدء را به۲ تقسیم‌کنید، خارج قسمتی‌راکه

بدست می‌آورید بر ۹ تقسیم کنید. خارج‌قسمت اول نه‌رقمی وخارج‌قسمت دوم هشت‌رقمی می‌شود. آیا درخارج قسمت اول و یا خارج قسمت دوم رقم تکراری پیدا می‌شود؟

عمل تقسیم دوم راکه انجام می‌دهیم، منجر به‌یك عدد هشت‌رقمی می‌شودکه شامل ۹ نیست. ولی اگر این رقم ۹ را درانتهای یکی ازاین عددهای هشت رقمی بگذارید، مجذورکامل بدست می‌آید، یعنی عدد نه رقمی‌پیدامی‌شودکه‌جذرآن‌عددی‌صحیح است،خودتان‌پیداکنیدکه‌کدامیك ازخارج قسمتهای هشت‌رقمی،این‌خاصیت‌رادارد. همچنین،عددده‌رقمی، بدون‌تکرار هیچکدام‌ازرقمهاوجوددارد،که‌اگرآنرابر۹تقسیم‌کنیم،خارج قسمتی بدست می‌آیدکه اگر آنرا از چپ به راست، یااز راست به‌چپ به‌خوانیم ، فرقی نمی‌کند. آیا می‌توانید این عدد ده رقمی را پیداکنید؟

III. دو عدد زیر را انتخاب می‌کنیم :

$$a = ۱۲۳۴۵۶۷۸۹, \qquad b = ۹۸۷۶۵۴۳۲۱$$

a و b به‌ترتیب کوچکترین وبزرگترین‌عددنه رقمی هستندکه‌بدون استفاده از صفروبدون‌تکراررقمها،بدست می‌آید.

تفاضل a — b هم از همان رقمها، تشکیل شده است:

$$۹۸۷\ ۶۵۴\ ۳۲۱ - ۱۲۳\ ۴۵۶\ ۷۸۹ = ۸۶۴\ ۱۹۷\ ۵۲۳$$

سپس، اگر همهٔ عددهای یك رقمی، به جز ۰ و ۱، را درعددهای a و b ضرب کنیم، در حاصلضربها می‌توان خاصیتهای مشترکی پیدا کرد، که‌بنابرآنها همهٔ این عددهای یك‌رقمی به‌دوگروه تقسیم می‌شوند:

۲،۴،۵،۷،۸ و ۳،۶،۹

عددهای هریك ازاین‌گروه‌ها، نسبت به حاصلضرب آنها در a و b ، چهٔ خصوصیتی دارند؟

ضمن تقسیم عددهای a و b برهمین عددهای یك رقمی، بازهم می‌توان خصوصیتی پیداکردکه بنابرآن، عددهای‌گروه اول از عددهای گروه دوم جدا شود. این‌خصوصیت کدام است؟

عدد a را می‌توان بادوعمل به عدد b تبدیل‌کرد: ضرب a دریك عدد یك‌رقمی و سپس اضافه کردن یك عدد یك رقمی دیگر به این حاصلضرب. این دوعدد یك رقمی را پیداکنید.

IV. اگر عدد ۱۲ ۳۴۵ ۶۷۹ راکه از رقمهای متوالی وصعودی (به جز۸) تشکیل شده است، ابتدا دریك عدد یك رقمی و سپس در ۹ ضرب کنیم، حاصلضرب‌آخر مساوی‌عددی می‌شود که تمام رقمهای‌آن، همان، عامل ضرب یك رقمی است، مثلاً

۱۲ ۳۴۵ ۶۷۹ ×	۱۲ ۳۴۵ ۶۷۹ ×
۸	۷
۹۸ ۷۶۵ ۴۳۲ ×	۸۶ ۴۱۹ ۷۵۳ ×
۹	۹
۸۸۸ ۸۸۸ ۸۸۸	۷۷۷ ۷۷۷ ۷۷۷

این پدیدهٔ جالب‌را، برای بقیهٔعددهای یك‌رقمی هم آزمایش‌کنید و علت آنرا پیدا کنید.

۳۴۴. بازهم چند برخورد عجیب

I. عدد ۹۸۰۱ را از وسط به دوقسمت کنید، دریك قسمت عدد ۹۸ و در قسمت دیگر ۰۱. من مجموع این دوعدد را بدست می‌آورم و نتیجه

را مجذورمی‌کنم و... باکمال تعجب به‌همان عدد اولیه می‌رسم:

$$(۹۸+۰۱)^۲=۹۸۰۱$$

عدد ۳۰۲۵ هم دارای‌همین خاصیت است: اگر آنرا به دوقسمت ۳۰ و ۲۵ تقسیم‌کنیم، آنها را رویهم‌بریزیم و مجموع را مجذورکنیم به‌همان عدد ۳۰۲۵ می‌رسیم.

بین عددهای چهاررقمی، غیر از دوعددی‌که نام بردیم، یك‌عدد دیگر بـا همین خاصیت وجـود دارد. در قسمت حل و جواب، دربـارهٔ چگونگی پیداکردن، صحبت شده است. شما چه روشی برای پیداکـردن آن انتخاب می‌کنید.

II. پشت سرهم، چند ردیف عدد می‌نویسیم:

A	۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳...
	۱	۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	۱۹...
	۱	۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۵...
	۱	۶	۱۱	۱۶	۲۱	۲۶	۳۱...
	۱	۷	۱۳	۱۹	۲۵	۳۱	۳۷...
	۱	۸	۱۵	۲۲	۲۹	۳۶	۴۳...
	۱	۹	۱۷	۲۵	۳۳	۴۱	۴۹...

C .....

عدد اول‌هرردیف، برابر است‌با ۱، وهرکدام از عددهای بعدی‌در سطراول ۲ واحد، درسطر دوم ۳ واحد، در سطرسوم ۴ واحد و... ازعدد قبلی بزرگتراست (یعنی عددهای سطراول یك تصاعد عددی با قدرنسبت

۲، سطر دوم با قدر نسبت ۳ و غیره تشکیل می‌دهند). بـه این ترتیب، یك جدول عددی بدست می‌آید. اگر عددهای این جدول را، بـه صورتی که نشان داده‌ایم، گروه‌بندی وهرگروه‌رادریك‌راهروقرار دهیم، مجموع عددها در هر راهرو، مساوی مکعب شمارهٔ ردیف همان راهـرو می‌شود. مثلاً در راهرو شماره ۲:

$$۱+۴+۳=۲^۳$$

و در راهرو شماره ۳

$$۱+۵+۹+۷+۵=۳^۳$$

وغیره. به‌طورکلی مجموع عددها، در راهرو شمارهٔ n برابر است‌با $n^۳$.

سپس، هرعددی که در امتداد قطر AC قرارگـرفته است، برابر است با مجذور شمارهٔ سطری‌کـه روی‌آن قرارگـرفته است. همچنین، مجموع عددهای هرمربع دلخواهی‌کـه قسمتی از AC ، قطـرآن باشد، مجذورکامل‌است، یعنی برابراست بامجذوریك‌عدد صحیح. مثلاً مجموع عددها، درمربعی‌که قطرآن ازعددهای ۲۵، ۳۶ و ۴۹ درست شده است، برابر است‌با:

$$۲۵+۳۱+۳۷+۲۹+۳۶+۴۳+۳۳+۴۱+۴۹=۳۲۴=۱۸^۲$$

این خاصیت را ، برای قسمتهای دیگـری ازقطر AC ، آزمـایش کنید. حالا، خاصیتهای مشابهی، برای‌عددهای این‌جدول ، پیداکنید:

۱	۳	۵	۷	۹	۱۱	۱۳	...
۱	۵	۹	۱۳	۱۷	۲۱	۲۵	...
۱	۷	۱۳	۱۹	۲۵	۳۱	۳۷	...
۱	۹	۱۷	۲۵	۳۳	۴۱	۴۹	...
۱	۱۱	۲۱	۳۱	۴۱	۵۱	۶۱	...

III. می‌توان خاصیتهای جالبی برای عدد ۳۷ ، پیدا کرد.

۱) اگر آنرا در ۳، یا یکی ازمضربهای ۳ (تا۲۷)، ضرب‌کنیم ، حاصل ضرب مساوی یك عدد سه رقمی، با رقمهای مساوی می‌شود:

$$۳۷\times۳=۱۱۱,\quad ۳۷\times۶=۲۲۲,\quad ۳۷\times۹=۳۳۳,$$
$$۳۷\times۱۲=۴۴۴,\quad ۳۷\times۲۷=۹۹۹$$

۲) حاصلضرب ۳۷درمجموع‌رقمهایش،مساوی مجموع مکعبهای رقمهایش می‌شود:

$$۳۷(۳+۷)=۳^۳+۷^۳$$

۳) اگر از مجموع مجذورهای دو رقم ۳۷، حاصلضرب‌دورقمش راکم‌کنیم، بازهم عدد ۳۷ بدست می‌آید:

$$(۳^۲+۷^۲)-۳\times۷=۳۷$$

۴) جالب‌ترین خاصیت: یك عدد سه‌رقمی مضرب ۳۷، انتخاب می‌کنیم، مثلاً $۲۵۹=۷\times۳۷$. هرعددی‌که ازعدد ۲۵۹، باتبدیل‌دوری رقمهای‌آن‌بدست‌آید، عددهای ۹۲۵ و۵۹۲، بازهم بر۳۷بخش‌پذیراست .

تبدیلهای‌دوری‌یك‌عدد،به این ترتیب بدست می‌آیدکه هربار رقم آخر را به ابتدای عدد بیاوریم ، بدون اینکه در ردیف دو رقم دیگر تغییری بدهیم.

حالا، عدد تصادفی دیگری‌که‌مضرب ۳۷ باشد، انتخاب‌می‌کنیم، مثلاً $۱۸۵=۵\times۳۷$. از تبدیل دوری رقمهای آن ، به دوعدد ۵۱۸ و ۸۵۱ می‌رسیم. این دوعدد هم بر ۳۷ بخش‌پذیرند.

طبیعی است‌که این گمان پیش می‌آیدکه هرعدد سه رقمی‌مضرب ۳۷، در تبدیل دوری خود، به عدد دیگری تبدیل می‌شود که مضرب ۳۷ است. اگربرای‌تمام‌عددهای سه‌رقمی مضرب ۳۷، آزمایش‌کنیم،درستی،

این گمان مسلم می‌شود. وقتی که یك حکم، برای تمام حالتهای ممکن، درست باشد، به‌یك حکم ریاضی تبدیل می‌شود.

عددهای پنج رقمی مضرب ۴۱ هم دارای همین خاصیت هستند. مثلاً همهٔ، عددهای ۱۵۴۹۸، ۸۱۵۴۹، ۹۸۱۵۴، ۴۹۸۱۵ و ۵۴۹۸۱، که هرکدام از قبلی با تبدیل دوری بدست آمده است، مضربی از ۴۱ هستند.

۳۴۵. دوتجربهٔ جالب

تجربهٔاول. چهار عددصحیح ومثبت دلخواه می‌نویسیم، مثلاً ۸، ۱۷، ۳، ۱۰۷. تفاضل دوعدد اول ودوم، بعد تفاضل دوعدد دوم وسوم، سپس تفاضل دوعدد سوم وچهارم و بالاخره تفاضل دوعدد چهارم واول را بدست‌می‌آوریم (وهربار عدد کوچکتر را ازعدد بزرگترکم‌می‌کنیم):

$۱۷-۸=۹,\ ۱۷-۳=۱۴,\ ۱۰۷-۳=۱۰۴,\ ۱۰۷-۸=۹۹$

عددهایی راکه بدست می‌آید، اولین‌تفاضلها می‌نامیم وآنها را به‌ردیف می‌نویسیم:

۹، ۱۴، ۱۰۴،۹۹

دوباره، همان عمل را تکرار می‌کنیم: تفاضل‌دوعدد اول و دوم، تفاضل‌دو عددوم‌و سوم،تفاضل دوعدد سوم وچهارم وبالاخره تفاضل‌دو عدد چهارم و اول‌را پیدا می‌کنیم:

$۱۴-۹\equiv۵,\ ۱۰۴-۱۴=۹۰,\ ۱۰۴-۹۹=۵,\ ۹۹-۹=۹۰$

دومین تفاضلها، بدست می‌آید؛

۵، ۹۰، ۵،۹۰

به همین ترتیب، سومین تفاضلها را معین می‌کنیم، بدست می‌آید:

۸۵، ۸۵، ۸۵، ۸۵

و چهارمین تفاضلها، همه برابر صفر می‌شوند:

۰، ۰، ۰، ۰

آزمایش را باگروه دیگری از عددها، انجام دهید. گروه اولیهٔ عددها را A_0 ، گروه اولین تفاضلها را A_1 ، گروه دومین تفاضلها را A_2 ، و غیره می‌نامیم.

فرض کنید، گروه اولیهٔ چهار عدد، چنین باشد:

۹۳، ۵، ۲۱، ۵۰

عملها را انجام می‌دهیم:

$A_0 = (۹۳، ۵، ۲۱، ۵۰)$،

$A_1 = (۸۸، ۱۶، ۲۹، ۴۳)$،

$A_2 = (۷۲، ۱۳، ۱۴، ۴۵)$،

$A_3 = (۵۹، ۱، ۳۱، ۲۷)$،

$A_4 = (۵۸، ۳۰، ۴، ۳۲)$،

$A_5 = (۲۸، ۲۶، ۲۸، ۲۶)$،

$A_6 = (۲، ۲، ۲، ۲)$،

$A_7 = (۰، ۰، ۰، ۰)$،

درهفت مرحلهٔ عمل، به‌گروه عددهای مساوی صفر رسیدیم.

تجربه را باید روی نمونه‌های متفاوت انجام داد. این‌بار، عددها را دورازهم انتخاب می‌کنیم:

$A_0 = (۱، ۱۱، ۱۳۰، ۱۷۶۰)$،

$A_1 = (۱۰، ۱۱۹، ۱۶۳۰، ۱۷۵۹)$،

$A_2 = (۱۰۹، ۱۵۱۱، ۱۲۹، ۱۷۴۹)$،

$A_3 = (۱۴۰۲، ۱۳۸۲، ۱۶۲۰، ۱۶۴۰)$،

$A_۴=(۲۰, ۲۳۸, ۲۰, ۲۳۸)$،

$A_۵=(۲۱۸, ۲۱۸, ۲۱۸, ۲۱۸)$،

$A_۶=(۰, ۰, ۰, ۰)$

گروه صفرها، برخلاف انتظار، خیلی زود بدست‌آمد: درمرحلهٔ ششم!

حالا، خودتان ده‌مورد ازاین‌آزمایش را، روی‌گـروههای چهار عددی انجام دهید، درهرحالت می‌بینیدکه بالاخره، به‌گروه عددهای‌صفر می‌رسید، ضمناً دراغلب موارد (والبته نه‌همیشه)، به بیش از ۸ مرحله عمل نیاز نداریم.

آیا می‌توان، با این‌آزمایشها مطمئن شدکه به‌یك قانون‌رسیده‌ایم یا اینکه ممکن است، گروهی ازچهار عدد مثبت وجود داشته باشد،کـه با این‌روش هرگز به‌گروه عددهای صفر نرسد؟ پاسخ به‌ایـن پرسش‌خیلی ساده نیست. برای اطمینان‌کامل، باید روشی برای استدلال‌کلی‌پیداکرد. با وجود این، جستجو وآزمـایش، تنها راهی است‌کـه قبل از پیداشدن روش اثبات‌کامل، می‌تواند مورد استفاده قرارگیرد.

یادآوری۱ . گروههایی هم‌که از ۸ یا ۱۶ یا به‌طورکلی ۲^n عـدد مثبت تشکیـل شده باشند (n، عـدد صحیح ومثبت است)، دارای همین خاصیت‌هستند، یعنی بعد ازچندمرحله محاسبهٔ تفاضلها، به‌گروه‌عددهای مساوی صفر می‌رسند.

یادآوری ۲. وقتی‌که تعداد عـددهای‌گـروه ، مساوی توانـی از ۲ (یعنی ۸ ، ۱۶، ۳۲ وغیره) نباشد ، ممکـن است بـا تشکیل تفاضلهای متوالی ، به‌گروه عددهای صفر نرسد . مثلاً ، اگـر $A_۰=(۲,۵,۹)$ باشد ، داریم:

$A_0=(2, 5, 9)$, $A_5=(1, 1, 0)$

$A_1=(3, 4, 7)$, $A_6=(0, 1, 1)$

$A_2=(1, 3, 4)$, $A_7=(1, 0, 1)$

$A_3=(2, 1, 3)$, $A_8=(1, 1, 0)$

$A_4=(1, 2, 1)$,

A_8 ، همان A_5 است وبنابراین با ادامهٔ عمل، مرتباً A_6 و A_7 تکرار می‌شود .

تجربهٔ دوم. عدد صحیح دلخواهی درنظربگیرید ومجموع مجذورهای رقمهای آنرا بدست‌آورید . درمورد نتیجه‌ای‌که پیدا می‌شود، دوباره همین عمل را انجام دهید، یعنی مجموع مجذورهای رقمهای آنرامحاسبه کنید. اگر این عمل را چندبار تکرارکنید ، بالاخره به عدد ۱ یا ۸۹ می‌رسید. مثلاً، برای عدد ۳۱ داریم:

$$3^2+1^2=10$$
$$1^2+0^2=1$$

روشن است‌که عددهای به‌صورت 10^n (n عدد صحیح‌ودلخواه) و عددهایی‌که از رقمهای ۱ و ۳ یا ۶ و ۸ (ازهرکدام یکبار) و تعداد دلخواهی صفر تشکیل شده باشد، مثل ۱۳ ، ۱۰۳ ، ۳۰۰۱ ، ۶۸، ۶۰۸، ۸۰۰۶ و غیره، همه، به همین نتیجه می‌رسند.

حالا، عدد دیگری، و مثلاً ۴۸، را درنظر می‌گیریم، داریم:

$4^2+8^2=80$, $5^2+2^2=29$,

$8^2+0^2=64$, $2^2+9^2=85$,

$6^2+4^2=52$, $8^2+5^2=89$,

که از ادامهٔ عمل، بدست می‌آید:

$$۴^۲=۱۶, \qquad ۸^۲+۹^۲=۱۴۵,$$
$$۱^۲+۶^۲=۳۷, \qquad ۱^۲+۴^۲+۵^۲=۴۲,$$
$$۳^۲+۷^۲=۵۸, \qquad ۴^۲+۲^۲=۲۰,$$
$$۵^۲+۸^۲=۸۹ \qquad ۲^۲+۰^۲=۴,$$

درمرحلهٔ هشتم‌عمل، دوباره به‌همان عدد ۸۹ می‌رسیم. عددهای بینابینی که دراینجابدست‌می‌آید، عبارتست‌از ۱۴۵، ۴۲، ۲۰، ۴، ۱۶، ۳۷ و ۵۸. از اینجا نتیجه می‌شودکه مجموع مجذورهای رقمهای عددی که درانتهای‌کار باید مساوی۸۹شود، می‌تواندبه‌یکی‌ازاین۷ عدد، منجرشود.

این‌آزمایش را روی چند عدد دیگر آزمایش کنید و سپس این خاصیت را ثابت‌کنید.

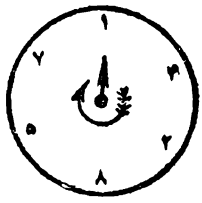
اگربجای‌مجذوررقمها، مکعب یاتوان‌چهارم‌رقمهارادرنظربگیریم، بازهم می‌توانیم قانونهایی راکشف‌کنیم وما این آزمایش را به عهدهٔ خودتان می‌گذاریم.

۳۴۶. چرخ وفلك عددی

۱. ازصندوقچهٔ‌بی‌پایان عددها، عدد۱۴۲۸۵۷ را بیرون‌می‌آوریم. این عدد، ازشش رقم متفاوت تشکیل شده است. رقمهای این‌عدد راروی یك دایره، مثل‌عددهای صفحهٔ ساعت، قرار می‌دهیم (شکل‌را ببینید).

حالا، این‌عدد را به‌ترتیب در ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ ضرب‌می‌کنیم:

$$۱۴۲۸۵۷\times\begin{cases}۱=۱۴۲۸۵۷\\ ۲=۲۸۵۷۱۴\\ ۳=۴۲۸۵۷۱\\ ۴=۵۷۱۴۲۸\\ ۵=۷۱۴۲۸۵\\ ۶=۸۵۷۱۴۲\end{cases}$$



مربوط به‌مسألهٔ ۳۴۶

اگـــر جای عقربه را روی صفحه عـوض‌کنید، می‌توانیم هـــرکدام از حاصلضربها را بخوانیم. هرکدام از عددهای صفحـه، رقم اول یکـی از حاصلضربهاست. آیا این ، یك چرخ‌وفلك غددی واقعی نیست؟

۲. خاصیت جالب دیگری هـم وجـود دارد. اگرهرکـــدام ازاین حاصلضربها را به دوگروه سه‌رقمی تقسیم‌کنیم، و سپس دوعددسه‌رقمی را با هم جمع کنیم ، درهمهٔ حالتها ، حاصلجمع مساوی ۹۹۹ می‌شود. در واقع

$$۱۴۲+۸۵۷=۹۹۹, \quad ۲۸۵+۷۱۴+۹۹۹,...$$

۳. حاصلضربهای عـدد ۱۴۲۸۵۷ را در عـــددهای بزرگتر از ۷ ادامه می‌دهیم (ضرب در ۷ را بعداً بررسی می‌کنیم):

$$۱۴۲۸۵۷\times\begin{cases} ۸=۱۱۴۲۸۵۶ & (۱۴۲۸۵۶+۱=۱۴۲۸۵۷)\\ ۹=۱۲۸۵۷۱۳ & (۲۸۵۷۱۳+۱=۲۸۵۷۱۴)\\ ۱۰=۱۴۲۸۵۷۰ & .....\\ ۱۱=۱۵۷۱۴۲۷ & .....\\ ..... & .....\\ ۶۹=۹۸۵۷۱۳۳ & (۸۵۷۱۳۳+۹=۸۵۷۱۴۲)\end{cases}$$

در هرحال، یك عدد هفت‌رقمی‌بدست‌می‌آید که‌اگررقم اول‌آنرابرداریم و به عدد شش‌رقمی‌کـه می‌ماند اضافه‌کنیم (عمل داخـل‌پرانتز راببینید)، یکی از تبدیلهای دوری عدد ۱۴۲۸۵۷ بدست‌می‌آید. بااستثناهای‌کمی، می‌توان همین نتیجه‌را، برای زمانی‌که حاصلضرب هشت‌رقمـــی است، بدست‌آورد، با این تفاوت‌که درآنجا باید دورقم اول را بـه‌عنوان یك عددودرقمی، به‌شش رقمی‌که می‌ماند، اضافه‌کنیم.

۴. حاصلضرب عدد ۱۴۲۸۵۷ در۷، به‌کلی با بقیهٔ حاصلضربها، تفاوت دارد. این حاصلضرب، از رقمهای مساوی تشکیل شده است:

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۷ = ۹۹۹۹۹۹$$

ولی، همین وضع،هم به‌منشاء عدد ۱۴۲۸۵۷ و هم به‌خاصیتهای «اسرار آمیز» آن، روشنی می‌اندازد. آیا این‌عدد شش رقمی، دورهٔ گردش‌کسر $\frac{۱}{۷}$، درتبدیل‌آن به‌کسر اعشاری‌نیست؟ ۱ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم:

۱	۷
۱۰	۰/۱۴۲۸۵۷
۳۰	
۲۰	
۶۰	
۴۰	
۵۰	
۱	

در باقیماندهٔ آخر، عدد ۱ تکرار می‌شود، با ادامهٔ تقسیم، همین رقمها و به‌همین ردیف در خارج قسمت تکرار می‌شود. به این ترتیب، عدد ۱۴۲۸۵۷، عبارتست ازدورهٔ گردش‌کسر $\frac{۱}{۷}$، در تبدیل آن بـه‌کسر اعشاری. برای‌اینکه روشن‌کنیم‌که چرا ازضرب این‌عدد در ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، یکی ازتبدیلهای‌دوری این عدد بدست‌می آید، به‌عمل تقسیم‌برمی‌گردیم. همهٔ سیر تبدیل کسر $\frac{۱}{۷}$ به‌کسر اعشاری را می‌توان به مرحله‌های زیـر تقسیم کرد:

$$\frac{۱}{۷}=۰/۱+\frac{۳}{۷}\times۱۰^{-۱}=۰/۱۴+\frac{۲}{۷}\times۱۰^{-۲}=$$

$$=۰/۱۴۲+\frac{۶}{۷}\times۱۰^{-۳}=۰/۱۴۲۸+\frac{۴}{۷}\times۱۰^{-۴}=$$

$$=۰/۱۴۲۸۵+\frac{۵}{۷}\times۱۰^{-۵}=۰/۱۴۲۸۵۷+\frac{۱}{۷}\times۱۰^{-۶}=\ldots=$$

(بعد ازاین، دوباره همین رقمها تکرار می‌شود)

ازاینجا روشن می‌شودکه ضمن تبدیل کسر $\frac{۳}{۷}$ به‌کسر اعشاری، خارج قسمت از رقمی شروع می‌شود که بعد از رقم ۱ در عدد

... ۵۷۱۴ ۴۲۸ ۵۷۱ ۱۴۲۸

قرارگرفته است، یعنی دورهٔ گردش این‌کسر ۵۷۱، ۴۲۸ است؛ و روشن است‌که از ضرب ۱۴۲۸۵۷ در ۳ هم، بایدهمین عدد بدست‌آید، زیر داریم: $\frac{۳}{۷}=\frac{۱}{۷}\times۳$

به همین ترتیب، برای تبدیل‌کسر $\frac{۲}{۷}$ به کسر اعشاری، دورهٔ گردش از رقمی‌که بعد از۱ و ۴ درعدد ... ۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷۱۴، قرار گرفته است شروع می‌شود، یعنی دورهٔگردش ۲۸۵۷۱۴ است؛ و روشن است‌که از حاصلضرب ۱۴۲۸۵۷ در ۲ هم باید همین عدد بدست آید، زیرا $\frac{۱}{۷}\times۲=\frac{۲}{۷}$ و غیره.

همچنین به سادگی می‌توان روشن کرد که چرا حاصلضرب عدد ۱۴۲۸۵۷ در ۷، تنها از رقمهای مساوی ۹ درست شده است. مطلب بر سر اینست‌که اگر بعد از ممیز، بی‌نهایت ۹ داشته باشیم، عددی مساوی ۱ بدست می‌آید، یعنی ۱ = ... ۰/۹۹۹ ، و حاصلضرب $\frac{۱}{۷}$ در ۷ هم مساوی ۱ است.

۵. اگر کسر $\frac{a}{b}$ به‌کسر اعشاری‌متناوب تبدیل شود، دورهٔگردش آن‌نمی‌تواند بیش از $b-۱$ رقم داشته باشد. درواقع، ضمن هرتقسیمی،

باقیمانده باید همیشه از مقسوم علیه کوچکتر باشد، ولی تعداد عددهایی که از b کوچکترند، محدود است، این عددها عبارتند از ۱، ۲، ۳، ... ، b − ۱.

هرکدام ازاین عددهارامی‌توان ضمن تقسیم a بر b ، به‌عنوان باقیمانده بدست آورد . ولی در ادامهٔ عمل تقسیم ، تنها ممکن است که این عددها تکرار شوند، وچون هرباقیمانده‌ای متناظر با عددی درخارج قسمت است، رقمهای خارج قسمت هم تکرار می‌شوند. از اینجا معلوم می‌شودکه حداکثر تعداد رقمهایی که در دورهٔ گردش وجود دارد، یک واحد از مخرج کمتر است.

درکسر $\frac{۱}{۷}$، این حداکثر وجود دارد (۶ رقم در دورهٔ گردش).

دورهٔ گردش را کامل گویند، وقتی که تعداد رقمهای آن حداکثر مقدار ممکن (یعنی درست یک واحدکمتر ازمخرج) باشد.

ولی، همهٔ کسرها، دورهٔ گردش کامل ندارند، مثلاً دورهٔ گردش در کسر $\frac{۱}{۳۹}$، به‌جای ۳۸ رقم، از ۶ رقم تشکیل شده است:

$$\frac{۱}{۳۹} = ۰/۰۲۵۶۴۱۰۲۵۶۴۱...$$

خاصیت «دوری» عدد ۱۴۲۸۵۷، که دورهٔ گردش کامل کسر $\frac{۱}{۷}$ است، خاصیت همهٔ دورهٔ گردشهای کسرهای متناوب است، تنها به‌شرطی که این دورهٔ گردش، کامل باشد.

دورهٔ گردش کسرهای $\frac{۱}{۱۷}$ و $\frac{۱}{۲۹}$ هم کامل‌اند:

$$\frac{۱}{۱۷} = ۰/(۰۵۸۸۲۳۵۲۹۴۱۱۷۶۴۷)$$

$$\frac{۱}{۲۹} = ۰/(۰۳۴۴۸۲۷۵۸۶۲۰۶۸۹۶۵۵۱۷۲۴۱۳۷۹۳۱)$$

در اولی ۱۶ رقم و در دومی ۲۸ رقم وجود دارد و البته عددهایی که‌از

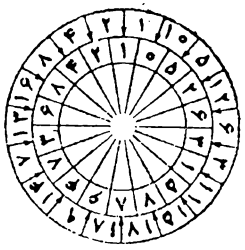
رقمهای‌این دوره‌های‌گردش، تشکیل‌شده باشند، دارای همان خاصیتهای عدد ۱۴۲۸۵۷ هستند.

۳۴۷. صفحهٔ ضرب فوری

عدد زیرهم،مثل عدد ۱۴۲۸۵۷، به خانوادهٔ عددهای‌دوری تعلق دارد:

M = ۰۵۲ ۶۳۱ ۵۷۸ ۹۴۷ ۳۶۸ ۴۲۱

حاصلضرب فوری این‌عدد را می‌توان، به‌کمك صفحه‌ای‌که در شکل‌نشان داده‌شده است، درهریك ازعددهای۱ تا ۱۸، بدست آورد.



مربوط بمسألهٔ ۳۴۷. صفحهٔ ضرب فوری

درحلقهٔ‌خارجی‌صفحه (شکل را ببینید)، هر ۱۸ عامل از ۱ تا ۱۸ قرار داده شده است‌و در حلقهٔ داخلی همهٔ رقمهای عامل M؛ هر ۱۸ حاصلضرب‌هم ازهمین رقمها تشکیل‌شده است.

برای‌اینکه حاصلضرب M را دریکی از عددهای حلقهٔ بیرونی بخوانیم،باید از رقمی‌که زیر علامت پیکان سمت راست‌این‌عدد است‌شروع‌کنیم وتمام رقمها را درجهت حرکت‌عقربه‌های ساعت، پشت‌سرهم بخوانیم .

مثلاً نزدیکترین پیکان‌سمت راست‌عدد۱۴، رقم۷را درحلقهٔ‌داخلی نشان می‌دهد، بنابراین عدد

۷۳۶ ۸۴۲ ۱۰۵ ۲۶۳ ۱۵۷ ۸۹۴

حاصلضرب M در ۱۴ است.

حاصلضرب M در۱۹،به‌کلی چیزدیگری‌می‌شود. این حاصلضرب تنها از رقمهای ۹ تشکیل شده است، و ازهمین جا بلافاصله متوجه می‌شویدکه M همان دورهٔ‌گردش‌کسر $\frac{۱}{۱۹}$، در تبدیل‌آن به‌کسر اعشاری

است. دورهٔ گردش این کسر، کامل است (زیر شامل ۱۸ رقم است)، بنا- براین دارای خاصیت دوری است (مسألهٔ ۳۴۶ رابببینید)، و رمز صفحهٔ ضرب فوری ما هم درهمین جاست.

شمامی‌توانید یك صفحهٔ مقوایی به‌شکل دایره تهیه کنید و به کمك دورهٔ گردش کسرهای دیگر، راهی برای ضرب فوری پیدا کنید. برای این منظور باید از کسرهایی استفاده کنید که دورهٔ گردش آنها، در تبدیل به کسر اعشاری، کامل باشد، مثل $\frac{۱}{۷}$، $\frac{۱}{۱۷}$، $\frac{۱}{۱۹}$ و $\frac{۱}{۲۹}$.

چه کسرهایی، دورهٔ گردش کامل دارند؟ بعد از جستجو در این زمینه، شما متوجه می‌شوید که دورهٔ گردش کسرهایی که مخرج آنها عددی اول است، یا کامل است و یا تعداد رقمهای آن، یکی از مقسوم‌علیه‌های ممکن تعداد رقمهای دورهٔ گردش کامل است.

۳۴۸. ورزش فکری

امتحان کنید که آیا می‌توانید عدد ۱۴۲۸۵۷ را «درذهن خود»، در ۴۹۳ یا هر عدد سه رقمی یا دو رقمی دیگری ضرب کنید. فکر نمی‌کنید که کار دشواری است. بهیچوجه به استعداد خاصی نیاز نیست تا بتوان جواب را در یك دقیقه و شاید هم زودتر پیدا کرد.

به‌خاطر بیاورید که اگر عدد ۱۴۲۸۵۷ را در یك عدد دو رقمی یا سه‌رقمی ضرب می‌کردیم و درحاصلضرب، بسته به‌اینکه هفت، هشت یا نه‌رقمی باشد، یك، دو یا سه‌رقم اول آنرا برمی‌داشتیم و با عدد شش‌رقمی که باقی می‌ماند، جمع می‌کردیم، دراینصورت یکی از تبدیلهای دوری همان عدد ۱۴۲۸۵۷ بدست می‌آمد. (مسأله ۳۴۶ را ببینید).

عدد ۱۴۲۸۵۷، دورهٔ گردش کسر $\frac{۱}{۷}$، درتبدیل آن به کسر اعشاری

است، بنابراین، ضرب عدد ۱۴۲۸۵۷ در ۴۹۳ ، منجر به این می‌شودکه ۴۹۳ را در $\frac{۱}{۷}$ ضرب‌کنیم وحاصلضرب را به‌کسر اعشاری تبدیل‌کنیم.

این عمل را چگونه «درذهن‌خود» انجام دهیم؟

ابتدا، مقدار صحیح‌کسر $\frac{۴۹۳}{۷}$ را جداکنید. این مقدار، مساوی ۷۰ است؛ ۷۰ را به‌عنوان دورقم اول نتیجه بنویسید.

برای ما، کسر $\frac{۳}{۷}$ باقی می‌ماند؛ به عبارت دیگر، باید دورهٔ گردش کسر $\frac{۱}{۷}$ (یعنی ۱۴۲۸۵۷) را در ۳ ضرب‌کنیم. می‌دانیم(مسألهٔ ۳۴۶ راببینید) که‌این حاصلضرب، یکی‌از تبدیلهای دوری عدد۱۴۲۸۵۷ است، بنابراین، مسأله منجر به‌این می‌شودکه رقم اول این حاصلضرب را پیداکنیم. ساده‌ترین راه اینست‌که این رقم اول را به‌عنوان رقم‌اول بعداز ممیز، در تقسیم ۳ بر ۷، بدست آوریم؛ روشن است‌که این‌رقم مساوی۴ است (این رقم اول را باروش دیگری هم می‌توان بدست‌آورد: آخرین‌رقم‌حاصلضرب ۱۴۲۸۵۷ در۳ راپیدا می‌کنیم. چون۲۱ == ۷ × ۳ یعنی آخرین رقم حاصلضرب مساوی ۱ می‌باشد، و این به معنای آنست که رقم اول حاصلضرب، همان رقم بعد از ۱ در عدد ۱۴۲۸۵۷، یعنی۴ است). با در دست‌داشتن رقم اول ۴ ، دیگر نوشتن بقیهٔ رقمها، اشکالی ندارد: ۴۲۸۵۷۱.

حالا برای نوشتن حاصلضرب ۱۴۲۸۵۷ در ۴۹۳ به این ترتیب عمل می‌کنیم: اول دو رقم ۷۰ را،که قبلا بدست‌آوردیم می‌نویسیم،در سمت راست‌آن ۴۲۸۵ را قرار می‌دهیم و از ۷۱،که دورقم‌آخر دورهٔ گردش را تشکیل می‌دهد، عدد ۷۰ را (یعنی عدد دورقمی‌که از دورقم اول نتیجه درست شده است)،کم می‌کنیم؛ آخرین دورقم حاصلضرب مورد نظر بدست می‌آید:

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۴۹۳ = ۷۰۴۲۸۵۰۱$$

درواقع، برای روشن کردن موضوع، توضیحی که دادیم کمی مفصل بود، ولی باآگاهی برآن، می‌توان حاصلضرب را خیلی به‌سرعت بدست آورد.

با آگاهی براین روش، شما می‌توانید دوستان ناآگاه خود را، به خاطر محاسبهٔ فوری خود، به‌شگفتی وادارید.

روی یك صفحهٔ کاغذ، عدد ۱۴۲۸۵۷ رابنویسید و به دوست‌خود پیشنهادکنیدکه یك عدد دورقمی یا سه‌رقمی زیرآن بنویسد. شما بعداز کمی فکر، حاصلضرب را برای او خواهید نوشت.

مثلاً فرض کنیدکه بخواهید عدد ۸۱۶ را در ۱۴۲۸۵۷ ضرب کنید، در ذهن خود کسر $\frac{۸۱۶}{۷}$ را تشکیل می‌دهیم: $۱۱۶\frac{۴}{۷} = \frac{۸۱۶}{۷}$؛ اول‌عدد ۱۱۶ را می‌نویسیم. اولین رقم بعد ازآن مساوی ۵ است (زیرا اولین رقم درتقسیم ۴ بر۷، مساوی ۵ است). این‌رقم، ردیف بقیه‌رقمهارامعین می‌کنند: ۵۷۱۴۲۸، ولی ازاین عدد، بایدا۱۱۶که قبلاً بدست‌آورده‌ایم، کم کنیم، ۵۷۱۳۱۲ بدست‌می‌آیدکه‌آنراسمت‌راست۱۱۶می‌نویسم، بدست می‌آید:

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۸۱۶ = ۱۱۶۵۷۱۳۱۲$$

ممکن است به‌حالتی برخوردکنیدکه عامل ضرب بر۷ بخش‌پذیر باشد. مثلاً فرض کنیدکه بخواهیم حاصلضرب ۱۴۲۸۵۷ × ۳۷۸را پیدا کنیم. داریم:

$$\frac{۳۷۸}{۷} = = ۵۴ = ۵۳\frac{۷}{۷}$$

نخستین رقمهای حاصلضرب مساوی ۵۳ است. حاصلضرب عدد

۱۴۲۸۵۷ در۷ از ۶رقم مساوی ۹، تشکیل شده‌است. ۵۳ را از۹۹۹۹۹۹ کم‌کنیم و تفاضل را سمت راست ۵۳ می‌نویسیم:

$$۱۴۲۸۵۷ \times ۳۷۸ = ۵۳۹۹۹۹۴۶$$

۳۴۹. نقش‌ونگار رقمها

رقمهایی‌که درعملهای حسابی روی عددها، بدست می‌آید، گاهی چنان شگفت‌آور هستند و چنان ترکیبهای زیبایی به‌وجود می‌آورندکه نقش نگارهای‌برفی‌راکه‌روی شیشه وپنجره‌پدیدمی‌آید، به‌خاطرمی‌آورد.

I. به صفحهٔ۴۲۰نگاه‌کنید، درآنجابه‌عملهای معمولی‌جمع‌وضرب برخورد می‌کنید، که درست، ولی با روش خاص خود انجام شده‌اند.

II. بازهم ۸ عمل ضرب:

$۴۸۳ \times ۱۲ = ۵۷۹۶$, $۱۷۳۸ \times ۴ = ۶۹۵۲$,

$۲۹۷ \times ۱۸ = ۵۳۴۶$, $۱۹۶۳ \times ۴ = ۷۸۵۲$,

$۱۵۷ \times ۲۸ = ۴۳۹۶$, $۱۹۸ \times ۲۷ = ۵۳۴۶$,

$۱۸۶ \times ۳۹ = ۷۲۵۴$, $۱۳۸ \times ۴۲ = ۵۷۹۶$,

دو عامل ضرب و حاصلضرب، از ۹ رقم مختلف تشکیل شده‌اند.

III. تساویها، درست است و دوطرف تساوی با یکنوع رقم بیان شده است:

$\sqrt{۱۲۱} = ۱۲ - ۱$, $۴۲ : ۳ = ۴ \times ۳ + ۲$,

$\sqrt{۶۴} = ۶ + \sqrt{۴}$, $۶۳ : ۳ = ۶ \times ۳ + ۳$

$\sqrt{۴۹} = ۴ + \sqrt{۹} = ۹ - \sqrt{۴}$, $۹۵ : ۵ = ۹ + ۵ + ۵$,

$\sqrt{۱۶۹} = ۱۶ - \sqrt{۹} = \sqrt{۱۶} + ۹$, $(۲+۷) \times ۲ \times ۱۶ = ۲۷۲ + ۱۶$,

۷۷×
۷۷
۷
۷۷۷
۸۴۷×۷=۵۹۲۹

۷۷×
۷۷
۴۹
۴۹۴۹
۴۹
۵۹۲۹

۶۶۶×
۶۶۶
۶
۶۶۶
۶۶۶۶۶
۷۳۹۲۶×۶=۴۴۳۵۵۶

۶۶۶×
۶۶۶
۳۶
۳۶۳۶
۳۶۳۶۳۶
۳۶۳۶
۳۶
۴۴۳۵۵۶

۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷×
۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷۷
۴۹
۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹۴۹
۴۹
۴۹
۴۹
۴۹
۴۹
۴۹
۴۹
۴۹
۴۹
۴۹
۴۹
۴۹

$۵^{۶-۲}=۶۲۵$, $\sqrt{۲۵۶}=۲\times۵+۶$,

$(۸+۹)^{۲}=۲۸۹$, $\sqrt{۳۲۴}=۳(۲+۴)$,

$۲^{۱۰}-۲=۱۰۲۲$, $\sqrt{۱۱۸۸۱}=۱۱۸-۸-۱$

$۲^{۸-۱}=۱۲۸$, $\sqrt{۱۹۳۶}=-۱+۹+۳۶$

$۴\times۲^{۳}=۴^{۳}:۲=۳۴-۲$, $\sqrt[۳]{۱۳۳۱}=۱+۳+۳+۱+۳$

دربارهٔ تساویهای زیبای مشابهی فکر کنید.

IV. حاصلضرب‌عددی را، درمجموع‌رقمهایش درنظرمی‌گیریم:

$۳۷\times(۳+۷)$. عامل‌اول‌راکناربگذارید وعامل‌دوم را به‌صورت مجموع مکعبها درآورید، نتیجه فرق نمی‌کند:

$$۳۷(۳+۷)=۳^{۳}+۷^{۳}$$

بازهم‌یك نمونه دیگر: عددی‌که‌آنرا در مجموع رقمهایش‌ضرب کرده‌ایم: $۴۸(۴+۸)$

عامل اول را حذف‌کنید وبرای جمله‌های عامل دوم، توان سوم درنظر بگیرید، نتیجه فرق نمی‌کند:

$$۴۸(۴+۸)=۴^{۳}+۸^{۳}$$

واینهم سه نمونهٔ دیگر ازاین قبیل:

$$۱۴۷(۱۴+۷)=۱۴^{۳}+۷^{۳},$$
$$۱۴۸(۱۴+۸)=۱۴^{۳}+۸^{۳},$$
$$۱۱۱(۱۱+۱)=۱۱^{۳}+۱^{۳},$$

V. دو رقم ۱ و ۶ ، عدد

$$۱۶=۴^{۲}$$

را به وجود می‌آورند. بین رقمهای ۱ و ۶، عدد ۱۵ را قرار می‌دهیم، مجذور بودن آن از بین نمی‌رود:

$$۱۱۵۶ = ۳۴^۲$$

دوباره، عدد ۱۵ را وسط عدد ۱۱۵۶ قرار دهیم، به عدد ۱۱۱۵۵۶ می‌رسیم که باز هم مجذور کامل است:

$$۱۱۱۵۵۶ = ۳۳۴^۲$$

و هرچه این عمل را ادامه دهیم، یعنی مرتباً عدد ۱۵ را در مرکز عدد قبلی بگذاریم، مجذور کامل بودن آن حفظ می‌شود:

$$۱۱۱۱۵۵۵۶ = ۳۳۳۴^۲$$

$$۱۱۱۱۱۵۵۵۵۶ = ۳۳۳۳۴^۲$$

$$۱۱۱۱۱۱۵۵۵۵۵۶ = ۳۳۳۳۳۴^۲$$

.....

به‌نظر می‌رسد که یك قانون پیدا کرده‌ایم، ولی روشن است که برای اطمینان از وجود این قانون باید ثابت کنیم که اگر n بار رقم ۱ را پشت سر هم بنویسیم و در سمت راست آنها، n − ۱ بار رقم ۵ و در آخر یکبار رقم ۶ را قرار دهیم، یعنی عدد:

$$N = \underbrace{۱۱\cdots۱}_{\text{n مرتبه}}\ \underbrace{۵۵\cdots۵۶}_{\text{n − ۱ مرتبه}}$$

مساوی مجذور یك عدد صحیح است. اثبات این حکم را با روشهای مختلف می‌توان داد. شما هم، اگر کمی فکر کنید، می‌توانید ثابت کنید که عدد N، به ازای هر مقدار صحیح n، مجذور عدد $\frac{۱۰^n + ۲}{۳}$ است.

جالب است که بین عددهای دو رقمی مجذور کامل به‌صورت $\overline{ab}$ عدد دیگری هم مثل ۱۶ وجود دارد که دارای ایـــن خاصیت است، یعنی هرچندبار، رقمهای a و ۱ − b را درمرکز آن قراردهیم، بازهم مجذور یك عدد صحیح باقی می‌ماند. ایـن عدد $\overline{ab}$ را پیداکنید .

VI. ۹مجذور کامل‌است،آنرا به‌صورت ۰۹ می‌نویسیم که‌بتوانیم آنرا عددی دورقمی به‌حساب آوریم. یك واحد بـــه دهگـان آن اضافه کنید ودرسمت چپ‌آن بنویسید، یك واحد ازیکان آن‌کم‌کنید وبین دو رقم اصلی‌بنویسید، به عدد ۱۰۸۹ می‌رسیدکه مجذور ۳۳است. این‌روش را یکبار دیگر ادامه دهید، به عدد ۱۱۰۸۸۹ می‌رسید که مجـذور ۳۳۳ است و به‌طورکلی:

$$\underbrace{۱۱\ldots۱}_{n-۱\text{مرتبه}}\underbrace{۰۰\ldots۰}_{n-۱\text{مرتبه}}\underbrace{۸۸\ldots۸}_{n-۱\text{مرتبه}}۹ = \underbrace{۳۳\ldots۳}_{n\text{مرتبه}}{}^{۲}$$

عدد ۳۶ هم، همین خاصیت را دارد:

$$\underbrace{۴۴\ldots۴}_{n-۱\text{مرتبه}}\underbrace{۳۵۵۵\ldots۵}_{n-۱\text{مرتبه}}۶ = \underbrace{۶۶\ldots۶}_{n\text{مرتبه}}{}^{۲}$$

آیا عددهای دو رقمی دیگری، با این خاصیت وجود دارد؟

VII. برای اینکه خودتان حل‌کنید (بدون جواب). ثابت کنیدکه‌به ازای هرمقدار صحیح و مثبت n:

۱) $\frac{۱۰^{n}+۲}{۳}$ عددی است‌صحیح ،

۲) $\frac{۱۰^n+۲}{۳}=\underbrace{۳۳\ldots۳}_{n\text{مرتبه}}+۱$

۳۵۰. یکی ازهمه و همه ازیکی

I. البته، وجود ده رقم ۰، ۱، ۲،...،۹، برای نوشتن عددهای‌از ۱ تا ۲۶ کافی است، ولی کافی است، نه‌لازم. اگربخواهیم، می‌توانیم‌همهٔ این عددها را تنها به‌کمك رقم ۲، بنویسیم، به نحوی کـه برای نوشتن هرکدام ازاین عددها، پنج‌بار ازرقم۲ استفاده‌کنیم وآنها را باعلامتهای چهارعمل اصلی حساب، توان‌وپرانتز، به‌هم مربوط‌کنیم. انجام‌این‌عمل، یك تمرین فکری بسیار جالب است. ما دراینجا، بـه‌عنوان مثال، ده‌عدد اولیه را نوشته‌ایم:

$۱=۲+۲-۲-\frac{۲}{۲}$, $۶=۲+۲+۲+۲-۲$,,

$۲=۲+۲+۲-۲-۲$, $۷=۲۲:۲-۲-۲$,

$۳=۲+۲-۲+\frac{۲}{۲}$, $۸=۲\times۲\times۲+۲-۲$,

$۴=۲\times۲\times۲-۲-۲$, $۹=۲\times۲\times۲+\frac{۲}{۲}$,

$۵=۲+۲+۲-\frac{۲}{۲}$, $۱۰=۲+۲+۲+۲+۲$

حالا، شما هرکدام از ۱۶ عدد بعدی (از۱۱ تا ۲۶) را بـه همین ترتیب بیان‌کنید.

عدد ۲۷ را، بـه‌کمك پنج رقـم ۲، نمی‌توان نشان داد. دوبـاره یادآوری می‌کنیم‌که برای نمایش هرعدد، باید درست ازپنج مرتبه رقـم ۲، استفاده‌کنید.

II. عددهای از ۱ تا ۱۰ را بـه‌کمك رقم ۴ بیان‌کنید، بـه‌نحوی که‌برای‌بیان هرعدد، چهارمرتبه، از رقم۴، استفاده‌کرده باشید.

III. برای‌دوستداران معماهای‌عددی،مسألهٔ زیررا طرح‌می‌کنیم: عدد صحیحی‌را به‌کمك چهاررقم‌دلخواه‌مساوی، وبا استفاده‌ازعلامتهای ریاضی، نشان دهید. منظور اینست که چهار رقم مساوی را طـوری با علامتهای ریاضی به‌هم مربوط‌کنیدکه وقتی‌آنها را با چهار رقم‌مساوی هیگر (به‌جز صفر) عوض‌کنیم، همان عدد قبلی بدست‌آید؛ مثلاً عدد ۳ را می‌توان با چهار رقم مساوی ۴، اینطور نشان داد:

$$۳=(۴+۴+۴):۴$$

که درآن، می‌توان رقم ۴ را، باهررقم دلخواه دیگری (به‌جزصفر)عوض کرد:

$$۳=(۵+۵+۵):۵ \quad \text{یا} \quad ۳=(۸+۸+۸):۸$$

و به‌طورکلی:

$$۳=(n+n+n):n$$

ولی، در رابطهٔ زیر، که عدد ۵ را بـه‌کمك چهار رقـم مساوی۴، نشان داده‌ایم:

$$۵=(۴\times۴+۴):۴$$

رقم ۴ را با هیچ رقم دیگری نمی‌توان عوض‌کرد. بنابراین، بایـد روش دیگری برای بیان ۵ پیداکرد. ضمناً ما از علامتهای جمع، تفریق،ضرب تقسیم وپرانتز استفاده می‌کنیم، و اگر لازم باشد ، می‌توانیم علامتهای زیر را هم به‌کار ببریم:

۱) علامت رادیکال $\sqrt{\ }$ (که تنها مقدار حسابی آنرا درنظر داریم، یعنی فقط وقتی معنی داردکه عدد زیرآن مثبت باشد، و دراین حالت‌هم

حاصل آنرا مثبت می‌گیریم: $\sqrt{۹}$ یعنی ۳ و نه ۳ −)؛

۲) علامت فاکتوریل ! ؛ این علامت، درسمت راست عدد قرار می‌گیرد و به‌معنای آنست که باید عددهای صحیح از ۱ تا خود آن‌عددرا درهم ضرب کنیم، مثلاً

$$۵! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰,$$
$$n! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times (n-۱) \times n,$$

۳) نقطه‌ای که قبل ازعدد (ودرکنارآن) قرار می‌گیرد : ۰.۴؛ ودو نقطه که یکی قبل از عدد و دیگری روی‌آن قرار می‌گیرد: ۰.$\dot{۴}$؛ حالت اول به‌معنای کسر اعشاری است: ۰/۴ = ۰.۴، و حالت دوم به‌معنای کسر اعشاری‌متناوب: ۰/(۴) = ۰.$\dot{۴}$؛ به‌خاطربیاوریدکه‌هرکسراعشاری‌متناوب را می‌توان به‌کسرساده متعارفی تبدیل کرد:

$$۰/(۴) = \frac{۴}{۹}, \quad ۰/(n) = \frac{n}{۹}$$

حالا،فکرکنیدکه بااستفاده‌ازاین‌علامتهای ریاضی چگونه‌می‌توان یك عدد صحیح را به‌کمك چهار رقم مساوی، نشان داد. چند مثال:

$$۱ = (n : n) \times (n : n)$$

$$۵ = \frac{n + ۰.\dot{n}}{۰.\dot{n} + ۰.\dot{n}}, \quad ۱۶ = \frac{n}{۰.n} + \left(\sqrt{\frac{n}{۰.\dot{n}}}\right)!$$

که درآنها، n عبارتست از رقم دلخواهی از ۱ تا ۹.

فرض کنید، در مثال‌آخر n = ۷ بگیریم، دراینصورت داریم:

$$\frac{۷}{۰.۷} + \left(\sqrt{\frac{۷}{۰.\dot{۷}}}\right)! = \frac{۷}{۰/۷} + \left(\sqrt{\frac{۷}{۰/(۷)}}\right)! =$$
$$= ۱۰ + (\sqrt{۹})! = ۱۰ + ۳! = ۱۰ + ۱ \times ۲ \times ۳ = ۱۰ + ۶ = ۱۶$$

حالا، خودتان برای نمایش عددهای از ۱ تا ۲۱، بـه‌کمك چهار رقم مساویn، فکرکنید، که n بتواندهررقم‌دلخواهی، به‌جز صفر، باشد، ازاین‌عددها، تنها برای عدد ۱۴ نمی‌توانیدرابطه‌ای پیداکنید. ولی، اگر برای این عدد هم پیداکردید به‌ما اطلاع دهید.

توجه. راه حلی شبیه $\frac{n}{.n}+\sqrt{n+n}=۱۴$ قابل قبول نیست، زیرا این رابطهٔ تنها به‌ازای $n=۸$ درست است، درحالیکه طبق شرط باید به جـای n، هررقم دلخواه قرارداد.

IV. اگر تنها با استفاده از رقمهای مساوی ۲ (که بیش از ۵ تا نباشد) یارقمهای مساوی ۴(بیش از۴ تا نباشد)، می‌توان همهٔرقمهای از ۱ تا ۹ را ساخت، برعکس هم می‌توان‌به‌کمك رقمهای از ۱ تا ۹ این دوعدد را بدست‌آورد:

$$۲=\frac{۱۳۴۵۸}{۶۷۲۹}, \quad ۴=\frac{۱۵۷۶۸}{۳۹۴۲}$$

هرکدام ازاین‌کسرهای بزرگتر از واحد ، شامل تمام رقمهای از ۱ تا ۹ هستند و از هررقم هم تنها یکبار استفاده شده است.

کسرهای مشابهی تشکیل دهید، که درآنهاازهمهٔ رقمهای ۱ تا ۹، و ازهرکدام یکبار، برای‌بیان عددهای ۳، ۵، ۶، ۷،۸ و ۹، استفاده شده باشد، یعنی همهٔ بقیهٔ عددهای یك‌رقمی، به جز واحد.

برای‌بیان واحد، به‌کمك هر۹رقم، بایدروش جداگانه‌ای‌اندیشید. قبل ازآنکه بـه قسمت جـواب مراجعـه‌کنید، خودتـان را دراین مـورد بیازمایید.

V. رقم برکنار شدهٔصفررا، دوباره به‌خانوادهٔ رقمهابرمی‌گردانیم

به‌کمك ده‌رقم مختلف، می‌توان شش‌کسر نوشت، که حاصل هرکدام از آنها مساوی ۹ باشد. سه تا ازاین‌کسرها چنین است:

$$۹=\frac{۹۷۵۲۴}{۱۰۸۳۶}=\frac{۹۵۸۲۳}{۱۰۶۴۷}=\frac{۵۷۴۲۹}{۰۶۳۸۱}$$

سه‌کسر دیگر را خودتان تشکیل دهید. واحد راهم، می‌توان به‌سادگی‌به کمك هرده‌رقم بدست‌آورد (پیداکنید). می‌توان درمورد پیداکردن سایر رقمها هم به‌کمك ده‌رقم، آزمایش‌کرد.

۳۵۱. بازیافت عددی

تعداد رابطه‌های‌مختلفی‌که بین‌عددها وجود دارد، بی‌نهایت است. بعضی ازآنها مهم‌اندوموضوع بررسیهای جدی قرار می‌گیرند، بعضی دیگرکه اهمیت‌کمتری دارند؛ کنار می‌مانند، ولی پیش می‌آیدکه آنها هم‌مورد توجه قرارمی‌گیرند و نظرها را جلب می‌کنند. ما این رابطه‌ها را «بازیافتهای عددی» گوییم.

I. بین عددهای صحیح، زوجهایی می‌توان پیداکرد، که‌حاصلجمع وحاصلضرب‌آنها، تنها درجای رقمهایشان، باهم فرق دارد:

$۹+۹=۱۸,$ $۹\times۹=۸۱,$

$۲۴+۳=۲۷,$ $۲۴\times۳=۷۲,$

$۴۷+۲=۴۹,$ $۴۷\times۲=۹۴,$

$۲۶۳+۲=۲۶۵,$ $۲۶۳\times۲=۵۲۶,$

$۴۹۷+۲=۴۹۹$ $۴۹۷\times۲=۹۹۴,$

II. زوجهای دورقمی هستند، که خاصیت به‌کلی دیگری دارند: اگر جای رقمها را درهریك از عددها، عوض‌کنیم، حاصلضرب تغییر نمی‌کند:

$۱۲\times۴۲=۲۱\times۲۴,$ $۲۴\times۶۳=۴۲\times۳۶,$

$۱۲\times۶۳=۲۱\times۳۶,$ $۲۴\times۸۴=۴۲\times۴۸,$

$۱۲\times۸۴=۲۱\times۴۸,$ $۲۶\times۹۳=۶۲\times۳۹,$

$۱۳\times۶۲=۳۱\times۲۶,$ $۳۶\times۸۴=۶۳\times۴۸,$

$۲۳\times۹۶=۳۲\times۶۹,$ $۴۶\times۹۶=۶۴\times۶۹,$

هنوز ۴ زوج دیگر ازاین عددها وجود دارد. آنها را پیداکنید.

III. اینهم سه زوج از عددهای متوالی،که مجذورهای‌آنها، در جای رقمها با هم فرق دارد:

$۱۳^۲=۱۶۹,$ $۱۵۷^۲=۲۴۶۴۹,$ $۹۱۳^۲=۸۳۳۵۶۹,$

$۱۴^۲=۱۹۶,$ $۱۵۸^۲=۲۴۹۶۴,$ $۹۱۴^۲=۸۳۵۳۹۶,$

IV. آیا بین عددهای صحیح، لااقل‌یك عدد وجود نداردکه‌دارای این خاصیتها باشد؟

۱) مساوی توان چهارم مجموع رقمهایش باشد (که از اینجا نتیجه می‌شودکه باید مجذورکامل‌باشد)؛

۲) اگرآنرا به سه‌گروه دورقمی تقسیم کنیم، مجموع سه عدد دو رقمی‌که بدست‌می‌آید، مجذورکامل باشد؛

۳) اگر رقمهای‌آنرا به ترتیب عکس بنویسیم (یعنی مقلوب‌عدد را بدست‌آوریم)، بازهم ازتبدیل‌آن به‌سه عدد دورقمی ، مجموع سه عدد دورقمی حاصل، مجذورکامل باشد.

این عدد را می‌توان با محاسبه‌های آزمایشی بدست‌آورد:

۲۳۴۲۵۶

امتحان‌کنید! این عدد دارای همهٔ خاصیتهای مورد نظر می‌باشد.

V. شبیه ستاره‌های آسمان، عددها را هم می‌توان به‌طریقه‌های

مختلفی در «برجهای» گوناگون، گروه‌بندی کرد.

«برج» گروه عددهای ۲، ۳، ۷، ۱، ۵، ۶، دارای این خاصیت است که مجموع سه‌عدد اول برابر است با مجموع سه عدد دوم، ضمناً مجموع مجذورهای آنها هم یکی است:

$$۲+۳+۷=۱+۵+۶$$
$$۲^۲+۳^۲+۷^۲=۱^۲+۵^۲+۶^۲$$

می‌توان، شش عدد ۲، ۳، ۷، ۱، ۵ و ۶ را با مجهولهای $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$، نشان داد و به دستگاه معادله‌های زیر رسید:

$$\begin{cases} x_۱+x_۲+x_۳=y_۱+y_۲+y_۳ \\ x^۲_۱+x^۲_۲+x^۲_۳=y^۲_۱+y^۲_۲+y^۲_۳ \end{cases}$$

روشن است که بی‌نهایت عدد دیگر وجود دارد که دراین دستگاه صدق می‌کنند. ولی مهم اینست که شما بتوانید به‌سرعت، ۶ عدد لازم را از این بی‌نهایت جواب، جدا کنید.

«برجی» ازهشت عدد:

۰، ۵، ۵، ۱۰، ۱، ۲، ۸، ۹

و از ده عدد:

۱، ۴، ۱۲، ۱۳، ۲۰، ۲، ۳، ۱۰، ۱۶، ۱۹

وجود دارد که درهرکدام ازآنها، مجموع عددهای نیم اول برابر است با مجموع عددهای نیم دوم، همینطور مجموع مجذورهای عددهای دونیمه و مجذور مکعبهای عددهای دونیمه، برابر است:

$$\begin{cases} ۰+۵+۵+۱۰=۱+۲+۸+۹, \\ ۰^۲+۵^۲+۵^۲+۱۰^۲=۱^۲+۲^۲+۸^۲+۹^۲, \\ ۰^۳+۵^۳+۵^۳+۱۰^۳=۱^۳+۲^۳+۸^۳+۹^۳ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۱+۴+۱۲+۱۳+۲۰=۲+۳+۱۰+۱۶+۱۹ \\ ۱^۲+۴^۲+۱۲^۲+۱۳^۲+۲۰^۲=۲^۲+۳^۲+۱۰^۲+۱۶^۲+۱۹^۲ \\ ۱^۳+۴^۳+۱۲^۳+۱۳^۳+۲۰^۳=۲^۳+۳^۳+۱۰^۳+۱۶^۳+۱۹^۳ \end{cases}$$

بدون تردید، گروه عددهای دیگری هم با همین رابطه‌ها، وجود دارد، ولی چگونه می‌توان آنها را پیدا کرد؟

گلدباخ و اولر، بیش از ۲۰۰ سال قبل (درسالهای ۱۷۵۰-۱۷۵۱) برای نخستین‌بار. «راز» این «برجهای عددی» را پیداکردند. آنها یك رشته رابطه، به عنوان جوابهای صحیح بعضی از دستگاهها، ومنجمله دستگاههایی که ما دراینجا باآنها سروکار داریم، بدست‌آورند. مثلاً، برای انتخاب عددهایی که در دستگاه

$$x_۱+x_۲+x_۳=y_۱+y_۲+y_۳$$
$$x^۲_۱+x^۲_۲+x^۲_۳=y^۲_۱+y^۲_۲+y^۲_۳$$

صدق کنند، این رابطه‌ها را دادند:

$$x_۱=a+c, \quad x_۲=b+c, \quad x_۳=۲a+۲b+c$$
$$y_۱=c, \quad y_۲=۲a+b+c, y_۳=a+۲b+c$$

دراین رابطه‌ها، به‌جای c،b،a ، می‌توان هرعدد صحیح دلخواه قرارداد و بنابراین، شما می‌توانید هرچندگروه ازاین «برج» عددی که بخواهید، پیداکنید.

مثلاً اگر a=۱ ، b=۲ ، c=۱ بگیریم، همان «برج‌عددی» که به‌عنوان مثال اول‌آورده بودیم، بدست می‌آید: «۲،۳،۷،۱،۵و۶».

اولر و گلدباخ ، رابطه‌های دیگری هم‌برای جواب این دستگاه داده‌اند:

$$x_۱=ad, \quad x_۲=ac+bd, \quad x_۳=bc,$$
$$y_۱=ac, \quad y_۲=ad+bc, \quad y_۳=bd$$

که درآنها، a،b،c وd مقادیر صحیح دلخواهند.

برای انتخاب عددهایی‌که در دستگاه زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=y_1+y_2+y_3+y_4 \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2 \\ x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=y_1^3+y_2^3+y_3^3+y_4^3 \end{cases}$$

می‌توان از رابطه‌های زیر استفاده‌کرد:

$$x_1=a, \quad x_2=b, \quad x_3=3a+3b, \quad x_4=2a+4b,$$
$$y_1=2a+b, \quad y_2=a+3b, \quad y_3=3a+4b, \quad y_4=0$$

دراینجا هم، به ازای هرمقدار عددی aوb ، یك‌گروه عددی ازنوع «برج دوم» بدست می‌آورید.

VI. باحل یك معادله،برای‌پیداکردن‌جوابهای صحیح،رابطه‌های عددی زیادی می‌توان‌بدست‌آورد،همیشه با مقداری‌کار، پافشاری درپیدا کردن جواب و وجود اندیشهٔ ریاضی، می‌توان «برجهای عددی» تازه‌ای پیدا کرد.

حالا، شما را با یکی ازاین «برجهای» باشکوه آشنا می‌کنیم. مجموع همهٔ توانهای از ۱ تا ۵، برای شش عدد ۱،۶،۷،۱۷،۱۸و۲۳، برابر است با مجموع همان توانها، برای شش عدد ۲، ۳، ۱۱، ۱۳، ۲۱ و ۲۲:

$$1+6+7+17+18+23=2+3+11+13+21+22,$$
$$1^2+6^2+7^2+17^2+18^2+23^2=2^2+3^2+11^2+13^2+$$
$$+21^2+22^2$$
$$1^3+6^3+7^3+17^3+18^3+23^3=2^3+3^3+11^3+13^3+$$
$$+21^3+22^3$$

$$۱^۴+۶^۴+۷^۴+۱۷^۴+۱۸^۴+۲۳^۴=۲^۴+۳^۴+۱۱^۴+۱۳^۴+$$
$$+۲۱^۴+۲۲^۴,$$
$$۱^۵+۶^۵+۷^۵+۱۷^۵+۱۸^۵+۲۳^۵=۲^۵+۳^۵+۱۱^۵+۱۳^۵+$$
$$+۲۱^۵+۲۲^۵$$

به‌عنوان کلیدی، برای بدست‌آوردن گروه‌های دیگری از اینگونه عددها، اتحاد زیر را می‌آوریم:

$$a^n+(a+۴b+c)^n+(a+b+۲c)^n+(a+۹b+۴c)^n+$$
$$+(a+۶b+۵c)^n+(a+۱۰b+۶c)^n=$$
$$=(a+b)^n+(a+c)^n+(a+۶b+۲c)^n+(a+۴b+۴c)^n+$$
$$+(a+۱۰b+۵c)^n+(a+۹b+۶c)^n$$

که درآن a، b و c ، عددهایی دلخواه ، و n یکی از عددهای ۱،۲،۳،۴ و ۵ می‌تواند باشد.

VII. شمامی‌توانیدرابطه‌های زیبایی‌بین‌مجموع مربعهای‌عددهای دو رقمی و مقلوب‌آنها پیداکنید (اگر رقمهای عددی را به‌ترتیب‌عکس بنویسیم، عددی‌راکه بدست می‌آید، مقلوب عدد اصلی گویند).

برای‌این منظور، ابتدا دوگروه‌عدد یك‌رقمی پیداکنید، به نحوی که مجموع مجذورهای عددهای‌گروه اول، مساوی مجموع مجذورهای عددهای‌گروه دوم باشد، مثلاً

$$۴^۲+۵^۲+۶^۲\equiv۸^۲+۳^۲+۲^۲$$

حالا از عددهای ۴،۵،۶ و ۲،۳،۸، سه عدد دورقمی بسازید ، به نحوی‌که سه‌عدد اول رقمهای دهگان‌آنها و سه عدد دوم رقمهای یکان آنها باشد، ترکیب این دو رقم را می‌توانید به دلخواه انجام دهید.برای شما سه عدد دو رقمی پیدا می‌شودکه مجموع مجذورهای آنها،برابربا

مجموع مجذورهای سه عدد مقلوب آنها است .

به این ترتیب ازدوگروه عـددهای ۴،۵،۶ و ۲،۳،۸، می‌تـوان تساویهای زیرا ساخت:

$$۴۸^۲+۵۳^۲+۶۲^۲=۲۶^۲+۳۵^۲+۸۴^۲,$$
$$۴۳^۲+۵۲^۲+۶۸^۲=۸۶^۲+۲۵^۲+۳۴^۲$$

.....

دراین تساویها، همهٔ عددهای سمت راست تساوی، مقلوب عددهای‌سمت چپ تساوی‌اند.

به این نکتهٔ زیبا هم توجه‌کنید: رقمهایی‌که در دوطرف تساوی قرارگرفته‌اند، نسبت به‌علامت تساوی، قرینهٔ یکدیگرند.

به‌طورکلی می‌توان‌گفت‌کـه اگر n عدد یك رقمی $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ و n عدد یك رقمی دیگر $y_۱, y_۲, \ldots, y_n$، در تساوی زیر صدق کنند:

$$x_۱^۲+x_۲^۲+\ldots+x_n^۲=y_۱^۲+y_۲^۲+\ldots+y_n^۲$$

تساوی زیرهم، برقرار خواهد بود:

$$(۱۰x_۱+y_۱)^۲+(۱۰x_۲+y_۲)^۲+\ldots+(۱۰x_n+y_n)^۲=$$
$$=(۱۰y_n+x_n)^۲+(۱۰y_{n-۱}+x_{n-۱})^۲+\ldots+$$
$$+(۱۰y_۱+x_۱)^۲$$

اگر پرانتزها را دراین تساوی بازکنیم و به تساوی اول هم توجه داشته باشیم، صحت‌آن روشن می‌شود (خودتان امتحان‌کنید).

مثلاً، ۸عددطبیعی اولیه: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ را انتخاب کنید. ببینید،کدامیك ازآنهارا باید درگروه $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ وکدامیك ازآنها را درگروه $y_۱, y_۲, \ldots, y_n$ قراردهید، سپس ازآنها طبق‌قاعده‌ای

که دیدیم، چند مجموع مساوی، از مجذورهای عددهای دورقمی و مقلوبهای آنها بنویسید.

VIII. بازهم رابطهٔ بسیار جالبی بین چند عدد دورقمی و مقلوبهای آنها:

$$۱۳+۴۲+۵۳+۵۷+۶۸+۹۷=۷۹+۸۶+۷۵+$$
$$+۳۵+۲۴+۳۱,$$
$$۱۳^۲+۴۲^۲+۵۳^۲+۵۷^۲+۶۸^۲+۹۷^۲=۷۹^۲+۸۶^۲+۷۵^۲+$$
$$۳۵^۲+۲۴^۲+۳۱^۲,$$
$$۱۳^۳+۴۲^۳+۵۳^۳+۵۷^۳+۶۸^۳+۹۷^۳=۷۹^۳+۸۶^۳+۷۵^۳+$$
$$+۳۵^۳+۲۴^۳+۳۱^۳,$$

$$۱۲+۳۲+۴۳+۵۶+۶۷+۸۷=۷۸+۷۶+۶۵+$$
$$+۳۴+۲۳+۲۱,$$
$$۱۲^۲+۳۲^۲+۴۳^۲+۵۶^۲+۶۷^۲+۸۷^۲=۷۸^۲+۷۶^۲+۶۵^۲+$$
$$+۳۴^۲+۲۳^۲+۲۱^۲,$$
$$۱۲^۳+۳۲^۳+۴۳^۳+۵۶^۳+۶۷^۳+۸۷^۳=۷۸^۳+۷۶^۳+۶۵^۳+$$
$$+۳۴^۳+۲۳^۳+۲۱^۳$$

ببینید آیا دراینجا هم بین مجموع توانهای عددهای یك‌رقمی و مجموعهای فوق، رابطه‌ای وجود دارد یا نه؟

IX. یك‌کشف دیگر! عدد ۱۴۵، عددی‌منحصر به‌فرد است: تنها این عدد برابر است‌بامجموع فاکتوریلهای رقمهای خودش (برای‌مفهوم فاکتوریل، صفحهٔ ۴۲۶ را ببینید)، با این شرط که ۱=!۱ باشد:

$$۱۴۵=۱!+۴!+۵!$$

اگر !۰ را مساوی واحدبگیریم، یك عدد دیگر هم با این‌خاصیت پیدا می‌شود: ۴۰۵۸۵:

$$۴۰۵۸۵=۴!+۰!+۵!+۸!+۵!$$

وجود عدد اخیر و اثبات منحصربودن ۱۴۵ و۴۰۵۸۵ را ن.ن.گولودین، دانشجو (از تاشکند) بدست آورده است.

کسانی‌که بخواهند، می‌توانند دربارهٔ اثبات این‌حکم فکر کنند؛ دراینصورت، احتمالاً به‌عددهایی برخوردکنندکه هرکدام ازآنهابه‌اندازهٔ ۱+ یا ۱ − با مجموع فاکتوریلهای رقمهایشان، تفاوت داشته‌باشند. این عددهاکدامند و تعدادآنها چقدر است؟

X. تنها دو عدد وجود داردکه هرتوان مثبت و صحیحی ازآنها به‌همان سه رقم و باهمان ردیف ختم می‌شود:

$$۳۷۶^۲=۱۴۱\ ۳۷۶, \qquad ۳۷۶^۳=۵۳\ ۱۵۷\ ۳۷۶,...$$

$$۶۲۵^۲=۳۹۰۶۲۵, \qquad ۶۲۵^۳=۲۴۴\ ۱۴۰\ ۶۲۵,...$$

چگونه می‌توان این‌عددهای سه‌رقمی‌را پیداکرد وچگونه‌می‌توان ثابت‌کردکه تعدادآنها، مساوی ۲ می‌باشد؟

ثابت‌کنیدکه اگرتوان دوم‌یك عدد n رقمی به‌همان رقمهای‌توان اول‌آن ختم شود، دراینصورت هرتوانی ازآن عدد، به‌همان رقمها ختم می‌شود.

۳۵۲. رشتهٔ عددهای طبیعی

I. عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴،... را به شکل مثلثی می‌چینیم:

۵۰											
۵۱									۳۷		
۵۲								۲۶	۳۸		
۵۳							۱۷	۲۷	۳۹		۱۰۷
۵۴						۱۰	۱۸	۲۸	۴۰		۱۰۸
۵۵					۵	۱۱	۱۹	۲۹	۴۱		۱۰۹
۵۶				۲	۶	۱۲	۲۰	۳۰	۴۲		۱۱۰
۵۷			۱	۳	۷	۱۳	۲۱	۳۱	۴۳	(*)	۱۱۱
۵۸			۴	۸	۱۴	۲۲	۳۲	۴۴			۱۱۲
۵۹			۹	۱۵	۲۳	۳۳	۴۵				۱۱۳
۶۰			۱۶	۲۴	۳۴	۴۶					۱۱۴
۶۱			۲۵	۳۵	۴۷						۱۱۵
۶۲			۳۶	۴۸							
۶۳			۴۹								
۶۴											

با نگاه‌کردن به‌این مثلث‌عددی، بدون‌تردید می‌توانیدقانونهایی مربوط‌به‌عددهای سطرها وستونها، رابطهٔ بین عدد وجایی‌که اشغال‌کرده است و غیره پیداکنید. آیا مثلاً به‌این قانونها توجه‌کرده‌اید:

۱) پائین‌ترین عدد هرستون، مجذور شمارهٔ همان ستون است ؛

۲) حاصلضرب دوعدد مجاور درهرسطر، یکی ازعددهای همان سطر است؛ مثلاً ۵۵ = ۱۱ × ۵، دوعامل ضرب وحاصلضرب آنها را روی یك سطر پیدا می‌کنید؛ جایی که این حاصلضرب قرارگرفته است، از جمع عدد ۱ با عامل کوچکتر ضرب بدست می‌آید، به‌شرطی که ازچپ بـه‌راست و از عامل کوچکتر، شمردن را آغاز کنیم؛ مثلاً حاصلضرب ۱۱ × ۵، یعنی ۵۵، درهمان سطری قرارگرفته است که ۵ و ۱۱ هستند و باشروع از ۵، در ردیف ششم این سطر؛ همچنین حاصلضرب ۱۳ × ۷، یعنی ۹۱، درهمان سطر و با شروع از عدد ۷، در ردیف هشتم است.

۳) تمام عددهای سطری که با علامت (*) مشخص شده است، از فرمول $n^2 - n + 1$ بدست می‌آید که درآن n مساوی ۱، ۲، ۳، ...است؛ درهمین سطر، هرعدد سوم بعد از ۳، بر ۳ بخش‌پذیر است؛ هرعدد هفتم بعد از ۷ یا ۲۱، بر ۷ بخش‌پذیر است؛ هرعدد سیزدهم بعداز ۱۳ یا ۹۱ بر ۱۳ بخش‌پذیراست وغیره. عددهای سایرسطرهاهم، شبیه ایـن خاصیتهارا دارند.

II. آیامی‌توان ازبین دنبالهٔ عددهای طبیعی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...، n، ...، بدون برهم‌زدن ردیف آنها، تعدادی انتخاب کرد، بـه نحوی که که مجموع عده‌ای ازآنها، مساوی مجموع بقیه باشد. نخستین زوجی که بدست می‌آید، عبارتست از: ۳ = ۲ + ۱. و زوج بعدی

$$۴ + ۵ + ۶ = ۷ + ۸$$

باکمی جستجو، زوج سوم هم بدست می‌آید:

$$۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۱۳ + ۱۴ + ۱۵$$

می‌بینیم که تعداد جمله‌ها، زیـاد می‌شود، ولی این زیـاد شدن طبق یك قانون است: هربار، چه به‌سمت چپ و چـه به‌سمت راست، یك جمله

اضافه می‌شود و در هرحال تعداد جمله‌های سمت چپ ، یك واحد بیشتر از تعداد جمله‌های سمت راست است. این مطلب را برای زوج بعدی آزمایش می‌کنیم:

$$۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰=۲۱+۲۲+۲۳+۲۴$$

می‌بینیم که تأیید می‌شود!

حالا، به‌کوچکترین جملهٔ هرزوج از مجموعهای مساوی، توجه می‌کنیم (نخستین عدد از سمت‌چپ)، تجربه نشان می‌دهدکه این‌عدد مساوی مجذور تعدادجمله‌های مجموعی است‌که درآن جمله‌های‌کمتری وجود دارد(تعدادجمله‌های‌سمت‌راست‌تساوی) .

در واقع، سمت راست تساوی اول شامل یك جمله است (۳) و کوچکترین جملهٔ این‌تساوی، مساوی $۱^۲$ می‌باشد؛ درسمت راست‌تساوی دوم، دو جمله وجود دارد (۸+۷) وکوچکترین جملهٔ این تساوی هم مساوی $۲^۲$ است؛ درسمت‌راست‌تساوی‌سوم،سه‌جمله‌وجوددارد‌وکوچکترین جمله، دراین تساوی، برابر $۳^۲$ است و غیره.

با توجه به قانون اخیر، می‌توان به سادگی، زوج‌مجموعهای مساوی را نوشت‌که از قبل تعداد جمله‌های آن معلوم باشد.

مثلاً، فرض‌کنید بخواهیم ۷ عدد متوالی پیداکنیم که مجموع آنها با مجموع چندعدد متوالی بعد ازآن، برابر باشد. کوچکترین‌جملهٔ این تساوی را پیدا می‌کنیم: معلوم می‌شودکه درطرف دوم تساوی‌باید ۱ — ۷، یعنی ۶ جمله وجود داشته باشد، بنابراین کوچکترین جملهٔ‌این تساوی، برابر با $۶^۲$ ، یعنی ۳۶ می‌شود و زوج مجموعهای مساوی، چنین‌اند:

$$۳۶+۳۷+۳۸+۳۹+۴۰+۴۱+۴۲=$$
$$=۴۳+۴۴+۴۵+۴۶+۴۷+۴۸$$

به این ترتیب، تجربه‌نشان می‌دهدکه مجموع $n+۱$ عددمتوالی که‌کوچکترین جملهٔ‌آن $n^۲$ است ، برابر است با مجموع n عدد متوالی بعد ازآن. وقتی‌که نخستین وکوچکترین جملهٔ این مجموع، مساوی $n^۲$ باشد، جملهٔ دوم، یك واحد بیشتر ازآن؛ جملهٔ سوم، دو واحد بیشتراز آن و بالاخره، جملهٔ $(n+۱)$ام، n واحد بیشتر ازآن خواهد بود،به‌این ترتیب،آخرین‌جملهٔ سمت‌چپ، مساوی $n^۲+n$ واولین‌جمله سمت‌راست مساوی $n^۲+n+۱$ می‌شود، وچون در طرف دوم $(n-۱)$ جمله‌وجود دارد (یك جمله‌کمتر از طرف اول)، آخرین جملهٔ طرف دوم مساوی $(n-۱)+n^۲+n+۱$،یعنی$n^۲+۲n$ می‌شود.بنابراین، نتیجهٔ‌آزمایش را می‌توان به‌صورت جبری زیرنوشت:

$$\underbrace{n^۲+(n^۲+۱)+(n^۲+۲)+\ldots+(n^۲+n)}_{(n+۱)\text{ جمله}}=$$
$$=\underbrace{(n^۲+n+۱)+(n^۲+n+۲)+\ldots+(n^۲+۲n)}_{n\text{ جمله}}$$

که با توجه، به قانون مجموع‌دریك تصاعد حسابی، به سادگی‌می‌توان صحت آنرا روشن‌کرد.

III. بعد ازبررسی مجموع عددهای‌طبیعی متوالی، حالابه‌بررسی مجموع مجذورهای عددهای متوالی می‌پردازیم.

ابتدا،مجموع‌مجذورهای n عددطبیعی‌متوالی را درنظرمی‌گیریم:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots+(n-۱)^۲+n^۲$$

این،دیگر یك‌تصاعد نیست. برای‌پیداکردن این مجموع، به رابطهٔ‌خاصی نیازداریم، این رابطه،که درکتابهای‌درسی هم وجوددارد،چنین است[1]:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

اگربخواهیم، مجموع مجذورهای عددهای‌زوج‌متوالی، یامجموع مجذورهای عددهای فرد متوالی را پیداکنیم، به‌رابطه‌های دیگری نیاز داریم. مثلاً مجموع مجذورهای همهٔ‌عددهای فرد از ۱ تا ۹ را،می‌توان ازاین رابطه بدست‌آورد:

$$۱^۲+۳^۲+۵^۲+۷^۲+۹^۲=\frac{۱}{۶}(۱۰^۳-۱۰)$$

و برای مجذورهای همهٔ عددهای زوج از ۲ تا ۱۰، این رابطه:

$$۲^۲+۴^۲+۶^۲+۸^۲+۱۰^۲=\frac{۱}{۶}(۱۱^۲-۱۱)$$

با جمع‌کردن این دورابطه، به رابطه‌ای برای مجموع مجذورهای همهٔ عددهای صحیح از ۱ تا ۱۰ می‌رسیم:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+\ldots+۱۰^۲=\frac{۱}{۶}\left[۱۰^۳+۱۱^۳-(۱۰+۱۱)\right]$$

این رابطه را تعمیم دهید و برای هرتعداد دلخواه جمله، بنویسید.

IV. اگر ضلعهای مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ از مثلث قائم‌الزاویه‌ای مساوی ۳ و۴ و وترآن مساوی ۵ باشد (که به مثلث مصری ، معروف است)، داریم: $۵^۲=۴^۲+۳^۲$.

---

۱) برای‌آگاهی بیشتردر این مورد، به‌کتاب «روشهای جبر» ـ جلد اول، بخش مربوط به مجموعها، مراجعه‌کنید.

دراینجا، مجموع مجذورهای دوعدد متوالی، برابر است بامجذور عدد بعدی.

حالا، به یك تجربهٔ دیگر می‌پردازیم. درپایان سدهٔ نوزدهم، ن.پ. باگدانوف. بلسکی تابلو مسألهٔ دشوار راکشید، که روی‌آن نشان می‌داد که‌گروهی از دانش‌آموزان مدرسهٔ روستایی، برای حل «ذهنی» مسالهٔ س. آ.راچینسکی، که برتختهٔ سیاه نوشته بود، فکر می‌کردند:

$$\frac{۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲+۱۳^۲+۱۴^۲}{۳۶۵}=?$$

در واقع هم، اگر «رمز»کار را ندانیم، برای حل سریع «ذهنی»، مسألهٔ ساده‌ای نیست. «رمز»کار هم خیلی ساده است. موضوع اینست که

$$۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲=۳۶۵, \qquad ۱۳^۲+۱۴^۲=۳۶۵$$

و بنابراین جواب مجهول مساوی ۲ است.

ولی ما به مطلب دیگری توجه می‌کنیم. از تساویهایی که دربالا نوشتیم، نتیجه می‌شود:

$$۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲=۱۳^۲+۱۴^۲$$

یعنی مجموع مجذورهای چندعدد متوالی، برابر است با مجموع مجذورهای چند عدد بعدازآن، و دوباره (مثل‌آنچه که درهمین مسأله، قسمت II داشتیم)، تعداد جمله‌ها درسمت چپ تساوی، یکی بیشتر از تعداد جمله‌ها در سمت راست تساوی است. دوپرسش طرح می‌کنیم:

۱) آیا غیر از ۳ و ۴، می‌توان دوعدد متوالی دیگر پیداکرد، به نحوی‌که مجموع مجذورهای‌آنها، مساوی مجذور عدد بعدازآنها باشد؛ وآیا غیراز عددهای ۱۰، ۱۱ و ۱۲، می‌توان سه عدد متوالی دیگر پیدا کرد، به‌نحوی‌که مجموع مجذورهای‌آنها، مساوی مجموع مجذورهای

دو عدد متوالی بعدازآن باشد؟

۲) آیامی‌توان‌مجموعهای مساوی، ازمجذورهای چهاروسه جملهٔ متوالی،ازپنج وچهار جملهٔ متوالی وبه‌طورکلی،ازمجذورهای $n+۱$ و n جملهٔ‌متوالی:درست‌کرد ؟

پاسخ به‌این پرسشها، به معنای حل‌کامل مسألهٔ زیر است:

$n+۱$ عدد طبیعی متوالی طوری پیداکنیدکه مجموع‌مجذورهای آنها، برابر باشد با مجموع مجذورهای n عدد طبیعی بعد ازآنها.

V. بین عددهای طبیعی، حتی دوعدد وجود نداردکه مجموع مکعبهای آنها، برابر باشد بامکعب عدد طبیعی بعدازآنها. این مطلب‌را می‌توان به‌کمك جبر ثابت‌کرد.

اگر سه عددمتوالی را $x-۱$ ، x و $x+۱$ فرض‌کنیم، بنابه‌شرط باید داشته باشیم:

$$(x-۱)^۳+x^۳=(x+۱)^۳$$

و یا پس از تبدیلهای لازم

$$x^۳-۶x^۲-۲=۰$$

این معادلهٔ درجهٔ سوم را می‌توان به این ترتیب نوشت:

$$x^۲(x-۶)=۲$$

به‌سادگی می‌توان‌ثابت‌کردکه دراین معادله، حتی یك عددصحیح هم صدق‌نمی‌کند. سمت راست تساوی یك عدد مثبت است، بنابراین x باید از ۶ بزرگتر‌باشد. کمترین مقداری‌که می‌توان برای x درنظرگرفت، ۷ است. وَلی به ازای $x=۷$ ، سمت‌چپ تساوی خیلی بزرگترازمقدار سمت راست تساوی است، و اگر عددهای بزرگتر از ۷ را برای xدرنظر بگیریم، مقدارسمت‌چپ بازهم بزرگتر می‌شود، یعنی بین عددهای‌صحیح

نمی‌توان ریشه‌ای برای این معادلهٔ درجهٔ سوم پیدا کرد.

ولی، کسانی که به‌اینگونه معماهای عددی علاقمندند، می‌توانند به کمك مکعب عددهای متوالی ، البته به‌اضافهٔ ضمیمه‌هایی، تساویهایی درست کنند:

$$[۵^۳+۶^۳]+۱^۳=[۷^۳]-۱^۳,$$

$$[۱۶^۳+۱۷^۳+۱۸^۳]+(۱^۳+۲^۳)=[۱۹^۳+۲۰^۳]-(۱^۳+۲^۳),$$

$$[۳۳^۳+۳۴^۳+۳۵^۳+۳۶^۳]+(۱^۳+۲^۳+۳^۳]=$$

$$=[۳۷^۳+۳۸^۳+۳۹^۳]-(۱^۳+۲^۳+۳^۳)$$

وغیره. در کروشه‌ها، مجموع مکعبهای عددهای متوالی قرار گرفته است که ضمناً به‌ازای هر $n+۱$ جمله در سمت چپ، n جمله در سمت راست وجود دارد؛ در پرانتزها، چه در سمت چپ و چه در سمت راست، مجموع مکعبهای عددهای متوالی، که از ۱ شروع شده است، قرار دارد.

این مطلب را بدون اثبات یادآوری می‌کنیم که بین آخرین عدد داخل کروشه در سمت چپ تساوی (که آنها را به‌صورت پررنگ‌تر، مشخص کرده‌ایم)، و تعداد جمله‌هایی که در کروشه‌ها قرار گرفته است، این رابطه وجود دارد: این عدد برابر است با سه برابر حاصلضرب تعداد جمله‌های سمت چپ در تعداد جمله‌های سمت راست (که در داخل کروشه‌ها، قرار دارند). مثلاً، در تساوی اول، در داخل کروشهٔ سمت چپ ۲ جمله و در داخل کروشهٔ سمت راست، ۱ جمله وجود دارد، بنابراین

$$۳(۲\times۱)=۶$$

در تساوی دوم، در کروشهٔ سمت چپ ۳ جمله و در کروشهٔ سمت راست ۲ جمله وجود دارد و متناظر با آن داریم:

$$۳(۳\times۲)=۱۸$$

و برای تساوی سوم

$$۳(۴\times۳)=۳۶$$

بدون اینکه به‌حالت‌کلی قانون این تساویها بپردازیم،تنهانمونهٔ دیگری ازآنها را می‌آوریم. نمونه را برای موردی که درکروشهٔ سمت چپ ۵ عدد ودرکروشهٔ سمت راست ۴ باشد،ذکر می‌کنیم. ازحاصلضرب $۳(۵\times۴)$، عدد ۶۰، بدست می‌آید، بنابراین داریم:

$$[۵۶^۲+۵۷^۲+۵۸^۲+۵۹^۲+۶۰^۲]+(۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲)=$$
$$=[۶۱^۲+۶۲^۲+۶۳^۲+۶۴^۲]-(۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲)=$$

درستی این تساوی را خودتان تحقیق‌کنید!

یادآوری‌این نکته لازم است‌که این‌قانون‌برای مجموعهای‌مساوی خود عددهای طبیعی و یا مربعهای‌آنها هم درست است. به این‌تساویها توجه‌کنید:

$$۱+۲=۳,$$
$$۴+۵+۶=۷+۸,$$
$$۹+۱۰+۱۱+۱۲=۱۳+۱۴+۱۵,$$

(درهر تساوی، عددی‌راکه پررنگ‌تر نوشته‌ایم، برابر است باحاصلضرب تعداد جمله‌های سمت چپ درتعداد جمله‌های سمت راست تساوی).برای توانهای دوم، به‌این تساویها توجه‌کنید:

$$۳^۲+۴^۲=۵^۲$$
$$۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲=۱۳^۲+۱۴^۲,$$
$$۲۱^۲+۲۲^۲+۲۳^۲+۲۴^۲=۲۵^۲+۲۶^۲+۲۷^۲$$

(درهرتساوی عددی راکه‌پررنگ‌تر نوشته‌ایم، بدون توان‌آن، برابراست با دوبرابر حاصلضرب تعداد جمله‌های سمت‌چپ، در تعداد جمله‌های

سمت راست تساوی).

VI. آیا به این جدول‌ضرب آشنا هستید:

۱	۲	۳	۴	۵	...	...	p	...	n
۲	۴	۶	۸	۱۰	...	...	۲p	...	۲n
۳	۶	۹	۱۲	۱۵	...	...	۳p	...	۳n
۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	...	...	۴p	...	۴n
۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	...	...	۵p	...	۵n
.....	.....	.....	.....	.....	...	...	...	...	...
.....	.....	.....	.....	.....	.....	...	...	...	...
p	۲p	۳p	۴p	.....	.....	$p^۲$	...	...	
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	...	
n	۲n	۳n	۴n	.....	.....	.....	.....	.....	$n^۲$

حاصلضرب هرعددی‌که درسطربالاقرارگرفته است، درعددی‌که‌در ستون سمت چپ واقع است، برابر است با عددی‌که در نقطهٔ برخورد سطر وستون دو عامل ضرب، واقع شده است. مثلاً عدد ۱۲، درمحل برخورد ستون چهارم وسطر سوم، یا محل برخورد ستون ششم وسطردوم قرارگرفته است.

ولی، اگر با حوصلهٔ بیشتری به این جدول دقت‌کنید، رابطه‌های دیگری هم پیدا می‌کنید:

۱) مجموع عددهایی که درهرمربع به رأس گوشهٔ بالا و سمت‌چپ جدول، قرارگرفته‌اند، مجذور کامل است (یعنی مجذور یك‌عددصحیح است) :

$$۱=۲^۲,$$
$$۱+۲+۲+۴=۳^۲=(۱+۲)^۲,$$
$$۱+۲+۳+۲+۴+۶+۳+۶+۹=۶^۲=(۱+۲+۳)^۲$$

و غیره.

۲) هرکدام ازاین مربعها، به این ترتیب تشکیل می‌شودکه نواری به شکل خط شکسته با زاویهٔ قائمه، به مربع قبلی، اضافه می‌شود. مجموع عددها، درهرکدام ازاین نوارها، برابر با مکعب یك عددصحیح است:

$$۱=۱^۳$$
$$۲+۴+۲=۲^۳,$$
$$۳+۶+۹+۶+۳=۳^۳,$$

.....

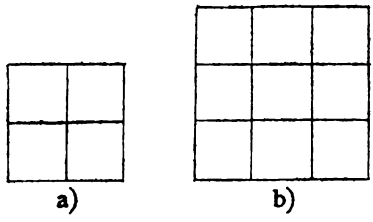
۳) هرکدام ازاین مربعهای نامبرده، به ترتیب از ۱، ۲، ۳، ...، n نوار درست شده‌است. ازآنجا، رابطه‌ای که‌ازخیلی قدیم معلوم بوده‌است بدست می‌آید:

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\ldots+n^۳=(۱+۲+۳+\ldots+n)^۲$$

که با توجه به مقدار داخل پرانتز درطرف دوم (که مجموع‌جمله‌های‌یك تصاعد حسابی n جمله‌ای است)، خواهیم داشت:

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\ldots+n^۳=\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲$$

می‌توان‌برای‌این رابطه‌وعددهایی که‌درداخل هرنوارقرارگرفته‌اند، چند تعبیرهندسی جالب پیدا کرد.



مربوط به مسألهٔ ۳۵۲. چند مستطیل؟

تمام مستطیلهایی را که در شکلهای a و b پیدا می‌شود، به‌شمارید. در شکل a، تعداد این مستطیلها، مساوی ۹ است:

۱ مربع با اندازه‌های	۲×۲
۲+۲ مستطیل با اندازه‌های	۱×۲
۴ مربع با اندازه‌های	۱×۲

رویهم: $۹ = ۱^۳ + ۲^۳$

در شکل b ، ۳۶ مستطیل وجود دارد:

۱ مربع با اندازه‌های	۳×۳
۲+۲ مستطیل با اندازه‌های	۲×۳
۴ مربع با اندازه‌های	۲×۲
۳+۳ مستطیل با اندازه‌های	۱×۳
۶+۶ مستطیل با اندازه‌های	۱×۲
۹ مربع با اندازه‌های	۱×۱

رویهم: $۳۶ = ۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳$

همانطور که دیده می‌شود، عددهایی که درستون سمت راست قرار دارند، همان عددهایی هستندکه در تشکیل نوارها ، دخالت داشته‌اند (جدول صفحهٔ ۴۴۶ را ببینید). به این‌ترتیب، در مربعی که از $۲^۲$ خانهٔ مساوی تشکیل شده است ، به اندازهٔ $۲^۳ + ۱^۳$ ، یعنی ۹ مستطیل و در

مربعی‌که از 3^2 خانهٔ مساوی تشکیل شده است، به اندازهٔ $1^3+2^3+3^3$ یعنی ۳۶ مستطیل می‌توان شمرد. اگر اینطور است ، درمربعی‌که از n^2 خانهٔ مساوی تشکیل شده است، چند مستطیل می‌توانید بشمارید؟

VII. در رابطه‌ای‌که برای تعیین مجموع مکعبهای عددها وجود دارد، باید عددها را به‌ترتیب طبیعی و از ۱ درنظرگرفت: ۱،۲،۳،۴ و غیره، لیوویل ، ریاضیدان فرانسوی،این مسأله را دربرابر خودگذاشت‌که عددهای دلخواه a،b،c،... چگونه‌باشندتامجموع‌مکعبهای‌آنها،مساوی مجذور مجموع‌آنها باشد:

$$a^2+b^2+c^2+\ldots=(a+b+c+\ldots)^2$$

بین عددهای a،b،c،d،...، مقادیرمساوی‌هم می‌تواندوجود داشته‌باشد.

بدون اینکه قاعده‌ای دردست داشته باشید، بدون شك درانتخاب این عددها، با عدم موفقیت‌مواجه می‌شوید. با وجود این، چندموردی را آزمایش کنید و بعد به خواندن ادامه دهید.

لیوویل توانست نتیجه‌ای را بدست‌آوردکه بـه‌کمك دو مثال‌زیر، آنرا روشن می‌کنیم.

مثال۱ . عدد ۶ را درنظر می‌گیریم. این عدد بر۱،۲،۳ و۶ بخش پذیر است. هرکدام ازاین مقسوم‌علیه‌ها، چند مقسوم علیه‌دارند ؟ عدد ۱ دارای یك مقسوم‌علیه است، عدد ۲ دارای دو مقسوم‌علیـه است (۱و۲)، عدد ۳، دو مقسوم‌علیه دارد(۱و۳) وبالاخره عدد ۶، چهار مقسوم‌علیه‌دارد (۱،۲،۳و۶).همین تعدادمقسوم علیه‌ها، یعنی ۱،۲،۲و۴، دررابطهٔ‌جالبی که موردنظر ماست، صدق می‌کنند، یعنی داریم:

$$1^3+2^3+2^3+4^3=(1+2+2+4)^2=81$$

کتابخانه مجازی ریاضیات

مثال ۲. عدد ۳۰ را در نظر می‌گیریم. مقسوم علیه‌های این عدد عبارتند از: ۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۱۰، ۱۵ و ۳۰. تعداد مقسوم علیه‌های این عددها به‌ترتیب برابر است با ۱، ۲، ۲، ۲، ۴، ۴، ۴ و ۸، داریم:

$$۱^۳+۲^۳+۲^۳+۲^۳+۴^۳+۴^۳+۴^۳+۸^۳=$$
$$(۱+۲+۲+۲+۴+۴+۴+۸)^۲$$

روش بسیار جالب و ساده‌ای است. خودتان ازآن، برای عددهای دیگر استفاده کنید.

VIII. اینهم یك نمونهٔ جالب، از قانونهایی که ضمن مشاهدهٔ سادهٔ عددهای طبیعی، بدست می‌آید. عددهای طبیعی را به گروههای زیر تقسیم می‌کنیم:

۱؛ ۲،۳؛ ۴،۵،۶؛ ۷،۸،۹،۱۰؛

درگروه اول، یك عدد؛ درگروه دوم دو عدد بعدی؛ درگروه سوم، سه عددبعد ازآن وبالاخره درگروه nام، n عدد بعدی را قرارداده‌ایم. متذکر می‌شویم که دراینصورت عدد اول و عدد آخر هرگروه را می‌توان از دستورهای زیر پیداکرد:

$$\frac{n(n+۱)}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{(n-۱)n}{۲}+۱$$

که درآن، n عبارتست ازشمارهٔ گروه.

عددهای هرگروه، یك تصاعد حسابی با قدرنسبت مساوی $d=۱$ تشکیل می‌دهند. با دردست داشتن جملهٔ اول هرگروه ($a_۱$) و جملهٔ آخر آن (a_n) وتعداد جمله‌ها (n)، می‌توان مجموع عددهای هرگروه رابدست آورد.

مجموع جمله‌های یك تصاعد حسابی، با این رابطه پیدا می‌شود:

$$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

بنابراین، برای هرگروه داریم:

$$S=\frac{\left[\frac{(n-1)n}{2}+1+\frac{n(n+1)}{2}\right]n}{2}=$$

$$=\frac{(n^2+1)n}{2}=\frac{n^3+n}{2}$$

مجموع گروههای مختلف را به S_1، S_2، S_3، S_4، ... ، نشان می‌دهیم و مجموع گروههای با شماره‌های فرد را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$S_1=\frac{1^2+1}{2},\qquad S_3=\frac{3^3+3}{2},$$

$$S_5=\frac{5^2+5}{2},\ldots,\quad S_{2k-1}=\frac{(2k-1)^3+(2k-1)}{2}$$

و مجموع همهٔ این مجموعها چنین می‌شود:

$$S_1+S_3+\ldots+S_{2k-1}=$$

$$=\frac{[1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k-1)^3]+[1+3+5+\ldots+(2k-1)]}{2}$$

برای تبدیل جبری این عبارت، مسألهٔ جالبی به‌وجود می‌آید.

مسأله. ثابت کنید:

$$\frac{[1^3+3^3+\ldots+(2k-1)^3]+[1+3+\ldots+(2k-1)]}{2}=k^4$$

یادآوری. ابتدا، با استفاده از رابطهٔ مربوط به مجموع مکعبها (صفحهٔ ۴۴۷ را ببینید)، رابطه‌ای برای مجموع مکعبهای عددهای فرد، پیدا کنید.

به مجموع $S_1+S_2+\ldots+S_{2k-1}$ برمی‌گردیم. با توجه به آنچه‌که در حکم مسألهٔ بالا آوردیم، خواهیم داشت:

$$S_1+S_2+S_5+\ldots+S_{2k-1}=k^4$$

این دستور، رابطهٔ بسیار جالبی را بین گروههای یاد شده، به ما می‌دهد:

۱؛ ۲،۳؛ ۴،۵،۶؛ ۷،۸،۹،۱۰؛...

اگر، گروههای ردیف زوج را ازبین آنها خارج کنیم (گروههای دوم، چهارم وغیره)، وبقیهٔ گروهها را با هم جمع کنیم، حاصلجمع مساوی توان‌چهارم تعداد گروههایی که‌باهم جمع‌شده‌اند، می‌شود، مثلاً بلافاصله می‌توان گفت که مجموع

$$۱+(۴+۵+۶)+(۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵)$$

برابر است با 3^4، یعنی ۸۱.

IX. کسانی که به رابطه‌هایی بین عددهای طبیعی علاقمندند، نمی‌توانند از ساده‌ترین خاصیت مجموع آنها، و به‌خصوص مجموع عددهای فرد متوالی، صرفنظر کنند $[1،3،5،\ldots،(2n-1)]$.

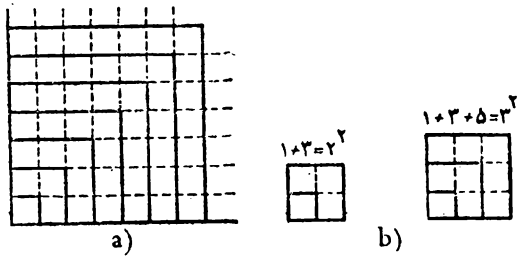
مجموع دو عدد اولیهٔ فرد: ۳ + ۱، برابراست با 2^2، مجذورعدد ۲.

مجموع سه عدد اولیهٔ فرد، ۵+۳+۱ ، برابر است با 3^2، مجذور عدد ۳.

مجموع چهار عدد اولیهٔ فرد ۷+۵+۳+۱ ، برابر است با 4^2، مجذور عدد ۴ و غیره.

این خاصیت مجموع عددهای فرد را می‌توان روشن‌تر روی شکل مشخص کرد: مربعی درنظربگیرید(شکل a صفحهٔ۴۵۳) ،که‌ازنوارهایی‌به شکل خط شکستهٔ با زاویهٔ قائمه وهرنوار از مربعهای واحد، درست شده

باشد، به‌نحوی که تعداد مربعهای واحد هرنوار، معرف عددهای فرد متوالی باشد. با اضافه‌کردن نوارهای متوالی به مربع واحد اولیه ، شکل مربع همیشه حفظ می‌شود (شکل b) واز همین جا معلوم می‌شودکه مجموع عددهای فرد متوالی، مجذورکامل باقی می‌ماند.



طبیعی است که پیش‌بینی کنیم این قانون برای مجموع n عددفرد اولیه درست‌است، یعنی‌این مجموع، برابراست با مجذور تعدادجمله‌های جمع :

$$\underbrace{۱+۳+۵+\ldots+(۲n-۱)}_{\text{n جمله}}=n^۲$$

و آیا این حکم درست است؟ آیـا ممکن نیست‌کـه مجموع ما، درجایی به‌ازای مقادیر بزرگ n ، ازاین‌قانون‌پیروی نکند؟درقانونهایی که تنها از راه آزمایش بدست می‌آیند، چنین پیش‌آمدی همیشه ممکـن است .

ازآنجاکه‌تعداد عددهای‌طبیعی، بی‌نهایت‌است، بدون شك‌نمی‌توان قانون مربوط به مجموع عددهای فرد را تا آخر مورد آزمایش قرارداد. ولی‌نیازی‌هم‌به‌این کارنیست. ریاضیات،روش دیگری‌هم (به‌جزآزمایش)، برای اثبات چنین حکمهایی دارد.

به این ترتیب استدلال می‌کنیم. فرض می‌کنیم که برای k جمله، این حکم درست باشد که مجموع آنها با مجذور تعدادشان برابر است:

$$\underbrace{۱+۳+۵+\ldots+(۲k-۱)}_{k\text{ جمله}}=k^۲$$

حالا، $۲k+۱$، یعنی عدد بعدی فرد را به جمله‌های این جمع اضافه می‌کنیم، ببینیم آیا این قانون، برای موردی که با $k+۱$ جمله سروکار داریم، درست است یا نه:

$$۱+۳+۵+\ldots+(۲k-۱)+(۲k+۱)=$$
$$=k^۲+(۲k+۱)=(k+۱)^۲$$

قانون، بازهم برقرار است. مثل سابق، مجموع جمله‌ها برابر است با مجذور تعداد جمله‌ها.

به این ترتیب، ثابت کردیم که اگر این حکم برای مقداری از k درست باشد، برای یك واحدبیشتر ازآن، یعنی $k+۱$ جمله هم، درست است.

بنابراین قانون را باید آزمایش کرد، اما تنها در یك مورد. کمترین تعدادی که برای جمله‌های جمع لازم است، درنظر می‌گیریم: دوجمله، داریم $۱+۳=۲^۲$. مجموع دوجمله $(k=۲)$، برابراست بامجذور تعداد جمله‌ها. بنابراین، طبق استدلالی که کردیم، همین قانون برای سه‌جمله هم $(k+۱=۳)$ درست است؛ ولی، وقتی که قانون برای سه جمله درست باشد، ناچار باید برای چهارجمله هم درست باشد، و اگر برای $k=۴$ درست باشد، برای $k+۱=۵$ جمله درست است وغیره.

این روش استدلال، که ساده ولی کاملاً دقیق است، روش استقراء

ریاضی نامیده می‌شود.

به این ترتیب، تردید برطرف شد! مجموع n عدد فرد اولیه، به‌ازای هرمقدار دلخواه n ، برابر است با مجذور تعداد جمله‌ها.

البته می‌توانستیم رابطهٔ:

$$۱+۳+۵+...+(۲n-۱)=n^۲$$

را، به‌کمك قانون مربوط به مجموع جمله‌های یك تصاعد حسابی، پیدا کنیم (جمله‌های سمت‌چپ‌تساوی تشکیل یك تصاعد حسابی با قدرنسبت ۲ می‌دهند). ولی درواقع، روش استدلال تغییرنمی‌کرد، زیرا خودرابطهٔ مجموع، در تصاعد حسابی، متکی برهمین روش استقراء ریاضی، ثابت می‌شود.

X .خصوصیت دیگری‌هم، از مجموع عددهای فرد، جالب است. اگررشتهٔ عددهای‌فرد را، که از ۱ شروع‌می‌شود، به‌گروههایی تقسیم‌کنیم: درگروه‌اول، یك عدد؛ درگروه‌دوم، دوعدد بعدی؛ درگروه سوم، سه‌عدد بعدی و غیره، دراینصورت مجموع‌عددهای هرگروه برابر است بامکعب عددی‌که معرف شمارهٔ ردیف‌آن‌گروه است (قضیهٔ نیکوماك):

$۱^۳=$	۱
$۲^۳=$	۳+۵
$۳^۳=$	۷+۹+۱۱
$۴^۳=$	۱۳+۱۵+۱۷+۱۹
$۵^۳=$	۲۱+۲۳+۲۵+۲۷+۲۹

.....

هرسطرعبارتست ازمجموع n جمله (n ،شمارهٔ ردیف‌سطر است) از یك‌تصاعد حسابی، که قدرنسبت‌آن درهرحال $d=۲$ است، ولی‌جملهٔ‌اول

و جملهٔ آخر آن با سطرهای دیگر متفاوت است. آیا بین شمارهٔ ردیف هر سطر، باجملهٔ اول وجملهٔ آخر آن سطر، رابطه‌ای وجود دارد؟ بدون تردید!

برای اینکه اندیشهٔ خود را بیازمایید، کوشش کنید رابطه‌ای بین نخستین جملهٔ هرسطر باشمارهٔ ردیف آن سطر، پیدا کنید.

اگر جملهٔ اول سطر nام را به a_n نشان دهیم، داریم:

$$a_۱=۱\ ,\quad a_۲=۳\ ,\quad a_۳=۷\ ,\quad a_۴=۱۳$$

و غیره. حالا ثابت کنید:

$$a_n=n^۲-n+۱$$

ولی به‌خاطر داشته باشید: برای اثبات لازم‌نیست این رابطه را بازهم آزمایش کنید، بلکه لازم است که برای آن راه‌حلی پیدا کنید.

۳۵۳. اختلاف مزاحم

یك عدد چهاررقمی بنویسید، به نحوی که همهٔ رقمهای آن یکی نباشد (تساوی بعضی رقمها، عیبی ندارد). از رقمهای عددی که نوشته‌اید، دوعددتازه تشکیل دهید: M — بزرگترین عدد ممکن و m — کوچکترین عدد ممکن. اختلاف $r=M-m$ را پیدا کنید ودربارهٔ آن دوباره همین اختلاف را بدست آورید (اگر r ، یك عدد سه رقمی باشد، یك صفر در سمت چپ آن قرار دهید تا چهار رقمی به حساب آید). اگر این عمل را تکرار کنید، بالاخره به اختلاف ۶۱۷۴ می‌رسید، که بعد از آن، همیشه همین عدد به عنوان تفاضل، تکرار می‌شود.

مثلاً عدد چهاررقمی اصلی را ۴۸۱۸ می‌گیریم:

$$M_۱=۸۸۴۱,\quad m_۱=۱۴۸۸,\quad r_۱=۷۳۵۳;$$
$$M_۲=۷۵۳۳,\quad m_۲=۳۳۵۷,\quad r_۲=۴۱۷۶;$$

$M_۳=۷۶۴۱$، $m_۳=۱۴۶۷$، $r_۳=۶۱۷۴$؛

$M_۴=۷۶۴۱$، $m_۴=۱۴۶۷$، $r_۴=۶۱۷۴$؛...

ثابت کنید که این پدیده، برای هر عدد چهاررقمی، که همهٔ رقمهای آن آن مساوی نباشد، وجود دارد.

می‌توان نتیجه گرفت که برای حل این مسأله، کافی است صحت آنرا برای سی‌عدد چهار رقمی ثابت کنیم.

این عددها کدامند؟

اگر عدد اصلی را دو رقمی، سه رقمی یاپنج رقمی بگیریم، به‌چه نتیجه‌ای می‌رسیم؟

۳۵۴. مجموع متقارن

عددی بنویسید (دو رقمی، سه رقمی‌یا بیشتر). مقلوب این عدد را به خودش اضافه کنید. در حاصلجمعی که بدست می‌آید دوباره‌همین عمل را تکرارکنید (یعنی مقلوب‌آنرا به‌خودش اضافه‌کنید). دوباره در بارهٔ حاصلجمع جدید، همین عمل را انجام دهید. پس از چند مرتبه، که عمل را تکرارکنید به‌حاصلجمع متقارنی می‌رسید، یعنی به‌عددی که‌آنرا چه ازچپ به‌راست وچه ازراست به‌چپ بخوانید، تفاوتی نداشته باشد.

چند نمونه

۳۸+	۱۳۹+	۴۸۰۱۷+
۸۳	۹۳۱	۷۱۰۸۴
۱۲۱	۱۰۷۰+	۱۱۹۱۰۱+
	۰۷۰۱	۱۰۱۹۱۱
	۱۷۷۱	۲۲۱۰۱۲+
		۲۱۰۱۲۲
		۴۳۱۱۳۴

گاهی، برای رسیدن به نتیجهٔ مورد لزوم، گامهای بیشتری باید برداشت. مثلاً، اگر ازعدد ۸۹ شروع کنیم، به این زودیها، نتیجهٔمورد انتظار بدست نمی‌آید و تنها بعد از ۲۴ مرحله‌عمل ، به‌مجموع متقارن ۸۸۱۳۲۰۰ ۰۲۳۱۸۸ می‌رسیم.(خودتان‌عمل کنید!)

آیاعددی‌وجود داردکه درمورد‌آن‌نتوان به‌نتیجه‌ای‌متقارن‌رسید؟

پ.ر. مول. (کارگراهل ریگا)، درجستجوهای خود، به‌عدد ۱۹۶ رسیده است‌که دراین مورد، عددی‌بسیار «موذی» است. درمورد این‌عدد بعد از ۷۵ مرحله عمل هم، به‌مجموعی‌متقارن نمی‌رسیم (بعداز ۷۵عمل، به عددی با ۳۶ رقم می‌رسیم). ولی روش آزمایشی نمی‌تواند مسأله را به‌طورکامل حل‌کند. باید روش استدلالی پیداکردکه این حکم را،لااقل برای عددهای باتعداد رقمهای محدود، تأیید یا ردکند.

جالب اینست کـه دو عدد نزدیـك به ۱۹۶، یعنی ۱۹۵ و ۱۹۷، خیلی زود، اولی در مرحلهٔ چهارم و دومی درمرحلهٔ هفتم، به مجموعی متقارن می‌رسند.

بخش چهاردهم

عددهای قدیمی، ولی همیشه جوان

A. عددهای اول

۳۵۵. عددهای اول و عددهای غیراول

عدد a را مقسوم‌علیه عدد صحیح N گوییم، وقتی‌که از تقسیم N بر a دوباره عددی صحیح بدست‌آید.

کوچکترین عدد صحیح، برابر است با ۱. این عدد، تنهابرخودش بخش‌پذیر است، یعنی عدد ۱، تنها یك مقسوم‌علیه‌دارد. بقیهٔ عددهای صحیح، یا دو مقسوم علیه دارند (واحد و خود عدد)، و یا بیشتر از دو مقسوم علیه.

عددهایی مثل ۲، ۳، ۵، ۷ وغیره، تنها بر ۱ و خودشان بخش‌پذیرند.

عدد ۴ دارای سه‌مقسوم‌علیه است: ۱، ۲ و ۴؛ عدد ۶ دارای چهار مقسوم علیه است: ۱، ۲، ۳ و ۶ و غیره.

عددهایی راکه تنها دو مقسوم علیه داشته باشند، عددهای اول و عددهایی راکه بیش ازدو مقسوم‌علیه داشته باشند، عددهای غیراول یا عددهای مرکب، گویند.

کوچکترین عدد اول، برابر است با ۲. این ، تنها عدد زوج اول است. روشن است که بقیهٔ عددهای اول را باید بین عددهای فرد جستجو کرد، ولی البته هرعدد فردی، عدد اول نیست.

مثلاً، عددهای فرد ۳، ۵، ۷، ۱۱ و ۱۳ ، عددهایی اولند، درحالیکه عددهای فرد ۹، ۱۵، ۲۱، عددهایی غیراولند. عدد ۹، سه مقسوم علیه دارد: ۱، ۳ و ۹؛ عدد ۱۵، چهار مقسوم‌علیه دارد: ۱، ۳، ۵ و ۱۵ وغیره.

هرعدد غیراول را می‌توان به‌حاصلضرب عاملهای اول، تجزیه کرد:

$$۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳, \qquad ۳۶۳ = ۳ \times ۱۱ \times ۱۱,\ldots$$

عددهای اول، عاملهای اولیه‌ای هستند که همهٔ عددها را به‌وجود آورده‌اند. به همین مناسبت است که ریاضیدانها تا به این اندازه ، به بررسی عددهای اول، علاقه دارند .

۳۵۶. غربال اراتوستن

چگونه می‌توان، عددهای اول را ازمجموعهٔ همهٔ عددها، جداکرد؟ روشن است که هرچه عدد بزرگتر باشد، پاسخ به‌این پرسش دشوارتر است که آیا مقسوم‌علیهی کوچکتر ازخود دارد یا نه؟

وقتی که بخواهند دانه‌های گندم را از اضافه‌های آن جداکنند، از الك خاصی استفاده می‌کنند که سوراخهای آن با اندازهٔ دانه‌های گندم ، متناسب باشد.

با همین روش هم می‌توان، عددهای اول را از عددهای غیراول جداکرد.

فرض کنیم که بخواهیم عددهای اول را درفاصلهٔ عدد ۲ تا عدد صحیح N ، پیداکنیم. ابتدا، عددهای صحیح از ۲ تا N را به ردیف

می‌نویسیم:

۲،۳،۴،۵،۶،... ، N

نخستین عدداول، برابراست با ۲. زیر عدد۲ و روی همهٔ عددهای‌مضرب ۲ (عددهای زوج)، خط می‌کشیم. اولین عددی‌که می‌ماند، ۳ است.زیر آنرا،به‌عنوان عدداول، خط می‌کشیم‌وروی همهٔ عددهای بعدی را،دو در میان (یعنی عددهایی‌که مضرب ۳ هستند)، خط می‌زنیم. اولین عدد، از عددهای باقیمانده، ۵ است(عدد ۴، قبلاً خط‌خورده است). زیر این‌عدد، به‌عنوان یك عدد اول،خط می‌کشیم و بقیهٔ عددهارا، چهاردرمیان(یعنی عددهایی راکه مضرب ۵ هستند)، خط می‌زنیم و به‌همین ترتیب‌تا آخر.

همهٔ عددهایی‌که‌زیرآنها، خطی‌کشیده شده باشد، عددهای اول از ۲ تا N را تشکیل می‌دهند.

۲,	۳,	~~۴~~,	۵,	~~۶~~,	۷,	~~۸~~,	~~۹~~,	~~۱۰~~,
۱۱,	~~۱۲~~,	۱۳,	~~۱۴~~,	~~۱۵~~,	~~۱۶~~,	۱۷,	~~۱۸~~,	۱۹,	~~۲۰~~,
~~۲۱~~,	~~۲۲~~,	۲۳,	~~۲۴~~,	~~۲۵~~,	~~۲۶~~,	~~۲۷~~,	~~۲۸~~,	۲۹,	~~۳۰~~,
۳۱,	~~۳۲~~,	~~۳۳~~,	~~۳۴~~,	~~۳۵~~,	~~۳۶~~,	۳۷,	~~۳۸~~,	~~۳۹~~,	~~۴۰~~,
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

این‌روش‌غربال‌کردن‌تدریجی‌عددها، دربیش‌از ۲۰۰۰ سال‌پیش‌به‌وسیلهٔ اراتوستن (سالهای ۲۷۶-۱۹۶ پیش ازمیلاد)، درنظرگرفته شد. اراتوستن روی مضربهای۲،۳،۵ و غیره را خط‌نمی‌کشید، بلکه‌آنها را بایك‌چوب کوچك، سوراخ می‌کرد. مثل اینکه عددهای غیراول را، از سوراخهای غربال بیرون می‌کرد وتنها عددهای اول را نگاه می‌داشت. تا امروز هم این روش بدست‌آوردن عددهای اول را، غربال اراتوستن می‌نامند.

این روش، همانطورکه می‌بینید، بسیاردقیق وقابل اعتماد است.

باکار دسته جمعی و به‌تدریج ، جدول عددهای اول در فاصلهٔ ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰۰، وحتی بعضی فاصله‌های بعد ازآن،آمـــاده شد. د. لهمر ریاضیدان امریکایی، برای تهیهٔ این جدول، تحقیق و بررسی درستی آن و بالاخره چاپ‌آن، زحمت زیادی‌کشید (این جدول درسال ۱۹۱۴ چاپ شد). ۲۰ سال‌پیش از لهمر، همین جدول‌را باهمین حجم (تا ۱۰ملیون)، ایوان میخایه‌ویچ پروشین نیز تنظیم وآنرا به‌آکادمی علوم روسیه هدیه کرده بود. دستنویس پروشین تا امروز، دربایگانی‌آکادمی علوم‌روسیه نگاهداری شده است، ولی هرگز چاپ نشد.

یاکوب فیلیپ کولیك ، استاد دانشگـاه پراگ هم‌کـار محاسبه‌ای عظیمی دربارهٔ عددهای اول، انجام داده است. او جدول عددهای اول‌را تا ۱۰۰ ملیون تنظیم‌کرد (۶جلد عددهای اول و مقسوم علیه‌های‌عددهای مرکب). از سال ۱۸۶۷، جدولهای کولیك درکتابخانهٔ مخصوص‌آکادمی علوم وین نگاهداری می‌شود. متأسفانه ، یکی از جلدهای جدول کولیك که شامل‌عددهای‌از۱۳ ملیون تا ۲۳ملیون است،گم‌شد.بازسازی‌عددهای ازدست‌رفتهٔ‌کولیك‌وتحقیق درستی عددهای عظیمی‌که درجدول او وجود دارد، کارساده‌ای‌نیست.

در سالهـای ۳۰ سدهٔ اخیـر، واسیلی‌آنتونویچ‌گالوبو، دانش‌آمـوز دبیرستانی، برای تنظیم جدول عددهای اول، «الگوهایی» درست کردکه کار محاسبه را ساده و تا حـدی از اشتباه جلـوگیری می‌کند .گالوبو درسال ۱۹۳۹، به‌کمك «الگوهای» خود،کوچکترین مقسوم‌علیه‌های اول همهٔ عددهای یازدهمین ملیون و درسال ۱۹۴۱، دوازدهمین ملیـون را، مشخص‌کرد. او، جدولهایی راکه بدست‌آورده است، به آکادمـی علوم شوروی، واگذارکرده است.

جدا از جدولها هم، عددهای اول بزرگی، اینجا وآنجا پیدا شده

است. مثلاً پرودشین درسال ۱۸۸۳ ثابت کرد که عدد

$$۲^{۶۱}-۱=۲\,۳۰۵\,۸۴۳\,۰۰۹\,۲۱۳\,۶۹۳\,۹۵۱$$

عددی است اول. همچنین عدد

$$۲^{۱۲۷}-۱=۱۷۰\,۱۴۱\,۱۸۳\,۴۶۰\,۴۶۹\,۲۳۱\,۷۳۱\,۶۸۷\,۳۰۳$$

$$۷۱۵\,۸۸۴\,۱۰۵\,۷۲۷$$

بزرگترین عدد اولی است که تا امروز شناخته‌شده است. در لوس آنجلس به‌کمك کامپیوترهای معاصر، توانسته‌اند عددکوه‌پیکر زیر را، که‌عددی است اول، بدست‌آورند:

$$۲^{۲۲۸۱}-۱$$

که در زمان ما، بزرگترین عدد اول شناخته شده است.

پرودشین، علاوه براین‌ثابت کردکه‌عدد $۲^{۲^{۲۳}}+۱$ ، عددی‌است غیر-اول وبرعدد ۱۶۷۷۷۲۱۶۱، بخش‌پذیر است. عدد $۲^{۲^{۲۳}}+۱$ ، دارای‌تعداد ۲۵۲۵۲۲۳ رقم‌است. نتیجه‌گیری پرودشین ، درآکادمیهای پترزبورگ وپاریس، مورد تحقیق و تأیید قرارگرفت.

همین اواخر ، م. ای. سلوبودسکی ، وقتی‌که هنوز دانشجو بود، کوشش پرزحمت و زیادی دربارهٔ پیداکردن مقسوم علیه‌های بسیاری از عددهای به‌صورت $۲p+۱$، متحمل شد. اوقضیهٔ جالبی را مستقلاً کشف و ثابت‌کردکه بنابرآن می‌توان مقسوم‌علیه عدد $۲p-۱$ را ، به ازای مقادیر مختلف p پیداکرد. مثلاً او ثابت کرد عدد $۲^{۲۳۳۱}-۱$ ،که دارای‌بیش‌اویك‌ونیم‌میلیون‌رقم است، برعدد ۱۰۰۰۴۶۶۳، بخش‌پذیر است.

البته ، ریاضیدانها، نمی‌توانند با این روش ابتدایی جستجـــوی عددهای اول، آشتی کنند. آنها به دنبال رابطه‌ای هستند، که به‌کمك آن بتوانند به ازای هرمقدار صحیح n ، تنها عددهای اول را بدست آورند. ولی افسوس که چنین رابطه‌ای، حکم وجود «سیمرغ» را دارد و تاکنون کسی نتوانسته است به آن دست یابد.

۳۵۷. غربالهای تازه برای عددهای اول

در دوهزارسالی کـه زمان ما را، از زمان اراتوستن جدا می‌کند ، روش «الك‌کردن» عددهای اول، از به‌کاربردن «غربال» ساده و ابتدایی تا استفاده ازماشینهای الکترونی محاسبه، تکامل پیداکرده است.[۱]

ولی، برای‌نیازهای‌کوچك، همیشه می‌توان ازهمان «غربال‌دستی» استفاده‌کرد. منتهی این غربال هم به تدریج، بعضی پیشرفتها پیدا کرده و روش‌جستجوی عددهای اول‌را ساده‌ترکرده است. مثلاً ، س.پ.سوندار دانشجوی ریاضی هندی، درسال ۱۹۴۴، یکی ازاین «غربالهای» جدیدرا درست‌کرده است:

۱۹...	۱۶	۱۳	۱۰	۷	۴
۳۲...	۲۷	۲۲	۱۷	۱۲	۷
۴۵...	۳۸	۳۱	۲۴	۱۷	۱۰
۵۸...	۴۹	۴۰	۳۱	۲۲	۱۳
۷۱...	۶۰	۴۹	۳۸	۲۷	۱۶
۸۴...	۷۱	۵۸	۴۵	۳۲	۱۹

۱) این ماشینهای محاسبه، می‌توانند تا ۱۰۰۰۰۰۰ عمل حساب را در هرثانیه، انجام دهند.

این «غربال» ازبی نهایت تصاعد حسابی نامحدود درست شده است، که جملهٔ اول‌آنها، به‌ترتیب جمله‌های تصاعد اول است:

۴، ۷، ۱۰، ۱۳، ۱۶، ۱۹،...

قدر نسبت این تصاعدها، به‌ترتیب عددهای فرد متوالی‌اندکه از ۳شروع شده باشد:

$$d_1=3,\ d_2=5,\ d_3=7,\ d_4=9,\ldots$$

اگر عددی مثل N دراین جدول وجود داشته باشد، بدون تردید، عدد $2N+1$ غیر اول است. و اگر عدد N ، دراین جدول وجود نداشته باشد، $2N+1$ عددی است اول.

چند مثال. ۱) درجدول، عدد $N=3$ وجود ندارد، بنابراین $2N+1=7$ ، عددی است اول:

۲) درجدول، عدد $N=5$ وجود ندارد، بنابراین $2N+1=11$ عددی است اول.

۳) عدد $N=6$ هم درجدول نیست، بنابراین $2N+1=13$ ، عددی اول است.

۴) عدد $N=7$ در جدول وجود دارد، بنابراین $2N+1=15$، عددی است غیر اول وغیره.

با تبدیل‌تمام عددهای N ،که در جدول نیستند، به‌عدد $2N+1$ می‌توان همهٔ عددهای اول ، به‌جز ۲، را بدست‌آورد.

چگونه‌می‌توان‌ثابت‌کردکه عدد $2N+1$ ، برای حالتی‌که N در جدول وجود دارد، غیراول و برای حالتی‌که N درجدول وجود ندارد، عددی اول است؟

نمونهٔ دیگری از «غربال»

می‌دانیم که‌عدد فرد N ، در تقسیم بر۶، باقیمانده‌ای مساوی ۱، ۳ یا ۵ دارد. اگرباقیماندهٔ تقسیم عدد فرد N بر ۶ مساوی۳ باشد،عددی غیر اول است (بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود)، و این به معنای‌آنست‌که عددهای اول را باید بین‌آنهاییکه‌که به‌صورت ۶n±۱ هستند؛ جستجو کرد (درتقسیم بر ۶، باقیماندهٔ ۵، معادل است با باقیماندهٔ ۱ −). هیروسلاوسا۱وکوپ (ازپراگ)، مهندس ارتباطات، براساس این وضع، در درسال ۱۹۵۴، این جدول («غربال») را تشکیل داده است:

۶n+۱ غیر اول است	۹۶±۸				
	۷۲±۷	۵۴±۶			n=
	۴۸±۶	۳۶±۵	۲۴±۴		
	۲۴±۵	۱۸±۴	۱۲±۳	۶±۲	
	۰±۴	۰±۳	۰±۲	۰±۱	
۶n−۱ غیر اول است	۲۴±۳	۱۸±۲	۱۲±۱	۶±۰	
	۴۸±۲	۳۶±۱	۲۴±۰		n=
	۷۲±۱	۵۴±۰			
	۹۶±۰				

سطری‌که در وسط جدول قرارگرفته‌است، نقشی ندارد: این خط تنها جدول را به دوقسمت بالا و پایین تقسیم می‌کند. وقتی‌که عدد n در قسمت پایین جدول وجود نداشته باشد، ۶n − ۱ عددی است اول.

همچنین، عدد $۶n+۱$ وقتی اول است که عدد n درقسمت بالای جدول وجودنداشته باشد.

مثلاً، عدد $n=۱۳$ درقسمت بالای جدول نیست، بنابراین $۶\times۱۳+۱$، یعنی ۷۹ عددی است اول؛ درقسمت‌پایین‌جدول $n=۱۳$ وجود دارد، بنابراین $۶\times۱۳-۱$، یعنی ۷۷ عددی غیراول است. عدد ۱۴۹، عددی اول است، زیرا داریم: $۶\times۲۵-۱=۱۴۹$، ولی عدد $n=۲۵$ درقسمت پایین جدول پیدا نمی‌شود.

جدول را باید به‌این‌ترتیب تشکیل داد: درقسمت‌بالای جدول، هر عدد n به این صورت است:

$$n=۶km\pm(k+m) \qquad (k=۱,۲,۳,\ldots;\ m=۰,۱,۲,\ldots,k)$$

و در قسمت پایین:

$$n=۶km\pm(k-m) \qquad (k=۱,۲,۳,\ldots,\ m=۰,۱,۲,\ldots,k)$$

وقتی‌که $n=۶km\pm(k+m)$ باشد، برای $۶n+۱$ داریم:

$$۶u+۱=(۶k\pm۱)(۶m\pm۱)$$

که‌عددی غیراول است؛ همچنین، وقتی‌که $n=۶km\pm(k-m)$ باشد، داریم:

$$۶n-۱=(۶k\mp۱)(۶m\pm۱)$$

که بازهم عددی غیر اول است.

برعکس، فرض‌کنید، عدد $N=۶n+۱$، غیر اول باشد. در اینصورت، این عدد ازدوعامل فرد تشکیل‌شد، است که لااقل یکی‌ازآنها

اول و بنابراین به‌صورت $۶m \pm ۱$ است(همهٔ عددهای اول، ازپنج‌به‌بعد به اینصورت‌اند). عامل دوم هم نمی‌تواند به‌صورت دیگری، غیر از $۶k \pm ۱$ باشد (زیرا، درحالت عکس، حاصلضرب‌آنها به‌صورت $۶n \pm ۱$ در نمی‌آید). به این ترتیب

$$۶n+۱=(۶k \pm ۱)(۶m \pm ۱)$$

(علامتها را باهم مثبت یا باهم منفی بگیرید) ، ازآنجا

$$n=۶km \pm (k+m)$$

به همین ترتیب، وقتی‌که $N=۶n-۱$ ، عددی مرکب باشد، داریم:

$$۶n-۱=(۶k \pm ۱)(۶m \mp ۱), \qquad n=۶km \pm (k-m)$$

۳۵۸. پنجاه عدد اول اولیه

۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	۲۳	۲۹
۳۱	۳۷	۴۱	۴۳	۴۷	۵۳	۵۹	۶۱	۶۷	۷۱
۷۳	۷۹	۸۳	۸۹	۹۷	۱۰۱	۱۰۳	۱۰۷	۱۰۹	۱۱۳
۱۲۷	۱۳۱	۱۳۷	۱۳۹	۱۴۹	۱۵۱	۱۵۷	۱۶۳	۱۶۷	۱۷۳
۱۷۹	۱۸۱	۱۹۱	۱۹۳	۱۹۷	۱۹۹	۲۱۱	۲۲۳	۲۲۷	۲۲۹

۳۵۹. راه دیگری برای پیداکردن عددهای اول

عدد ۱ و n عدد اول اولیه را درنظرمی‌گیریم . همهٔ این عددها را به ترتیب دلخواهی ، به دوگروه تقسیم می‌کنیم. عددهای هرگروه‌را درهم ضرب می‌کنیم. به این ترتیب ، دوحاصلضرب بدست می‌آید . اگر مجموع یاتفاضل این دوحاصلضرب(که‌آنرا N می‌نامیم) ازمجذور

$(n+1)$امین عدد اول، کوچکتر باشد، در اینصورت، N عددی است اول.

مثلاً، عدد ۱ وچهار عدد اول اولیه را درنظر می‌گیریم: ۱، ۲، ۳، ۵ و ۷. پنجمین عدد اول مساوی ۱۱ می‌باشد، که مجذور آن ۱۲۱ است. یعنی با این روش، می‌توانیم عددهای اول کوچکتر از ۱۲۱ را معین کنیم.

عددهای انتخابی را به دو گروه تقسیم می‌کنیم: ۲، ۳، ۵، ۷ (گروه اول)؛ ۱ (گروه دوم)، عدد $۱-۷\times۵\times۳\times۲$، یعنی ۲۰۹، از ۱۲۱ بزرگتر است، بنابراین نمی‌توان فهمید که آیا این عدد اول است یا غیر اول. در واقع، درجدول عددهای اول، این عدد وجود ندارد.

عددهای انتخابی را به نحو دیگری به دو گروه تقسیم می‌کنیم: ۱، ۳، ۵، ۷ (گروه اول)؛ ۲ (گروه دوم). دو عدد را تشکیل می‌دهیم:

$$N_۱=۱\times۳\times۵\times۷-۲=۱۰۳,$$
$$N_۲=۱\times۳\times۵\times۷+۲=۱۰۷$$

هرکدام ازین دو عدد از ۱۲۱ کوچکترند، بنابراین هردوی آنها، عددهایی اول هستند. در واقع، اگر اینها، اول نباشند، باید قابل تجزیه به عاملهای اول باشند، ولی از طرز تشکیل این عددها معلوم است که هیچکدام از آنها بر ۲، ۳، ۵ یا ۷ بخش‌پذیر نیستند. روشن است که این عددها، برعدد اول بعد از آنها، یعنی ۱۱ هم بخش‌پذیر نیست.

در واقع، اگر $N_۱$ یا $N_۲$ بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد، چون هرکدام از آنها از ۱۲۱ کوچکترند، باید خارج‌قسمت از ۱۱ کوچکتر شود وبنابراین نمی‌تواند عامل اولی به جز ۲، ۳، ۵ یا ۷ داشته باشد. در حالیکه قبلاً گفتیم که هیچکدام ازاین چهارعدد، عامل $N_۱$ یا $N_۲$ نیستند.

اگر درگروه اول، عددهای ۱، ۵ و ۷ و درگروه دوم، عددهای ۲ و ۳ را قرار می‌دادیم، می‌توانستیم دوعدد اول دیگر بدست آوریم:

$$۱\times۵\times۷+۲\times۳=۴۱, \qquad ۱\times۵\times۷-۲\times۳=۲۹,$$

و یا، با تغییر عددهای گروهها:

$$۱\times۳\times۷+۲\times۵=۳۱, \qquad ۱\times۳\times۷-۲\times۵=۱۱,$$

$$۱\times۲\times۳\times۵+۷=۳۷,۰۰۰, \qquad ۱\times۲\times۳\times۵-۷=۲۳,$$

روشن است که می‌توان هرعامل گروه اول یا گروه دوم را باتوان دلخواهی درنظر گرفت. تنها شرطی که برای اول‌بودن مجموع یا تفاضل حاصلضرب وجود دارد، همانست که ازمجذور عدد اول $(n+۱)$ام کوچکتر باشند:

$$۱\times۳\times۵\times۷+۲^{۳}=۱۱۳, \qquad ۱\times۳\times۵\times۷-۲^{۳}=۹۷,$$

$$۱\times۵\times۷+۲\times۳^{۲}=۵۳, \qquad ۱\times۵\times۷-۲\times۳^{۲}=۱۷,$$

$$۱\times۳\times۵^{۲}+۲^{۲}\times۷=۱۰۳,۰۰۰, \qquad ۱\times۳\times۵^{۲}-۲^{۲}\times۷=۴۷,$$

به این ترتیب، مثلاً تنها با استفاده از سه‌عدد ۱، ۲و۳، می‌توان همهٔ عددهای اول کوچکتر از ۲۵ را بدست آورد. شما می‌توانید، بدون اینکه به اشکالی برخورد کنید، به‌کمك این روش عددهای اول را پیدا کنید.

۳۶۰. چند عدد اول؟

جدول عددهای اول پایانی ندارد. تعداد عددهای اول، بی‌نهایت است. این مطلب را حتی اقلیدس ثابت کرده است (واین اثبات درهر کتاب درسی وجود دارد). ولی پراکندگی عددهای اول درمیان عددهای طبیعی، بسیار نامتناسب است. ده عدد طبیعی اولیه. شامل ۴ عدد اولند، یعنی ۲۵٪ دریك میلیون عدد طبیعی اولیه، تنها ۸٪ عدد اول وجود دارد و غیره. چگونه می‌توان معین کرد، لااقل به تقریب، که درفاصلهٔ عددهای

طبیعی از ۱ تا N ، چند عدد اول وجود دارد؟

این یکی از پرسشهای دشوار است و تا امروز رابطهٔ دقیقی برای آن پیدا نشده‌است. ولی، رابطه‌ای وجود دارد که تعداد عددهای اول را، که بین عددهای طبیعی از ۱ تا N قرار گرفته‌اند، به‌تقریب بدست می‌دهد:

$$n \approx \frac{۰/۴۳۴۲۹}{\log N} \cdot N$$

B. عددهای فیبوناچی

۳۶۱. مسابقهٔ عمومی

در ابتدای سدهٔ سیزدهم ، در درشهر پیزا (ایتالیا) ، لئوناردو (که معمولاً به دنبال نام او، پیزایی را هم اضافه می‌کنند) متخصص بزرگ رابطه‌های عددی و محاسب‌هنرمند، زندگی می‌کرد. اورافیبوناچی هم می‌نامندکه به معنای پسر بوناچی است. او درسال ۱۲۰۲، کتابی به زبان لاتینی چاپ کرد، که درآن همهٔ آگاهیهایی راکه درآن زمان در بارهٔ حساب و جبر وجود داشت، جمع کرده بود.[1] این یکی از نخستین کتابها دراروپاست که آموزش خودرا براساس استفاده ازدستگاه اعشاری شمار می‌دهد. کتاب لئوناردوی پیزایی به طور گسترده‌ای پخش شد ودر جریان بیش او دو سده، معتبرترین منبع در زمینهٔ عددها بود.

بنابر عادت آن زمان ، فیبوناچی در مسابقه‌های ریاضی شرکت می‌کرد (مسابقهٔ عمومی مربوط به بهترین و سریع‌ترین راه حلهای

---

1) Incipit Liber, Abbaci compositus a Leonardo filius Bonacci Pisano

مسأله‌های دشوار). لئوناردو ، با حل هنرمندانهٔ مسأله‌های عددی، همه‌را به حیرت می‌انداخت.

شهرت فیبوناچی باعث شدکه فردریك دوم، قیصر امپراطوری‌روم (درسال ۱۲۲۵)، اورا برای مسابقهٔ‌عمومی‌گروه ریاضیدانها،دعوت‌کند، یکی از مسأله‌هایی‌که به مسابقه‌گذاشته شد، دارای این محتوی بود:

مجذورکاملی پیدا کنیدکه چه ۵ واحد به‌آن اضافه وچه ۵ واحد ازآن کم کنیم، حاصل بازهم مجذورکامل باشد.

فیبوناچی ، بعد ازکمی فکر، این عدد را پیداکرد؛ این، یك‌عدد کسری بود:

$$\left(\frac{۴۱}{۱۲}\right)^۲ \quad \text{یا} \quad \frac{۱۶۸۱}{۱۴۴}$$

در واقع داریم:

$$\frac{۱۶۸۱}{۱۴۴}+۵=\frac{۲۴۰۱}{۱۴۴}, \qquad \frac{۱۶۸۱}{۱۴۴}-۵=\frac{۹۶۱}{۱۴۴}=$$

به عبارت دیگر:

$$\left(\frac{۴۱}{۱۲}\right)^۲+۵=\left(\frac{۴۹}{۱۲}\right)^۲, \qquad \left(\frac{۴۱}{۱۲}\right)^۲-۵=\left(\frac{۳۱}{۱۲}\right)^۲$$

ما نمی‌دانیم‌که فیبوناچی چگونه مسأله را درموقع مسابقه حل کرده است، ولی اینرا می‌دانیم‌که اوبه‌طور درخشانی ازعهدهٔ حل‌مسأله برآمده است.

درکتاب گ.ن. پوپوف به نام مسأله‌های تاریخی (چاپ ۱۹۳۲) ، این حل برای این مسأله داده شده است. بنابر شرط داریم:

$$x^۲+۵=u^۲, \qquad x^۲-۵=v^۲$$

از آنجا

$$u^۲-v^۲=۱۰$$

ولی $\frac{۸۰\times۱۸}{۱۲۲}=۱۰$ ، یعنی

$$(u+v)(u-v)=\frac{۸۰\times۱۸}{۱۲۲}$$

فرض می‌کنیم:

$$u+v=\frac{۸۰}{۱۲}, \qquad u-v=\frac{۱۸}{۱۲}$$

که از آنجا بدست می‌آید

$$u=\frac{۴۹}{۱۲}, \qquad v=\frac{۳۱}{۱۲}, \quad x=\frac{۴۱}{۱۲}$$

ممکن است که فیبوناچی هم در مسابقه، مسأله را به همین‌ترتیب حل‌کرده باشد، ولی دراین‌صورت تصور عددی نیرومندی لازم است، تا بـه‌کمك آن بتوان ۱۰ را به‌صورت کسر $\frac{۸۰\times۱۸}{۱۲۲}$ نوشت. این فرض، به‌خصوص در شرایط مسابقه، بسیار بعید به‌نظر می‌رسد. ممکن است که این جواب نتیجهٔ کار طولانی‌تر و تفکر بیشتر بوده است.

مهنـدس ن . د. نیکیفورف راه حلی بـرای حالت کلی این مسألـه پیشنهاد کرده است، که ما باکمی تغییر آنرا می‌آوریم.

فرض کنید، عدد مورد نظر، کسری به‌صورت $\frac{x^۲}{y^۲}$ و مقـدار تغییـر آن مساوی r باشد (که درحالت خاص $r=۵$ بود)، داریم:

$$\frac{x^۲}{y^۲}+r=\frac{x^۲+ry^۲}{y^۲}, \qquad \frac{x^۲}{y^۲}-r=\frac{x^۲-ry^۲}{y^۲}$$

که بنا بر فرض باید $x^۲+ry^۲$ و $x^۲-ry^۲$ هم مجذور کامل باشد. فرض می‌کنیم:

$$x^۲+ry^۲=(x+a)^۲ \qquad (۱)$$

$$x^۲-ry^۳=(x-b)^۲ \qquad (۲)$$

از جمع دو رابطهٔ (۱) و (۲) بدست می‌آید:

$$x=\frac{a^۲+b^۲}{۲(b-a)} \qquad (۳)$$

اگر این مقدار x را دریکی از دورابطهٔ (۱) یا (۲) قرار دهیم، رابطه‌ای بدست می‌آیدکه می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$a.\frac{a+b}{۲}.b=\frac{b-a}{۲}.r.y^۲ \qquad (۴)$$

متذکر می‌شویم که $b>a$ است و همچنین عددهای a ، $\frac{a+b}{۲}$ و b ، تشکیل یك تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=\frac{b-a}{۲}$ می‌دهند. اگرمقادیر دلخواهی‌برای a و b درنظر بگیریم $(b>a)$، به‌کمك‌رابطهٔ (۴)می‌توان مقادیر مناسبی برای r و y پیدا کرد و سپس، با استفاده از رابطهٔ (۳)، x را بدست آورد.

طبیعی‌تر اینست که تصاعد را از عددهای طبیعی و با قدرنسبت $d=۱$ انتخاب کنیم. دراینصورت اگر $a=n-۱$ باشد، که درآن n عددی طبیعی است، رابطه‌های (۴) و (۳) به‌اینصورت در می‌آیند:

$$(n-۱)n(n+۱)=ry^۲ \qquad (۵)$$

$$x=\frac{n^۲+۱}{۲} \qquad (۶)$$

اگر $n=۲$ فرض کنیم، سمت‌چپ رابطهٔ(۵) ، مساوی$۱\times۲\times۳$ می‌شود. این عدد را به‌صورت ۶×۱^۲ می‌نویسیم. از مقایسهٔ این عددبا مقدار سمت راست تساوی (۵)، نتیجه می‌گیریم که $r=۶$ و $y=۱$؛ و طبق رابطهٔ (۶) بدست می‌آید $x=\frac{۵}{۲}$ به‌این ترتیب معلوم‌می‌شودکه‌عدد

$$\left(\frac{x}{y}\right)^۲=\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲$$

چنانست‌که اگر ۶ واحد به آن اضافه یا ازآن‌کم‌کنیم، بازهم مجذور کامل باقی می‌ماند.

اگر $n=۷$ بگیریم، سمت چپ رابطهٔ (۵)، مساوی $۶\times۷\times۸$ می‌شودکه می‌توان‌آنرا به‌صورت ۲۱×۴^۲ نوشت. از مقایسهٔ این عدد با مقدار سمت راست رابطهٔ (۵)، معلوم می‌شودکه $r=۲۱$ و $y=۴$ واز رابطهٔ (۶) بدست می‌آید: $x=۲۵$. به این ترتیب، عدد $\left(\frac{۲۵}{۴}\right)^۲$ ، با اضافه یا کم‌کردن ۲۱، همچنان مجذورکامل باقی می‌ماند.

همانطورکه می‌بینید، با انتخاب مقدار دلخواهی برای $n>۱$ ، در رابطهٔ (۵)، همیشه می‌توان برای r و $\frac{x}{y}$ ، چنان‌عددهایی پیدا کردکه برای آنها، مسألهٔ ما قابل حل باشد (این‌هم لازم است‌که $r>\frac{x^۲}{y^۲}$ باشد).

روشن‌است‌که‌وقتی‌رابطهٔ(۵)برای‌مقادیرمختلف n و y ، ولی‌یك‌مقدارr ، برقرار باشد، دراینصورت به ازای هرمقدار r ، مقادیر مختلفی می‌توان برای عددهای مجهول بدست‌آورد. مثلاً ، وقتی $r=۶$ باشد، علاوه بر $\left(\frac{۵}{۲}\right)^۲$ ، عدد $\left(\frac{۱۲۰۱}{۱۴۰}\right)^۲$ هم برای عدد مورد نظر، پیدا می‌شود. عدد اخیر

از رابطه‌های (۵) و (۶) و به‌ازای $n=۴۹$ بدست می‌آید.

اگر $r=۵$ باشد (همانطورکه درمسألهٔ فیبوناچی بود)، عدد $\left(\frac{۴۱}{۱۲}\right)^۲$ از رابطه‌های (۵) و (۶) و به ازای $n=۹$ بدست می‌آید. فیبوناچی، جواب دیگری برای مسألهٔ مسابقه‌ای ($r=۵$) نمی‌دهد، ولی بدون‌تردید چنین جوابهایی وجود دارد. رابطه‌های نیکیفورف، به‌سادگی راه پیدا کردن این عددها را نشان می‌دهد. اگر به ازای مقدار مفروضی از r، عددی که‌درشرطهای مسأله‌صدق‌کند، بدست‌آمده‌باشد، با استفاده ازهمین جواب، می‌توان جوابهای دیگری هم (به‌هرتعدادکه بخواهیم)، بدست آوریم. این مطلب را روی نمونه جوابی که در مسألهٔ مسابقه‌ای، داده شده است، نشان می‌دهیم.

سه عدد داریم:

$$\left(\frac{۴۱}{۱۲}\right)^۲,\quad \left(\frac{۴۱}{۱۲}\right)^۲+۵=\left(\frac{۴۹}{۱۲}\right)^۲,\quad \left(\frac{۴۱}{۱۲}\right)^۲-۵=\left(\frac{۳۱}{۱۲}\right)^۲$$

روشن است‌که $\left(\frac{۳۱}{۱۲}\right)^۲$، $\left(\frac{۴۱}{۱۲}\right)^۲$، $\left(\frac{۴۹}{۱۲}\right)^۲$، خودتشکیل یك‌تصاعدحسابی با قدرت نسبت ۵، می‌دهند، بنابراین خود اینها می‌توانند برای مقادیر a، $\frac{a+b}{۲}$ و b، برای رابطهٔ (۴) انتخاب شوند. چون، علاوه براینها $\frac{b-a}{۲}=۵$ و $r=۵$، رابطهٔ (۴) منجر به‌یك جواب‌گویا برای y وبنابر این یك جواب برای عدد مورد نظر، می‌شود، در واقع، بنابر رابطهٔ (۴) داریم:

$$\left(\frac{۳۱}{۱۲}\right)^۲ \cdot \left(\frac{۴۱}{۱۲}\right)^۲ \cdot \left(\frac{۴۹}{۱۲}\right)^۲ = ۵^۲y^۲$$

و ازآنجا

$$y = \frac{۳۱ \times ۴۱ \times ۴۹}{۵ \times ۱۲ \times ۱۲ \times ۱۲}$$

وبنا بر رابطهٔ (۳)

$$x = \frac{\left(\frac{۳۱}{۱۲}\right)^۴ + \left(\frac{۴۹}{۱۲}\right)^۴}{۲۰} = \frac{۳۳۴۴۱۶۱}{۱۴۴^۲ \times ۱۰}$$

که باتقسیم x بر y ، به عدد $\frac{۳۳۴۴۱۶۱}{۱۴۹۴۶۹۶}$ می‌رسیم. بنابراین عدد

$$\left(\frac{۳۳۴۴۱۶۱}{۱۴۹۴۶۹۶}\right)^۲$$

جواب دوم در مسألهٔ مسابقه‌ای است. دراین حالت

$$\left(\frac{۳۳۴۴۱۶۱}{۱۴۹۴۶۹۶}\right)^۲ - ۵ = \left(\frac{۱۱۳۲۷۹}{۱۴۹۴۶۹۶}\right)^۲$$

$$\left(\frac{۳۳۴۴۱۶۱}{۱۴۹۴۶۹۶}\right)^۲ + ۵ = \left(\frac{۴۷۲۸۰۰۱}{۱۴۹۴۶۹۶}\right)^۲$$

دو مجذورکامل اخیر را می‌توان دوباره به عنوان مقادیر a و b در رابطه‌های (۴) و (۳) قرار داد و جواب سوم مسألهٔ مسابقه‌ای را پیدا کرد :

$$\left(\frac{۲۴۹۸۵۰۵۹۴۰۴۷۲۷۱۵۵۸۳۶۴۴۸۰۶۴۱}{۵۳۵۴۲۲۹۸۶۲۸۲۱۶۰۲۰۹۲۲۹۱۲۴۸}\right)^۲$$

و غیره .

دومسأله، برای اینکه خودتان حل کنید (بدون جواب):

مسألهٔ ۱. ثابت کنید که به ازای $a=z-1$ و $d=1$ و $\frac{b-a}{2}=d=1$

رابطه‌های (۳) و (۴)، به اتحاد زیر تبدیل می‌شود:

$$(z^2+1)^2\pm 4z(z^2-1)=[(z\pm 1)^2-2]^2$$

که با انتخاب عددی دلخواه برای z ، می‌توانید جوابهای مختلفی برای مسأله‌های شبیه مسألهٔ مسابقه‌ای، پیدا کنید.

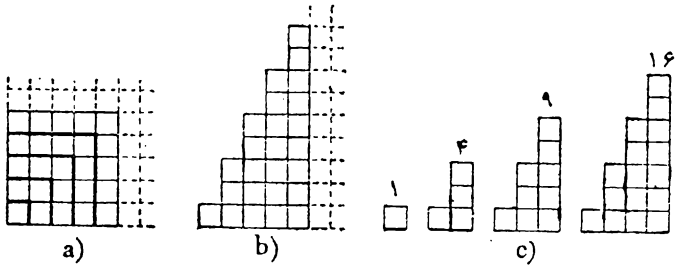
مسألهٔ ۲. آیا این حکم درست است که مسألهٔ مسابقه‌ای، به ازای $r=7$ در میدان عددهای حقیقی جواب ندارد؟

* * *

بعید نیست که حدس ویاچسلاو ـ نزابودکین ، دانشجوی انستیتوی صنعتی، دربارهٔ راه‌حل فیبوناچی ، درست باشد، او می‌گوید:

ـ آیا فیبوناچی ، برای حل مساله‌ای که دربرابرش گذاشته‌اند ، از تصور هندسی مربعهای کامل، بـه عنوان مجموع عددهای فرد متوالـی، استفاده نمی‌کند (مسألهٔ ۳۵۲ ـ IX را ببینید)؟

ویاچسلاو نزابودکین بـراساس ایـن فرض ، جـواب اصلـی مسألهٔ فیبوناچی را پیدا می‌کند. جالب بودن این روش دراینست که به‌روشهای مورد استفاده در دوران فیبوناچی ، خیلی نزدیك است. دراینجـا، ایـن روش را ، با جزیی تفاوتهایی می‌آوریم.



مربوط به مسألهٔ ۳۶۱. عددهای صحیح مجذورکامل

اگر نوارهای شکسته‌ای راکه با اضافه‌کردن به مربع واحد، همیشه مربعهای کاملی به وجود می‌آورند (شکل a) ، به صورت نوارهای مستقیم درآوریم، یك شکل پله‌ای با بی‌نهایت پله بدست می‌آیدکه هر پلهٔ آن به اندازهٔ ۲ خانه، ارتفاع دارد (شکل b). اگر این شکل را در طول هرستون، قطع کنیم، یك رشته شکلهای پله‌ای بدست می‌آید،که معرف عددهای‌صحیح مجذورکامل‌اند (شکل c).

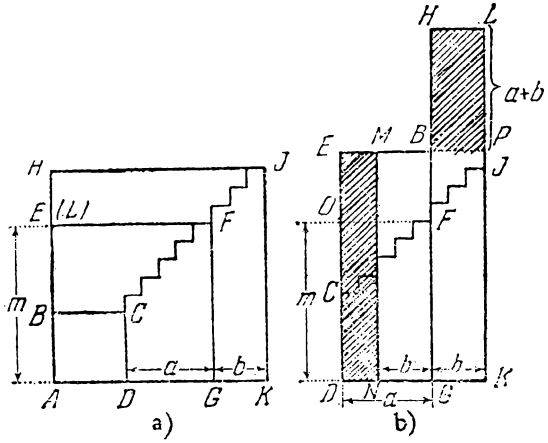
شکل نشان می‌دهدکه بین عددهای صحیح مجذورکامل،نمی‌توان عددهایی پیداکردکه در شرطهای مسألهٔ فیبوناچی صدق کنند.

بنابراین، عددموردنظر به‌صورت $\frac{m^۲}{n^۲}$ است. با اضافه کردن وکم کردن ۵ واحد، بدست می‌آید:

$$\frac{m^۲-۵n^۲}{n^۲},\ \frac{m^۲}{n^۲},\ \frac{m^۲+۵n^۲}{n^۲}$$

بنابرشرط ، عددهای $m^۲-۵n^۲$ ، $m^۲$ و $m^۲+۵n^۲$ ،عددهایی صحیح و مجذورکامل‌اند. این عددها وقتی وجود دارند که نوارهای

هم ارز BEFGDC و EHJKGF درردیف‌هم‌وجود داشته‌باشند (شکل a)، به نحوی‌که تعداد خانه‌ها، درهرکدام ازآنها مساوی $5n^2$ باشد. در اینصورت، اگر ازعدد مجذورکامل AEFG (m^2)، نوار BEFGDC ($5n^2$) راکم‌کنیم، عدد مجذورکامل ABCD (m^2-5n^2) بدست می‌آید، و اگر به عدد AEFG ، نوار EHJKGF ($5n^2$) را اضافه کنیم،عدد مجذورکامل AHJK (m^2+5n^2) بدست‌می‌آید. این‌عددها را پیدا کنید.



مربوط به مسألهٔ ۳۶۱. فیبوناچی ممکن است به‌این ترتیب حل‌کرده باشد.

نوارها را روی‌پلکان CFJ می‌بریم (هرپله،ضلع یك خانه‌است) و از قسمتهایی که بدست می‌آید، مستطیلهای DEBG و GHLK را می‌سازیم (شکل b).

$GN=KG=b$ را جدا می‌کنیم و NM را موازی DE رسم می‌کنیم. دراینصورت،چون DEBGوGHLK هم‌ارزند،مساحت BHLP

مساحت DEMN مساوی می‌شود. دراینصورت داریم:

$$\frac{\text{مساحت DEBG}}{\text{مساحت DEMN}}=\frac{a}{a-b} \Rightarrow \frac{۵n^۲}{b(a+b)}=\frac{a}{a-b}$$

و بنابراین $n^۲=\frac{ab(a+b)}{۵(a-b)}$.

طبیعی‌است فرض کنیم که مثلاً a مضربی از ۵ باشد: $a=۵k$ ، که درآن k می‌تواند مساوی هرعدد طبیعی باشد. در اینصورت، بدست می‌آید: $n^۲=\frac{kb(۵k+b)}{۵k-b}$ و $b=۴k$ ، تنهامقدارممکن برای b است که این کسر را به مجذورکامل یك عدد صحیح تبدیل می‌کند و ضمناً $n=۶k$ می‌شود.

به این ترتیب : $a=۵k$ ، $b=۴k$ و $n=۶k$. مخرج کسرمورد نظر $n^۲=(۶k)^۲$ می‌شود. صورت کسر، یعنی $m^۲$ راپیدامی‌کنیم. داریم:

$$ED=\frac{\text{مساحت DEMN}}{a-b}=\frac{\text{مساحت BHLP}}{a-b}=$$

$$=\frac{b(a+b)}{a-b}=۳۶k$$

$m=FG$ است،ولی $FG=EC$ و $FG=OD$ ،همچنین $OC=OF=a$

$ED=EC+OD-OC$ ، یا $ED=۲EC-a$. از آنجا

$$EC=\frac{ED+a}{۲}$$

$$m=FG=EC=\frac{ED+a}{۲}=\frac{۳۶k+۵k}{۲}=\frac{۴۱k}{۲}$$ و

وکسر مجهول چنین می‌شود:

$$\frac{m^۲}{n^۲}=\frac{\left(\frac{۴۱}{۲}k\right)^۲}{(۶k)^۲}=\left(\frac{۴۱}{۱۲}\right)^۲,$$

یعنی . همان عددی‌که فیبوناچی هم پیدا کرده است.

بهترین راه حل این مسأله به‌کمك جبر، منجر به معادله‌ای‌درجهٔ چهارم با دومجهول می‌شود.

۳۶۲. رشتهٔ فیبوناچی

فیبوناچی ، رشتهٔ زیر را از عددهای طبیعی تشکیل دادکـه بعدها دردانش مورد استفادهٔ زیادی پیداکرد:

$$۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,\ldots$$

قانون تشکیل این رشته بسیار ساده است: دوجملهٔ اول را مساوی واحد و سپس هرجملـه را مساوی مجموع دوجملهٔ بلافاصلـه قبل ازخـودش می‌گیریم. مثلاً، $۱+۱=۲$ ، $۱+۲=۳$ ، $۲+۳=۵$ ، $۳+۵=۸$ و غیره .

هردوعدد مجاور از رشتهٔفیبوناچی، دریکی از دومعادلهٔ زیرصدق می‌کند:

$$x^۲-xy-y^۲=۱$$
$$x^۲-xy-y^۲=-۱$$

ضمناً، عدد بزرگتر را با x و عددکوچکتر را با y نشان داده‌ایم. مثلاً

$$\begin{cases}x=۲\\y=۱\end{cases}\quad\text{یا}\quad\begin{cases}x=۵\\y=۳\end{cases}\quad\text{یا}\quad\begin{cases}x=۱۳\\y=۸\end{cases},\ldots$$

ریشه‌های معادلهٔ اول و

$$\begin{cases} x=۳ \\ y=۲ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x=۸ \\ y=۵ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x=۲۱ \\ y=۱۳ \end{cases} ,\ldots$$

ریشه‌های معادلهٔ دوم‌اند.

اثبات این‌خاصیت برای حالت‌کلی، چند صفحهٔ بعد (صفحهٔ۴۹۰، خاصیت ۳) داده خواهد شد. رشتهٔ فیبوناچی، نه تنها برای ریاضیدان ، بلکه برای طبیعی‌دان هم آشناست.

وقتی‌که برگها، برشاخه تك تك روییده باشد، دراینصورت دور ساقه پراکنده می‌شوند، ولی نه به‌صورت دایره، بلکه به‌صورت خط مارپیچی ، یعنی هر برگ بالاتر و درطرف دیگر برگ قبلی می‌روید؛ ضمناً در گیاه‌شناسی ثابت شده است‌که برای هرنوع‌گیاه، مقدار زاویهٔ پراکندگی دوبرگ مجاور، برای همهٔ قسمتهای ساقه، کم وبیش ثابت می‌ماند. این زاویه ، معمولاً به وسیلهٔ‌کسری بیان می‌شودکه نشان‌دهد چه قسمتی از دایره راگرفته است. مثلاً، در زیرفون وزبان‌گنجشگ، زاویهٔ پراکندگی برگها $\frac{۱}{۲}$ دایره را تشکیل می‌دهد، در درخت آلش $\frac{۱}{۳}$ ؛ در درخت بلوط و درخت آلبالو $\frac{۲}{۵}$ ، در تبریزی وگلابی $\frac{۳}{۸}$ ؛ در بید $\frac{۵}{۱۳}$ و غیره. در هرنوع‌گیاه ، وضع استقرار شاخه‌ها، جوانه‌ها ، شکوفه‌ها و گلها هم، با همان زاویهٔ مربوط به وضع برگهاست.

زاویهٔ پراکندگی برگها، دراغلب‌گیاهان ، با عددهای زیر بیان می‌شود :

$$\frac{۱}{۲} , \frac{۱}{۳} , \frac{۲}{۵} , \frac{۳}{۸} , \frac{۵}{۱۳} , \frac{۸}{۲۱} ,\ldots$$

رشتهٔ صورتها و رشتهٔ مخرجها ، همان رشتهٔ فیبوناچی است: هرکسر (باشروع ازکسرسوم) ازاین راه بدست‌می‌آیدکه صورتهای دوکسر قبلی را با هم و مخرجهای‌آنها را هم با هم، جمع‌کنیم:

$$\frac{۲}{۵}=\frac{۱+۱}{۲+۳}\,,\qquad \frac{۳}{۸}=\frac{۲+۱}{۵+۳}\,,\ldots$$

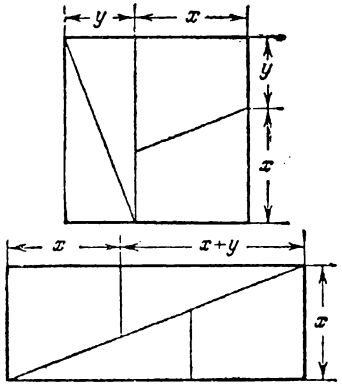
۳۶۳. معما

یك معمای سرگرم‌کنندهٔ هندسی ، به طورغیرمستقیم با عددهای فیبوناچی مربوط است.

کاملاً روشن است‌که اگر یك شکل مسطحه‌را به‌چند قسمت‌تقسیم کنیم، سپس قسمتهای‌بدست‌آمده راکنارهم قرار دهیم (ولی هیچ‌قسمتی ازآنهارویهم قرار نگیرد)، شکل‌تازه‌ای‌بدست می‌آید؛ این شکل‌می‌تواند ازلحاظ وضع ظاهری باشکل اصلی متفاوت باشد، ولی مساحت آن با مساحت شکل اصلی‌کاملاً یکی‌است و نمی‌تواند نه‌یك واحد مربع ازآن بیشتر ونه یك واحد مربع ازآن‌کمتر باشد. این یکی از اصول مقدماتی واساسی هندسه‌است‌که براساس‌آن، تمام قضیه‌های مربوط به‌اندازه‌گیری مساحت ساخته شده است .

درشکل‌صفحهٔ ۴۸۵، تبدیل مربع به‌مستطیل نشان داده‌شده است.

مربع به دومثلث مساوی و دو ذوذنقهٔ مساوی، تقسیم شده‌است، که‌طول ضلعهای‌آنها را باحرفهای x و y نشان داده‌ایم. از این‌قسمتها، مستطیلی ساخته‌ایم. اگر تبدیل مربع به‌مستطیل، به این ترتیب ممکن باشد، در اینصورت، ضلع‌مربع را به‌چه قسمتهائی از x و y بایدتقسیم کرد؟



مربوط به‌مسألهٔ ۳۶۳. تبدیل مربع به مستطیل

یکی از دوستان من تصمیم گرفت که عملاً آزمایش کند و به نتیجهٔ حیرت‌انگیزی رسید.

او درنامهٔ خود می‌نویسد:

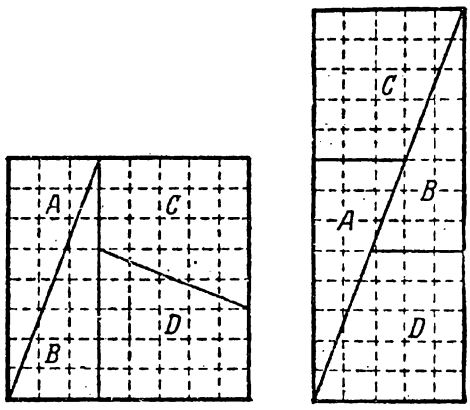
ـ من خودم این‌تبدیل رادر عمل انجام دادم. نمی‌خواستم که شکل را از روی‌کتاب بردارم. من تصمیم گرفتم که‌خودم، مربعی‌راکه رسم کرده‌ام، علامت‌گذاری کنم.

یك مربع ۶۴ خانه‌ای روی‌کاغذ رسم‌کردم و در بارهٔ این پرسش فکرکردم: قسمتهای x و y ضلع مربع‌را چگونه انتخاب‌کنم؟ ابتدافکر کردم‌که نوع انتخاب قسمتها بی تفاوت است و $x=۶$ ، $y=۲$ در نظر گرفتم. مربع را روی‌دومثلث مساوی ودوذوزنقهٔ مساوی بریدم وشروع به‌ساختن مستطیل، آنطورکه درشکل دیده می‌شود، کردم و... هیچ‌چیز درنیامد! یك مستطیل بدون منفذ بدست نیامد. با انتخاب مقادیر دیگری هم برای x و y و مثلاً $x=۴\frac{۱}{۲}$ و $y=۳\frac{۱}{۲}$ ، نتوانستم مستطیلی بدون منفذ پیدا کنم.

تنها به ازای $x=۵$ و $y=۳$ توانستم مستطیلی را ازقسمتهای مربع ، درست‌کنم، ولی دراینجا هم موضوع تازه‌ای مرا مبهوت‌کرد: مساحت مستطیل، مساوی ۶۵ خانه بود، یعنی یك خانه بیشترازمساحت مربعی‌که انتخاب‌کرده‌ایم (شکل صفحهٔ ۴۸۶ را ببینید).

در واقع، با قضاوت روی شکل قبلی، طول مستطیل باید

مساوی $x+x+y$ ، یعنی $2x+y$ ویا $3+5\times 2$ یعنی ۱۳واحدباشد؛ منهم درمستطیلی‌که ساختم، درست ۱۳ واحد برای طول آن بدست آوردم؛ عرض مستطیل باید مساوی x باشد ومنهم برای عرض‌مستطیل، ۵ واحد پیدا کردم. به این ترتیب، مساحت‌آن شامل 5×13 یعنی ۶۵ خانه می‌شد. اگر قبول ندارید، خودتان امتحان‌کنید!



مربوط به مسألهٔ ۳۶۳. چرا مساحت مربع با مساحت مستطیل برابرنیست؟

ولی، این‌همهٔ مطلب‌نیست. طبق‌همین‌نمونه، مربع‌دیگری را هم، که به ضلع ۱۳ واحد انتخاب کرده بودم، به‌قسمتهای لازم تقسیم‌کردم. $x=8$ و $y=5$ گرفتم‌وازقسمتهای مربع، مستطیل خود را ساختم،ولی باکمال تعجب دراینجا هم شبیه همان وضع، منتهی باکمی تفاوت‌پیش آمد: مساحت مستطیل به‌اندازهٔ یك خانه ازمساحت مربع‌کمتر شد.

خودتان‌قضاوت‌کنید: مساحت مربع شامل 13^2، یعنی ۱۶۹خانه است، درحالیکه مساحت مستطیل شامل:

$$(2x+y)x=(2\times 8+5)\times 8=168$$

خانه می‌شود!

باز هم دو نمونه:

۱. مربعی بـا ۲۱×۲۱ ، یعنی ۴۴۱ خانـــه انتخاب می‌کنیم . ضلعهای این مربع را به قسمتهای x=۱۳ و y=۸ تقسیم مـی‌کنیم و سپس مستطیل‌را تشکیل می‌دهیم. حالامساحت‌مستطیل‌را حساب‌می‌کنیم:

(خانه) $(۲x+y)x=(۲\times۱۳+۸)\times۱۳=۴۴۲$

دوباره یك خانه بیشتر شد!

۲. مربـع ۳۴×۳۴ ، یعنی ۱۱۵۶ خانـه‌ای انتخاب می‌کنیم و x=۲۱ و y=۱۳ مـی‌گیریم. مربـع را تقسیم می‌کنیـم و قسمتها را پهلوی‌هم می‌گذاریم،مستطیل بدست می‌آید. مساحت مستطیل رامحاسبه می‌کنیم:

(خانه) $(۲x+y)x=(۲\times۲۱+۱۳)\times۲۱=۱۱۵۵$

اینجا دوباره یك خانه‌کمتر است!

موضوع چیست؟ چرا این مشکل پیش می‌آید؟

شما به دوست جوان من چه جوابی می‌دهید؟ قبل ازآنکه قسمت حل را بخوانید، دراین‌باره خوب فکرکنید. عددهای‌فیبوناچی در اینجا چه نقشی دارند؟

۳۶۴. خاصیتهای عددهای رشتهٔ فیبوناچی

بین عددهای رشتهٔ فیبوناچی

$$۱,۱,۲,۳,۵,۸,۱۳,۲۱,\ldots$$

رابطه‌های جالبی وجود داردکه در اینجا به بعضی ازآنها می‌پردازیم :

۱. قانون مربوط به‌تشکیل جمله‌های‌این رشته،به معنای‌رابطه‌ای بین $S_{n-۲}$ ، $S_{n-۱}$ و S_n ، سه جملهٔ متوالی این رشته است:

$$S_n=S_{n-۱}+S_{n-۲}$$

این رابطه امکان می‌دهدکه به‌کمك دوجملهٔ اول، جملهٔ سوم را بدست‌آوردیم؛ سپس بـه‌کمك جمله‌های دوم و سوم، جملـهٔ چهارم را پیداکنیم وبعد به‌کمك جمله‌های سوم وچهارم، جملهٔ پنجم رابنویسیم و غیره.

۲. این مطلب جالب است‌که‌بادردست داشتن شمارهٔ هرجمله(n)، بتوانیم‌خود آن جمله (S_n) را پیدا کنیم. این‌رابطه وجود دارد، منتهی در مورد آن به‌یکی از شگفتیهای غیرقابل انتظار برخورد می‌کنیم‌کـه البته در ریاضیات، کم نیستند.

هرعضو رشتهٔ فیبوناچی، عددی صحیح است، شمارهٔ هرعضو هم، عددی صحیح است. بنابراین، طبیعی است انتظار داشته باشیم‌که رابطهٔ بین جملهٔ S_n با عدد n (شمارهٔجمله)، روی عددهای صحیح بیان شده باشد (مثلاً شبیه رابطه‌هایی‌که‌برای تصاعدها، وجود دارد)، ولی نه‌تنها عددهای صحیح، بلکه‌همهٔ عددهای صحیح وکسری (یعنی عددهای‌گویا) هم در بیان رابطهٔ مورد نظر ما، ناتوانند.

دو عددگنگ زیر، ما را ازاین تنگنای دشوار،آزاد می‌کنند:

$$a_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad a_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

بـه خاطر بیاوریم‌کـه چگونـه همین دوعـدد، تفاضل R، بین مساحتهای مستطیل ومربع را به صفر می‌رساندند (حل مسالـهٔ ۳۶۳ را ببینید). عجب برخورد بدون انتظاری!

اگر n، شمارهٔ ردیف جملهٔ S_n از رشتهٔ فیبوناچی باشد،می‌توان S_n را از رابطهٔ زیر پیدا کرد:

$$S_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}=\frac{a_1{}^n-a_2{}^n}{\sqrt{5}}\qquad(1)$$

که به ازای $n=۱$ بدست می‌آید:

$$S_۱=\frac{\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}-\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}}{\sqrt{۵}}=۱,$$

و به ازای $n=۲$:

$$S_۲=\frac{\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^۲-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^۲}{\sqrt{۵}}=۱$$

چون، این رابطه برای دوجملهٔ پشت‌سرهم درست است، و می‌دانیم که هرجملهٔ این رشته برابر است با مجموع دو جملهٔ قبل از آن، لزومی ندارد که آنرا برای مقادیر بعدی n آزمایش کنیم، بلکه می‌توان آنرا یکباره و برای هر مقدار دلخواه n ثابت کرد. این رابطه را، برای دوجملهٔ پشت سرهم می‌نویسیم:

$$S_{n-۱}=\frac{a_۱^{n-۱}-a_۲^{n-۱}}{\sqrt{۵}} \quad \text{و} \quad S_{n-۲}=\frac{a_۱^{n-۲}-a_۲^{n-۲}}{\sqrt{۵}}$$

رابطهٔ (۱) به شرطی برای هرمقدار دلخواه n درست است که مجموع دوعبارت اخیر، برابر با S_n شود:

$$S_{n-۱}+S_{n-۲}=\frac{a_۱^{n-۱}-a_۲^{n-۱}}{\sqrt{۵}}+\frac{a_۱^{n-۲}-a_۲^{n-۲}}{\sqrt{۵}}=$$

$$=\frac{a_۱^{n-۲}(a_۱+۱)-a_۲^{n-۲}(a_۲+۱)}{\sqrt{۵}}$$

با در دست داشتن مقادیر $a_۱$ و $a_۲$ ، می‌توان به سادگی فهمید که

$$a_۱+۱=a_۱^۲ \quad \text{و} \quad a_۲+۱=a_۲^۲$$

که اگر در مجموع $S_{n-۱}+S_{n-۲}$ قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$S_{n-۱}+S_{n-۲}=\frac{a_۱^n-a_۲^n}{\sqrt{۵}}=S_n$$

۳. با دانستن رابطه‌ای که S_n را برحسب n می‌دهد:

$$S_n=\frac{a_1^n-a_2^n}{\sqrt{5}} \quad \left(a_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\ a_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که هرزوج عدد پشت‌سرهم در رشتهٔ فیبوناچی در یکی از دو معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$x^2-xy-y^2=\pm 1$$

و ضمناً اگر $y=S_n$ باشد، $x=S_{n+1}$ است. اگر به‌جای مجهولها، در این دو معادله، مقادیرشان را قرار دهیم:

$$y=\frac{a_1^n-a_2^n}{\sqrt{5}} \quad \text{و} \quad x=\frac{a_1^{n+1}-a_2^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

بدست می‌آید:

$$\frac{(a_1^{n+1}-a_2^{n+1})^2}{5}-\frac{(a_1^{n+1}-a_2^{n+1})(a_1^n-a_2^n)}{5}-$$

$$-\frac{(a_1^n-a_2^n)}{5}=\pm 1,$$

$$a_1^{2n+2}-2a_1^{n+1}a_2^{n+1}+a_2^{2n+2}-a_1^{2n+1}+a_1^n a_2^{n+1}+$$

$$+a_1^{n+1}a_2^n-a_2^{2n+1}-a_1^{2n}+2a_1^n a_2^n-a_2^{2n}=\pm 5$$

جمله‌های باپایه‌های مشترك را گروه بندی می‌کنیم:

$$a_1^{2n}(a_1^2-a_1-1)+a_2^{2n}(a_2^2-a_2-1)+$$

$$+a_1^n a_2^n(-2a_1a_2+a_2+a_1+2)=\pm 5$$

که اگر به جای a_1 و a_2، درداخل پرانتزها، مقادیرشان را قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$5a_1^n a_2^n=\pm 5 \Rightarrow 5(a_1a_2)^n=\pm 5$$

از طرف دیگر داریم:

$$a_۱a_۲=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\times\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}=-۱$$

بنابراین، وقتی n زوج باشد $۵=۵(-۱)^n$ و وقتی n فرد باشد $-۵=۵(-۱)^n$ می‌شود.

۴. شکل بامزه‌ای از مجموع n جملهٔ رشتهٔ فیبوناچی:

$$S_۱+S_۲+\ldots+S_n=S_{n+۲}-۱$$

مجموع n جملهٔ اول رشتهٔ فیبوناچی، یك واحدکمتر از $(n+۲)$ امین جملهٔ همین رشته است.

اثبات. طبق قانون تشکیل جمله‌های رشتهٔ فیبوناچی داریم:

$$\begin{aligned}
S_{n+۲}&=S_{n+۱}+S_n,\\
S_{n+۱}&=S_n+S_{n-۱},\\
S_u&=S_{n-۱}+S_{n-۲},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
S_۴&=S_۳+S_۲,\\
S_۳&=S_۲+S_۱
\end{aligned}$$

اگراین رابطه‌ها را جمع، وجمله‌های مساوی را از دوطرف حذف‌کنیم، بدست می‌آید:

$$S_{n+۲}=(S_n+S_{n-۱}+\ldots+S_۱)+S_۲$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}
S_۱+S_۲+\ldots+S_n&=S_{n+۲}-S_۲,\\
S_۱+S_۲+\ldots+S_n&=S_{n+۲}-۱,
\end{aligned}$$

$$S_1+S_2+\ldots+S_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}-1$$

۵ . مجموع مجذورهای عددهای رشتهٔ فیبوناچی، به وسیلهٔ حاصلضرب دو جملهٔ مجاور ازهمین رشته بیان می‌شود:

$$S_1^2+S_2^2+\ldots+S_n^2=S_n\cdot S_{n+1} \qquad (2)$$

مثلاً

$$1^2+1^2=1\times 2$$
$$1^2+1^2+2^2=2\times 3$$
$$1^2+1^2+2^2+3^2=3\times 5$$

.....

برای اثبات، از روش استقراء ریاضی استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که تساوی (۲) برای $n=k$ درست باشد:

$$S_1^2+S_2^2+\ldots+S_k^2=S_k\cdot S_{k+1}$$

به دو طرف تساوی S^2_{k+1} را اضافه می‌کنیم:

$$S_1^2+S_2^2+\ldots+S_k^2+S^2_{k+1}=S_k.S_{k+1}+S^2_{k+1}=$$
$$S_{k+1}(S_k+S_{k+1})=S_{k+1}\cdot S_{k+2}$$

رابطه را برای k جمله صحیح فرض‌کردیم، در اینصورت برای $k+1$ جمله هم صحیح ازآب درآمد.

به طور مستقیم، و به‌کمك آزمایش، نشان دادیم‌که رابطهٔ (۲) برای $k=2$ درست‌است. و بنابراین با اثبات بالا، معلوم می‌شودکه این رابطه به ازای هر مقدار n صحیح است.

حالاخودتان، با استفاده از رابطهٔ (۱)، با روش استقراء ریاضی،

رابطه‌های زیر را ثابت کنید.

۶. اگر از مجذور یك جملهٔ رشتهٔ فیبوناچی، حاصلضرب دوجملهٔ قبل و بعد آنرا کم کنیم، به‌ترتیب عددهای ۱+ و ۱− بدست می‌آید:

$$۲^۲-۱\times۳=+۱$$
$$۳^۲-۲\times۵=-۱$$
$$۵^۲-۳\times۸=+۱$$

.....

$$S_n^۲-S_{n-۱}\cdot S_{n+۱}=(-۱)^{n+۱}$$

۷. $S_۱+S_۳+\ldots+S_{۲n-۱}=S_{۲n}$

۸. $S_۲+S_۴+\ldots+S_{۲n}=S_{۲n+۱}-۱$

۹. $S_n^۲+S^۲_{n+۱}=S_{۲n+۱}$

۱۰. در رشتهٔ فیبوناچی، از هرسه جمله، یکی زوج است؛ ازهر چهارجمله، یکی بر۳ بخش‌پذیراست؛ ازهرپنج جمله‌یکی بر۵ بخش پذیر است وازهرپانزده جمله، یکی بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۱۱. نمی‌توان مثلثی ساخت که ضلعهای آن، عددهایی از رشتهٔ فیبوناچی باشد (فرض‌براینست که یك عدد از رشته را ، دوبار به حساب نیاوریم).

۱۲. چهار جملهٔ متوالی از رشتهٔ فیبوناچی را درنظر می‌گیریم، حاصلضرب کوچکترین در بزرگترین عدد، ازاین چهارعدد ، را یك ضلع و دوبرابر حاصلضرب دو عدد دیگر را، ضلع دیگر مجاور به‌زاویهٔ‌قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای می‌گیریم. ثابت کنیدکه وتر این مثلث هم عدد دیگری از رشتهٔ فیبوناچی است:

$$(S_n\cdot S_{n+۳})^۲+(۲S_{n+۱}\cdot S_{n+۲})^۲=a^۲_{۲n+۳}$$

C. عددهای هندسی

۳۶۵. خاصیتهای عددهای هندسی

۱. حتی از صدها سال پیش ازمیلاد، باترکیب عددهـای طبیعی، دانشمندان، رشته‌های جالبی درست می‌کردندکه عضوهای آنهارا می‌شد به نحوی تعبیر هندسی کرد.

مثلاً ، عددهای به اصطلاح هندسی، درحـدود سده‌هـای پنجم و چهارم پیش ازمیلاد به وجود آمده است.

ابتدا، رشته‌ای‌را درنظر می‌گیریم که درآن‌هرجمله‌ازجملهٔ قبل از خودش‌به اندازهٔ یك عددطبیعی‌ثابت، بیشترباشد (یعنی یك‌تصاعد حسابی درست‌کند)، مثلاً

$$۱،۲،۳،۴،۵،\ldots(d=۱)،$$
$$۱،۳،۵،۷،۹،\ldots(d=۲)،$$
$$۱،۴،۷،۱۰،۱۳\ldots(d=۳)،$$

و یا به صورت‌کلی:

$$۱،\ ۱+d،\ ۱+۲d،\ ۱+۳d،\ ۱+۴d،\ldots$$

(d ، یعنی‌اختلاف ثابت دوجملهٔ پشت‌سرهم را قدر نسبت ،گویند). مقدار هـرجمله از این رشته، بـه جای آن بستگی دارد: جملهٔ n ام این رشته (که‌آنرا a_n می‌نامیم)، برابراست با جملهٔ اول به اضافهٔ حاصلضرب‌قدر نسبت در $n-۱$ ،

$$a_n=۱+d(n-۱)$$

عضوهای‌هریك ازاین‌رشته‌ها را، عددهای هندسی خطی یا به‌زبان دیگر عددهای هندسی مرتبهٔ اول گویند.

۲. ازرشته‌های مربوط به‌عددهای‌هندسی خطی، دنبالهٔ‌مجموعهای

این‌عددهارا تشکیل می‌دهیم: «مجموع» اول ازجملهٔ اول رشتهٔ عددهای هندسی خطی؛ مجموع دوم، از رویهم ریختن دوجملهٔ اول این رشته؛ مجموع سوم، از رویهم ریختن سه جملهٔ اول؛ و بالاخره، جملهٔ n ام از رویهم ریختن n جملهٔ اول.

مثلاً، این رشتهٔ عددهای هندسی‌مرتبهٔ اول را درنظر می‌گیریم:

$$۱,۲,۳,۴,۵,\ldots$$

و به‌کمک‌آن، رشتهٔ جدید «مجموعها» را تشکیل می‌دهیم:

$$S_۱=۱,\quad S_۲=۱+۲=۳,\quad S_۳=۱+۲+۳=۶,$$
$$S_۴=۱+۲+۳+۴=۱۰,$$
$$S_۵=۱+۲+۳+۴+۵=۱۵,\ldots$$

و یا

$$۱,۳,۶,۱۰,۱۵,\ldots$$

که‌آنها را عددهای مثلثی گویند.

دومین رشتهٔ مربوط به عددهای‌هندسی خطی را درنظرمی‌گیریم:

$$۱,۳,۵,۷,۹,\ldots$$

ازاین رشتهٔ، رشتهٔ «مجموعهای» زیر بدست می‌آید:

$$۱,۴,۹,۱۶,۲۵,\ldots$$

که‌آنها را عددهای مربعی گویند.

از سومین رشتهٔ عددهای هندسی خطی:

$$۱,۴,۷,۱۰,۱۳,\ldots$$

می‌توان رشتهٔ عددهای پنج‌گوشه‌ای زیر را بدست‌آورد:

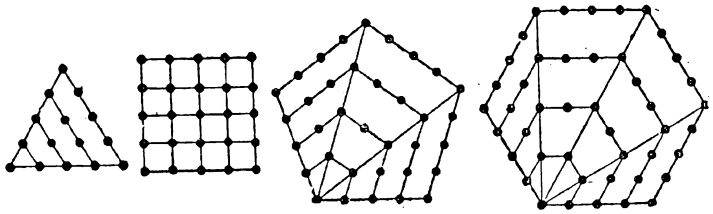
$$۱,۵,۱۲,۲۲,۳۵,\ldots$$

به همین ترتیب، می‌توان عددهای شش‌گوشه‌ای، هفت‌گوشه‌ای و غیره را

پیدا کرد.

همه این عددهای چندگوشه‌ای را عددهای هندسی مسطحه یا عددهای هندسی مرتبهٔ دوم، نام نهاده‌اند.

۳. نام «هندسی»، که‌همراه این عددهاست، به‌این معناست که‌امکان تعبیر هندسی آنها وجود دارد. مثلث‌متساوی الاضلاع، مربع، پنج‌ضلعی منتظم، شش‌ضلعی منتظم وغیره را، هرکدام به‌ضلع مساوی ۱، رسم می‌کنیم. سپس در هرشکل، از یکی از رأسها شروع می‌کنیم وشکلهایی متشابه‌با شکل اولیه، به ضلعهای ۲، ۳، ۴، ... می‌سازیم (شکل‌را ببینید)



مربوط به مسألهٔ ۳۶۵. عددهای هندسی

روی همهٔ رأسها و روی ضلعهای این شکلها، دایره‌های سیاهی، به فاصلهٔ ۱، قرار می‌دهیم. شمارش این دایره‌ها، در هرمثلث، رشتهٔ عددهای مثلثی را به ما می‌دهد:

$$۱, ۳, ۶, ۱۰, ۱۵, \ldots$$

و شمارش دایره‌ها، در مربعها، عددهای مربعی را

$$۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \ldots$$

به‌همین ترتیب، می‌توان با شمارش دایره‌ها، روی پنج ضلعی‌ها وغیره، عددهای پنج‌گوشه، شش‌گوشه وغیره را بدست آورد.

۴. خلاصه‌ای از همهٔ عددهای هندسی را در جدول زیرداده‌ایم:

صورت کلی S_n		عددها $S_۵$	$S_۴$	$S_۳$	$S_۲$	$S_۱$	عدد هندسی	d
$\frac{n(n+۱)}{۲}$	...	۱۵	۱۰	۶	۳	۱	مثلثی	۱
$n^۲$	...	۲۵	۱۶	۹	۴	۱	مربعی	۲
$\frac{n(۳n-۱)}{۲}$	...	۳۵	۲۲	۱۲	۵	۱	پنج گوشه‌ای	۳
$n(۲n-۱)$	...	۴۵	۲۸	۱۵	۶	۱	شش گوشه‌ای	۴
...	...	.	.	.	.	.	. . .	.
$\frac{n[dn-(d-۲)]}{۲}$	...	۵+۱۰d	۴+۶d	۳+۳d	۲+d	۱		d

جملهٔ عمومی S_n ، بنا به‌تعریف عددهای هندسی، برابر است با مجموع n جمله از رشتهٔ متناظرآن در عددهای هندسی‌خطی:

$$۱, ۱+d, ۱+۲d, ۱+۳d, \ldots, ۱+d(n-۱)$$

که درآن d مساوی ۱، ۲، ۳، ۴، ... است.

به زبان دیگر، S_n عبارتست از مجموع n جملهٔ تصاعد حسابی، که‌درآن $a_۱=۱$ و $a_n=۱+d(n-۱)$ ، باقدرنسبتهای مساوی ۱، ۲، ۳، ... اگر رابطهٔ مجموع را، درتصاعد حسابی به‌یادآوریم :

$$S=\frac{(a_۱+a_n)n}{۲}$$

خواهیم داشت:

$$S_n = \frac{[۱+۱+d(n-۱)]n}{۲} = \frac{n[dn-(d-۲)]}{۲}$$

ازاینجامی‌توان با فرض $d=۱$ ، S_n را برای سطراول‌جدول؛ بنا- ازای $d=۲$ ، رابطهٔ S_n را برای سطر دوم جدول وغیره، بدست‌آورد.

۵. بین عددهای طبیعی و عددهای هندسی مسطحه، و همچنین بین خود عددهای هندسی مسطحه، رابطه‌های بسیار جالبی وجود دارد.

پیرفرما (۱۶۰۱-۱۶۶۵)، قاضی‌ومرداجتماعی شهر تولوز (فرانسه)، که ضمن خدمت‌خود، به‌کار ریاضی هم می‌پرداخت، قضیه‌های‌بسیاری‌در بارهٔ عددها کشف‌کرده است‌که، ازآن جمله چنین است:

الف) هرعدد طبیعی برابر است با یك عدد مثلثی، یا مجموع دو یاسه عدد مثلثی؛

ب) هرعدد طبیعی برابر است با یك عدد مربعی، یا مجموع دو یا سه یا چهار عدد مربعی؛ هرعدد طبیعی برابر است با یك عدد پنج‌گوشه‌ای، یا مجموع دو یا سه یا چهار یا پنج عدد پنج‌گوشه‌ای؛

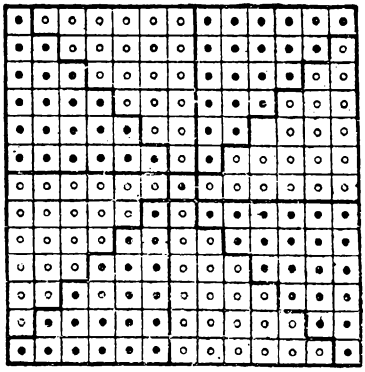
ج) به‌طورکلی، هرعدد طبیعی دامی‌توان به‌صورت‌مجموعی ازعددهای k گوشه‌ای نشان داد، به‌نحوی‌که تعداد این عددها از k تجاوز نکند.

بعضی از حالتهای خاص این قضیه‌را ، اولر ثابت‌کرد، ولی‌اثبات کلی را، کوشی ، ریاضیدان فرانسوی در سال ۱۸۱۵ داد.

تمرین‌کنید: یك‌عددطبیعی‌انتخاب‌کنید و آنرا به‌مجموع‌عددهای مثلثی، مربعی، وپنج‌گوشه‌ای، تبدیل‌کنید.

۶. دیو فانت ریاضیدان (سدهٔ سوم پیش ازمیلاد) ، رابطهٔ ساده‌ای بین عددهای مثلثی T و عددهای مربعی K پیدا کرد:

$$۸T+۱=K$$



مربوط به مسألهٔ ۳۶۵. رابطهٔ بین عددهای مثلثی وعددهای مربعی

این رابطه را، مثلاً درمورد عدد مثلثی ۲۱، می‌توان به سادگی روی شکل نشان داد.

درشکل، ۱۶۹ خال وجود دارد که درمربعی گذاشته شده‌اند، آنها عددمربعی K رادرست می‌کنند. یکی از خالها، درمرکز مربع قرار دارد و بقیهٔ ۱۶۸ خال، در ۸عدد مثلثی، به‌شکل هشت مثلث قائم‌الزاویه، باوتری که به‌صورت خط‌شکسته است. یعنی: $K=۸T+۱$.

۷. به‌عنوان تمرین و به‌کمك جبر، خودتان ثابت کنید:

الف) رابطهٔ دیوفانت درست است،

ب) هیچ عدد مثلثی، نمی‌تواند به یکی از رقمهای ۲، ۴، ۷ و ۹ختم شود،

ج) عددهای شش‌گوشه‌ای، عبارتند ازعددهای ردیف زوج‌مثلثی.

۸. برای مجموع توانهای عددهای طبیعی (یعنی یکی از انواع عددهای هندسی خطی)، این رابطه درست است:

$$(۱+۲+۳+\ldots+n)^۲=۱^۳+۲^۳+۳^۳+\ldots+n^۳$$

ژاکوبی، رابطهٔ جالب دیگری بین این عددها، پیداکرده است:

$$۲(۱+۲+۳+\ldots+n)^۴=(۱^۵+۲^۵+\ldots+n^۵)+$$
$$+(۱^۷+۲^۷+\ldots+n^۷)$$

رابطهٔ مشابهی هم، بین مجموع توانهای عددهای مثلثی (یعنی یکی از

کتابخانه مجازی ریاضیات

انواع عددهای هندسی مسطحه، پیدا کرده است:

$$۳\left[۱+۳+۶+۱۰+\ldots+\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۳=$$

$$=\left[۱^۳+۳^۳+\ldots+\frac{n^۳(n+۱)^۳}{۲^۳}\right]+$$

$$+۲\left[۱^۴+۳^۴+\ldots+\frac{n^۴(n+۱)^۴}{۲^۴}\right]$$

مثال:

$$۳(۱+۳+۶)^۳=۱^۳+۳^۳+۶^۳+۲(۱^۴+۳^۴+۶^۴)=۳۰۰۰$$

$$۳(۱+۳+۶+۱۰)^۳=۱^۳+۳^۳+۶^۳+۱۰^۳+$$
$$+۲(۱^۴+۳^۴+۶^۴+۱۰^۴)=۲۴۰۰۰$$

۹. مجموعهای متوالی عددهای هندسی‌مسطحه را پیدا می‌کنیم:

$$V_۱=S_۱,\qquad V_۲=S_۱+S_۲,$$
$$V_۳=S_۱+S_۲+S_۳,\qquad V_۴=S_۱+S_۲+S_۳+S_۴,\ldots$$

رشتهٔ عددهای هندسی فضایی یا عددهای هندسی مرتبهٔ سوم، بدست می‌آید:

$$V_۱,\ V_۲,\ V_۳,\ V_۴,\ldots$$

مثلاً، از عددهای مثلثی

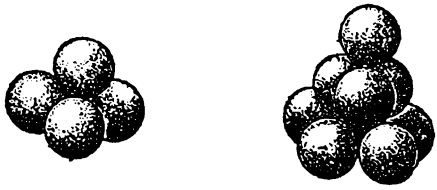
$$۱,۳,۶,۱۰,۱۵,\ldots$$

می‌توان رشته عددهای هندسی مرتبهٔ سوم زیر را پیدا کرد:

$$۱,۴,۱۰,۲۰,۳۵,\ldots$$

این عددها را، عددهای هرمی هم می‌گویند، زیرا اگر به تعداد هرکدام ازاین عددها، گلوله‌های مساوی‌انتخاب کنیم، می‌توان به‌کمك

آنها، هرمهایی درست کرد (شکل پایین):



مربوط به مسألهٔ ۳۶۵.

زیر یک گلوله، سه گلوله می‌گذاریم، «هرمی» از چهار گلوله بدست می‌آید. زیر آنها دوباره ۶ گلوله می‌گذاریم، هرمی از ۱۰ گلوله بدست می‌آید وغیره.

۱۰. صورتی از همهٔ عددهای هندسی مرتبهٔ سوم را می‌دهیم:

d	عددها						صورت کلی V_n
	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5		
۱	۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$
۲	۱	۵	۱۴	۳۰	۵۵	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
۳	۱	۶	۱۸	۴۰	۷۵	...	$\frac{1}{2}n^2(n+1)$
۴	۱	۷	۲۲	۵۰	۹۵	...	$\frac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$
.	.	..	..	..	...	...	.....
d	۱	۳+d	۶+۴d	۱۰+۱۰d	۱۵+۲۰d	...	$\frac{1}{6}n(n+1)[dn-(d-3)]$

بدست‌آوردن جملهٔ عمومی V_n ، برای عددهای هندسی فضایی، مشکل‌تر ازپیدا کردن جملهٔ عمومی عددهای مسطحه است. دراینجا نیاز به‌بعضی آگاهیهاازنظریهٔ ترکیب (آنالیزترکیبی) داریم. کسانی که‌با آنالیزترکیبی آشنایی ندارند، می‌توانند ازخواندن مطالب‌زیر، دربارهٔ بدست‌آوردن جملهٔ عمومی V_n ، صرفنظر کنند.

فرض می‌کنیم:

$$V_۲-V_۱=b_۱, \quad b_۱=۳+d-۱=۲+d;$$
$$V_۳-V_۲=b_۲, \quad b_۲=۶+۴d-۳-d=۳+۳d;$$
$$V_۴-V_۳=b_۳, \quad b_۳=۱۰+۱۰d-۶-۴d=۴+۶d;$$
$$V_۵-V_۴=b_۴, \quad b_۴=۱۵+۲۰d-۱۰-۱۰d=۵+۱۰d;$$
$$V_۶-V_۵=b_۵,$$

.....

$$V_۲=V_۱+b_۱,$$
$$V_۳=V_۲+b_۲,$$
$$V_۴=V_۳+b_۳,$$
$$V_۵=V_۴+b_۴,$$
$$V_۶=V_۵+b_۵,$$

.....

و سپس فرض می‌کنیم:

$$b_۲-b_۱=r_۱, \quad r_۱=۳+۳d-۲-d=۱+۲d;$$
$$b_۳-b_۲=r_۲, \quad r_۲=۴+۶d-۳-۳d=۱+۳d,$$
$$b_۴-b_۳=r_۳, \quad r_۳=۵+۱۰d-۴-۶d=۱+۴d,$$
$$b_۵-b_۴=r_۴,$$

.....

$$b_۲=b_۱+r_۱,$$
$$b_۳=b_۲+r_۲,$$
$$b_۴=b_۳+r_۳,$$
$$b_۵=b_۴+r_۴,$$
.....

حالا می‌بینیم که :

$$r_۲-r_۱=d,$$
$$r_۳-r_۲=d,$$
$$r_۴-r_۳=d,...$$

و ازآنجا

$$r_۲=r_۱+d,$$
$$r_۳=r_۲+d=r_۱+۲d$$
$$r_۴=r_۳+d=r_۱+۳d,...$$

به‌کمك این رابطه‌ها، می‌توان عددهای $V_۱$ ، $V_۲$ ، $V_۳$ ،...، V_n را برحسب $V_۱$ ؛ $b_۱$ ، $r_۱$ و d ، بیان‌کرد:

$$V_۲=V_۱+b_۱,$$
$$V_۳=V_۲+b_۲=(V_۱+b_۱)+(b_۱+r_۱)=V_۱+۲b_۱+r_۱$$

به یاد می‌آوریم که ضریبهای $b_۱$ و $r_۱$ را می‌توان به وسیلهٔ رابطه‌های مربوط به ترکیب نشان داد:

$$۲=C_۲^۱ \qquad و \qquad ۱=C_۲^۲$$

دراینصورت:

$$V_۳=V_۱+C_۲^۱b_۱+C_۲^۲r_۱$$

و سپس

$$V_۴=V_۳+b_۳=V_۱+۲b_۱+r_۱+b_۲+r_۲=$$
$$=V_۱+۲b_۱+r_۱+b_۱+r_۱+r_۱+d=$$
$$=V_۱+۳b_۱+۳r_۱+d,$$

و چون $C_۳^۲=C_۴^۱=۳$ و $C_۲^۲=۱$، بنابراین :

$$V_۴=V_۱+C_۲^۱b_۱+C_۲^۲r_۱+C_۳^۳d,$$
$$V_۵=V_۴+b_۴=V_۱+۳b_۱+۳r_۱+d+b_۳+r_۳=$$
$$=V_۱+۳b_۱+۳r_۱+d+b_۲+r_۲+r_۱+۲d=$$
$$=V_۱+۳b_۱+۳r_۱+d+b_۱+r_۱+r_۱+d+r_۱+۲d=$$
$$=V_۱+۴b_۱+۶r_۱+۴d$$

و چون $C_۴^۳=C_۴^۱=۴$ و $C_۴^۲=۶$ ، بنابراین :

$$V_۵=V_۱+C_۴^۱b_۱+C_۴^۲r_۱+C_۴^۳d,$$

و به‌همین ترتیب برای $V_۶$ بدست می‌آید:

$$V_۶=V_۱+C_۵^۱b_۱+C_۵^۲r_۱+C_۵^۳d,$$

و بالاخره برای V_n :

$$V_n=V_۱+C_{n-۱}^۱b_۱+C_{n-۱}^۲r_۱+C_{n-۱}^۳d$$

که اگر درآن، به جای $b_۱$ و $r_۱$ مقادیرشان را قرار دهیم و ترکیبها را بازکنیم، بدست می‌آید.

$$V_n=۱+(n-۱)(۲+d)+\frac{(n-۱)(n-۲)}{۲}(۱+۲d)+$$
$$+\frac{(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲\times۳}d$$

و بعد از تبدیلهای لازم:

$$V_n=\frac{1}{6}n(n+1)[dn-(d-3)]$$

که به ازای $d=1$ می‌شود :

$$V_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2),$$

و به ازای $d=2$:

$$V_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),...$$

۱۱. زمینه‌ای برای تمرین (تنها برای کسانی که از رابطه‌های مربوط به آنالیز ترکیبی، اطلاع دارند):

از همین راه، عددهای هندسی مرتبهٔ چهارم را پیدا کنید و جملهٔ عمومی آنرا، بدست آورید.

D. عددهای فیثاغورثی

۳۶۶. عددهای فیثاغورثی را چگونه انتخاب کنیم؟

گاهی پیش می‌آید که لازم است مثلث قائم الزاویه‌ای که ضلعهای آن، عددهای صحیحی باشد ، بسازیم. اینگونه عددهای صحیح را، عددهای فیثاغورثی گویند، زیرا، اگر x و y دو ضلع پهلوی زاویهٔ قائمه و z وتر مثلث باشد، بنابر رابطهٔ فیثاغورث باید داشته باشیم:

$$x^2+y^2=z^2$$

وقتی که x و y ، ضلعهای پهلوی زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشد، مقدار z ، وتر مثلث، از رابطهٔ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ بدست می‌آید، ولی اشکال کار در اینجاست که x و y را چگونه انتخاب کنیم تا برای z هم عددی صحیح بدست آید.

مثلاً، به‌ازای $x=۳$ ، $y=۴$ ، برای z مقدار $\sqrt{۳^۲+۴^۲}$ ، یعنی ۵ بدست می‌آیدکه به مثلث مصری (با ضلعهای ۳و۴و۵) معروف است. ولی‌اگر $x=۲$ و $y=۶$ بگیریم، مقدار z مساوی $\sqrt{۴۰}$ می‌شود، که‌عددی صحیح نیست.

روشن شده است‌که تعداد گروه عددهای فیثاغورثی، بی‌نهایت است.

هرعدد مختلط به‌صورت $a+bi$ را می‌توان برای پیداکردن یك گروه از عددهای فیثاغورثی، مورد استفاده قرار داد.

قبلا به خاطر می‌آوریم که حرف i نشانهٔ $\sqrt{-۱}$ است و ضمناً $i^۲=-۱$. مجذور هرعدد به‌صورت $a+bi$ ، خود عددی مختلط و به صورت $x+yi$ است، که دراینصورت x ؛ y و $a^۲+b^۲$ ، همیشه یك گروه عددهای فیثاغورثی هستند. مثلاً

a) $$(۳+۲i)^۲=۹+۱۲i-۴=۵+۱۲i$$
$$x=۵\ ,\ y=۱۲$$
$$a^۲+b^۲=۳^۲+۲^۲=۱۳,$$
$$۵^۲+۱۲^۲=۱۳^۲$$

b) $$(۲+۵i)^۲=۴+۲۰i-۲۵=-۲۱+۲۰i$$
$$x=-۲۱\ ,\ y=۲۰$$
$$a^۲+b^۲=۲^۲+۵^۲=۲۹,$$
$$۲۱^۲+۲۰^۲=۲۹^۲$$

فرض‌کنیدکه بخواهیم به‌کمك عددهای ۱ و ۴، گروه عددهای

فیثاغورثی‌را پیداکنیم. عدد $۱+۴i$ را (ویانوعی دیگر $۴+i$ را (تشکیل می‌دهیم:

$$(۱+۴i)^۲=۱+۸i-۱۶=-۱۵+۸i$$

و حالا داریم:

$$۱۵^۲+۸^۲=۱۷^۲ \qquad (۱۷=۱^۲+۴^۲)$$

روش ساده‌ای‌که همیشه به‌خاطر می‌ماند!

اگر این‌محاسبه‌ها را روی حرف‌انجام دهیم، می‌توانیم یك‌رابطهٔ کلی، برای تشکیل عددهای فیثاغورثی x ، y وz بدست آوریم:

$$(a+bi)^۲=(a^۲-b^۲)+۲abi$$

از آنجا

$$x=a^۲-b^۲, \quad y=۲ab, \quad z=a^۲+b^۲$$

که a و b می‌توانند هر عدد صحیح دلخواه باشند.

این مطلب هم جالب است‌که باهمین روش وبه‌کمك مکعب یك چدد مختلط می‌توان به رابطهٔ

$$x^۲+y^۲=z^۳$$

رسید. مثلاً فرض‌کنید :

$$a+bi=۱+۲i$$

دو طرف را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$(۱+۲i)^۳=۱+۶i+۱۲i^۲+۸i^۳=۱+۶i-۱۲-۸i,$$
$$(۱+۲i)^۳=-۱۱-۲i$$

که ازآنجا بدست می‌آید:

$$x=۱۱, \quad y=۲, \quad z=۱^۲+۲^۲=۵$$

و در واقع داریم:

$$۱۱^۲+۲^۲=۵^۳$$

یك نمونهٔ دیگر:

$$(۵+۳i)^۳=۱۲۵+۳\times۲۵\times۳i+۳\times۵\times۹i^۲+۲۷i^۳=$$
$$=-۱۰+۱۹۸i$$

که ازآنجا بدست می‌آید:

$$۱۰^۲+۱۹۸^۲=۳۴^۳$$

با همین روش می‌توان راهی برای پیداکردن جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x^۲+y^۲=z^n$$

پیدا کنید.

به‌عنوان مثال، عددهای صحیح x، y و z را طوری پیدا کنیدکه داشته باشیم:

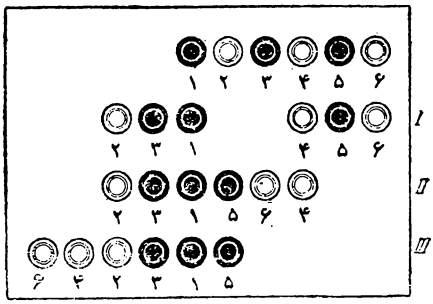
$$x^۲+y^۲=z^۴$$

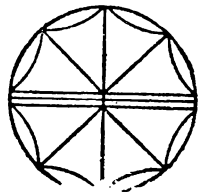
حل و جواب

بخش اول

۱. باید به دودی‌که ازدودکش لوکوموتیو خارج می‌شود،توجه‌کرد اگرقطارایستاده باشد، دود لوکوموتیو به‌همان طرفی‌که باد می‌وزد متمایل می‌شود. برعکس، اگر قطار درحرکت باشد، به‌شرط نبودن باد، دودی‌که‌از لوکوموتیوخارج‌می‌شود، به‌طرف عقب تمایل پیدامی‌کند. آنطورکه‌ازشکل ۶ دیده می‌شود (صفحهٔ۱۹ را ببینید)، با وجودی‌کـه قطار به‌جلو می‌رود، جهت‌دود به‌طرف بالاست، بنابراین‌سرعت قطار همان سرعت وزش‌باد است، یعنی ۷ متر درثانیه یا قریب ۲۵ کیلومتر درساعت.

۲. حل مساله، درشکل داده شده است.





مربوط به مسألهٔ ۲ مربوط به مسألهٔ ۳

۳. همانطورکه درشکل‌دیده‌می‌شود، مهره‌ها را ازچپ به‌راست‌شماره گذاری‌می‌کنیم. چون جای‌آزاد درسمت‌چپ قراردارد، مهره‌های ۲و۳ رابه سمت چپ می‌بریم وطوری می‌گذاریم‌که مهرهٔ ۳ پهلوی مهرهٔ ۱ قرارگیرد

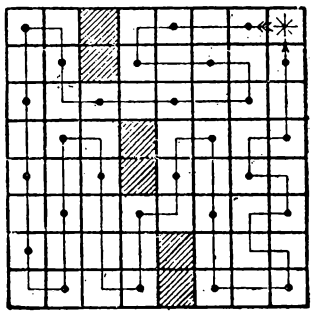
(جابجایی I را درشکل ببینید). بعدمهره‌های ۵ و ۶ را به‌جایی که هم‌اکنون خالی شده است‌می‌بریم (جابجایی II درشکل). بالاخره، مهره‌های ۶ و ۴را به‌جای‌آزاد در سمت چپ، پهلوی مهرهٔ ۲ ، منتقل‌می‌کنیم (جابجایی III).

حالا مسألهٔ عکس را حل‌کنید. مهره‌ها را از وضع III ، درسه‌حرکت به وضع اولیه‌برسانید، که باتوجه به حل مسألهٔ مستقیم، کار دشواری‌نیست.

۴. طرح حل، درجدول زیرداده شده است:

توده	وضع اولیه	حرکت اول	حرکت دوم	حرکت‌سوم
اول	۱۱	۱۱−۷=۴	۴	۴+۴=۸
دوم	۷	۷+۷=۱۴	۱۴−۶=۸	۸
سوم	۶	۶	۶+۶=۱۲	۱۲−۴=۸

مربوط به مسألهٔ ۴



مربوط به مسألهٔ ۵

۵. یکی از راه‌حلهای ممکن، درشکل، نشان داده شده است.

۶. ۳۵ مثلث. وحالا خودتان حساب‌کنید، درشکل مسألهٔ۶ (صفحهٔ ۲۲)، چند چهارضلعی وجود دارد؟

۷. به‌چهار دختر، هرکدام‌یك سیب می‌دهیم وسیب پنجم رابا سبد برای دختر پنجم باقی می‌گذاریم.

۸. چهار گربه.

۹. در وضع اولیهٔ مدادها، ۱ سانتیمتر از مداد زرد رنگ ، آلوده می‌شود. با حرکت مداد خاکستری به‌طرف پایین، سانتیمتر دوم طول‌آن‌هم آلوده‌می‌شود، ووقتی‌که دوباره به‌جای اول خود برمی‌گردد، سانتیمتر دوم

مداد خاکستری، که رنگی شده است، سانتیمتر دوم مداد زرد رنگ را آلوده می‌کند.

به‌این ترتیب، هردوحرکت متوالی‌مداد (یکی به‌طرف پایین‌ودیگری به‌طرف بالا)، یك سانتیمتر ازطول مداد زردرا رنگی‌می‌کند. بنابراین در ۲۰ حرکت (۱۰ باربه‌طرف پایین و ۱۰ باربه‌طرف بالا)، ۱۰ سانتیمتر ازکنارهٔ هر دو مداد آلوده می‌شود، که باتوجه به‌یك سانتیمتر آلودهٔ اولیه، رویهم ۱۱ سانتیمتر دومداد، آلوده به رنگ خواهد شد.

وقتی‌که لئونید میخائیلوویچ به چکمه‌های خود نگاه‌کرد، متوجه شد که ازپایین تا بالای چکمه، وبه‌خصوص درجاهایی‌که چکمه‌ها ضمن‌حرکت، به‌هم مالیده می‌شده‌اند، آلوده به‌گل شده است.

لئونید میخائیلوویچ پیش خود فکر کرد چه اتفاقی افتاده است، من که هیچ‌جا درگل عمیقی فرو نرفتم، ولی چکمه‌هایم تا زانو آغشته به گل است ؟

وحالا، همهٔ ما می‌توانیم بگوییم‌که واقعاً چه اتفاقی افتاده است.

۱۰. دوپسربچه از رودخانه می‌گذرند، یکی ازآنها درساحل دیگر می‌ماند ودیگری قایق را به‌طرف سربازها برمی‌گرداند وخود پیاده‌می‌شود. یکی ازسربازها درقایق می‌نشیند وبه‌طرف دیگرمی‌رود. آنجا، پسر بچه‌ای‌که منتظربود برقایق می‌نشیند، به‌طرف سربازها می‌آید، دوست خود را سوار می‌کند وبه ساحل دیگرمی‌رود، آنجا دوست خود را پیاده می‌کند و خودش قایق را برمی‌گرداند، تا یك سرباز دیگر را با قایق خودش به ساحل‌دیگر برساند و ...

به این ترتیب باهردوباررفت‌وبرگشت قایق، یکی ازسربازها به‌ساحل دیگر می‌رسد وبا تکرار این‌رفت وآمدها ، همهٔ سربازها به‌تدریج اززرودخانه عبور می‌کنند.

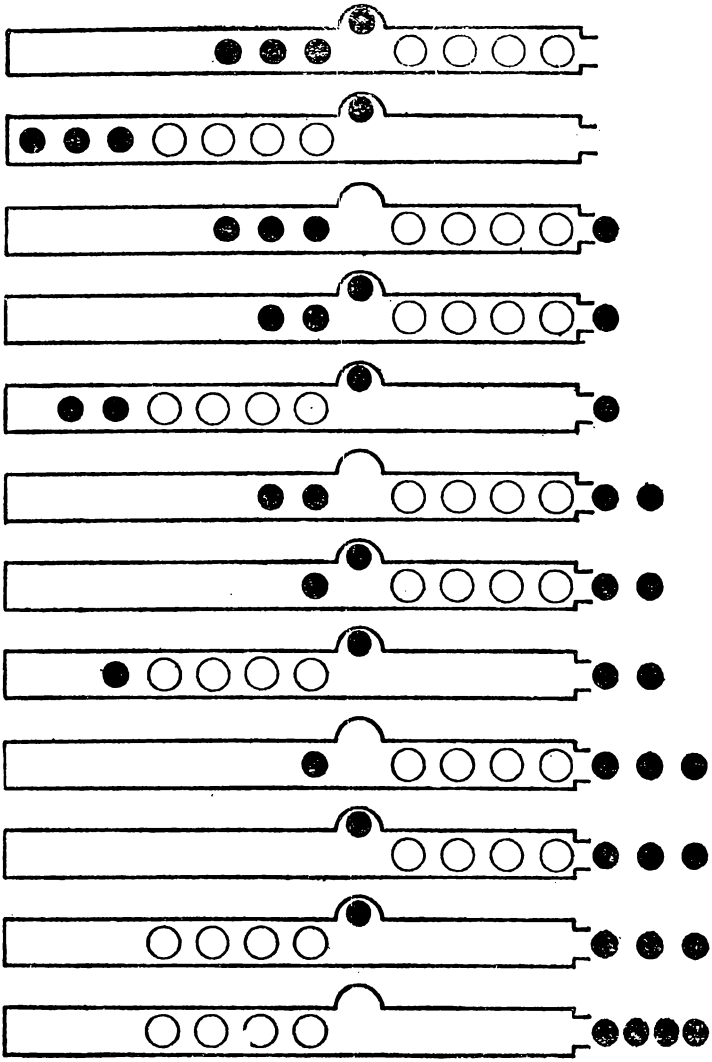
۱۱. گرگ، کلم را نمی‌خورد، بنابراین ابتدا بز را به‌طرف دیگر رودخانه می‌برد، زیراگرگ وکلم را می‌توان بدون مرد، تنها گذاشت.

وقتی‌که بز را درطرف‌دیگر رودخانه‌گذاشت، مرد باقایق‌برمی‌گردد، کلم را درقایـق می‌گذارد و دوبـاره به‌طرف دیگـر رودخانـه می‌رود. کلم را درساحل دیگر می‌گذارد، بـز را سوار برقایـق می‌کند و بـه ساحل اول برمی‌گردد.

بز را درساحل اول می‌گذارد، گرگ راسوار قایق مـی‌کند ودرطـرف دیگر پهلوی‌کلم می‌گذارد وخودش با قایق برمی‌گردد.

به این ترتیب، گرگ وکلم درطرف‌دیگرساحل رودخانه، مشکلی به وجود نمی‌آورند. مرد ازساحل اول، بز را برمی‌دارد وباخود به‌ساحل‌دیگر می‌برد.

وبه‌این‌ترتیب،مرد همهٔدارائی خودرا به‌سلامت‌به‌طرف دیگررودخانه‌می‌رساند.

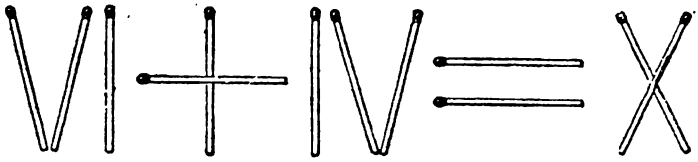


مربوط به مسألهٔ ۱۲

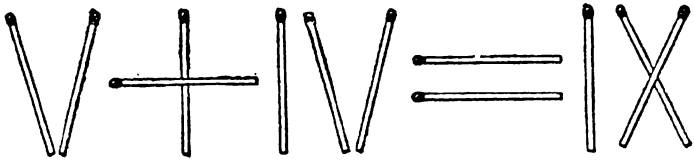
۱۲. شکل صفحهٔ ۵۱۴ حرکتهای مورد نظر را نشان می‌دهد.

۱۳. استادکار، ابتدا سه‌حلقهٔ یکی از زنجیرها را باز می‌کند (سه‌عمل) و به وسیلهٔ این سه‌حلقهٔ جداگانه، چهار زنجیر دیگر را به‌هم وصل می‌کند (بازهم سه‌حرکت، رویهم شش حرکت).

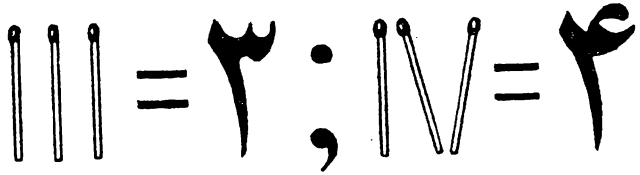
۱۴. جواب اول.



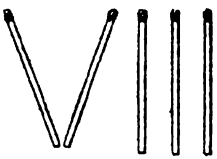
جواب دوم:



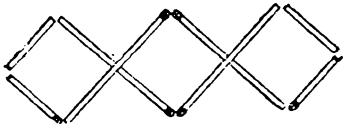
۱۵. جواب درشکل زیردیده می‌شود:



۱۶. باید باپنج چوب‌کبریت، عدد هشت را بارقمهای رومی‌بسازیم (شکل را ببینید).



مربوط به‌مسالهٔ ۱۶

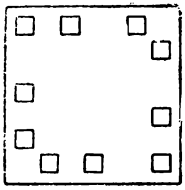


مربوط به مسالهٔ ۱۷

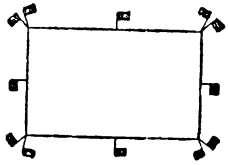
۱۷. جواب را درشکل صفحهٔ ۵۱۵ ببینید.

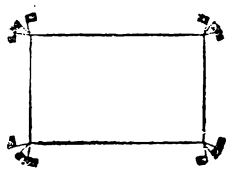
۱۸. اگر توجه کافی نکنیم، استدلال می‌کنیم که چون از تراشهای هر ۶ قالب می‌توان یك‌جزء جدیدساخت، بنابراین از ۳۶ قالب، ۶ جزء تازه بدست می‌آیدکه رویهم ۶+۳۶ ، یعنی ۴۲ جزء بدست می‌آید. ولی در واقع این ۶ قالب اخیرهم خود یك‌جزء اضافی به‌وجود می‌آورند وبنابراین رویهم ۴۳ جزء می‌شود.

۱۹. طرح قرارگرفتن پرچمها، روی شکل نشان داده شده است.



مربوط به‌مسالهٔ ۲۰

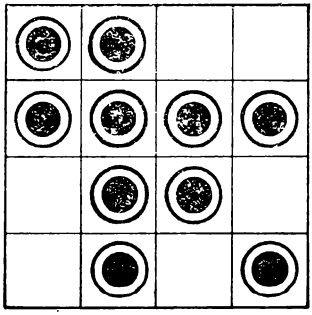


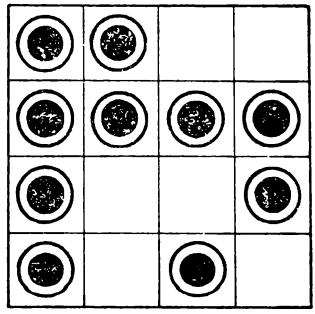


مربوط به‌مسالهٔ ۱۹

۲۰. درشکل، جای قرارگرفتن صندلیها، معین شده است.

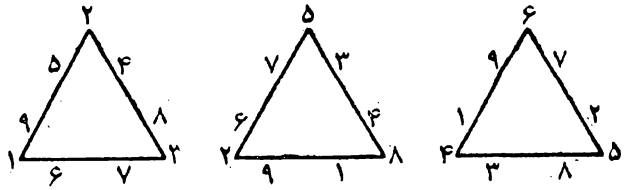
۲۱. دوجواب ازجوابهای ممکن در شکل زیرداده شده است.





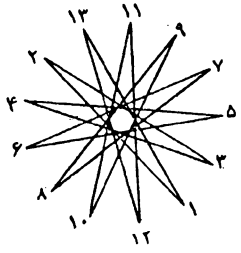
مربوط به مسالهٔ ۲۱

۲۲. شکل صفحهٔ بعد، حالتهای مختلف را نشان می‌دهد. مجموع عددها درهرضلع مثلث سمت‌چپ، مساوی ۱۷ و درهرضلع دومثلث‌دیگر، مساوی ۲۰ است. ممکن است جوابهای دیگری هم وجود داشته باشد.

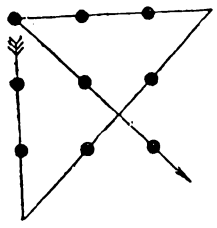


مربوط به مسالهٔ ۲۲

۲۳. وقتی‌که سیزده‌نفر دربازی شرکت داشته باشند ، می‌توان توپ را ۵ درمیان انداخت (شکل را ببینید). اگرتوپ را ۶ درمیان بینداریم (یعنی به نفرهفتم بدهیم)، مثل اینست‌که درجهت عکس حرکت‌کرده‌ایم .



مربوط به‌مسالهٔ ۲۳



مربوط به‌مسالهٔ ۲۴

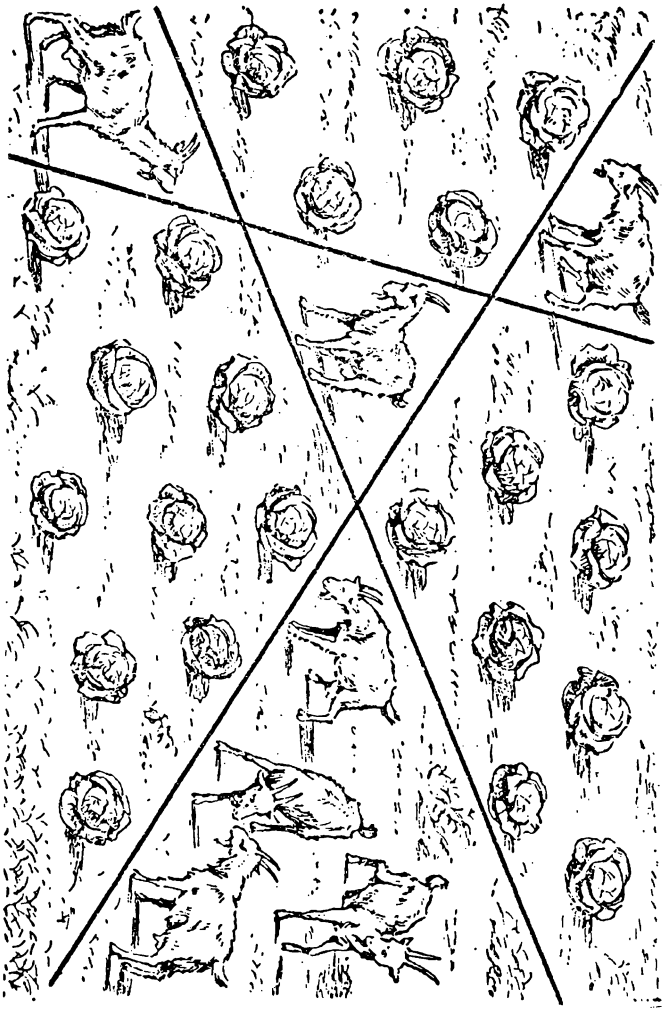
۲۴. یکی ازراه‌حلهای ممکن، روی شکل نشان داده شده است.

۲۵. جواب در شکل صفحهٔ ۵۱۸ نشان داده شده است.

۲۶. وقتی‌که دوقطار یك ساعت به‌لحظهٔ ملاقاتشان مانده‌باشد، ۱۰۰ کیلرمتر (۴۰+۶۰)، ازهم فاصله دارند.

۲۷. وقتی‌که درمسأله، بایك پدیدهٔ فیزیکی سروکار داریم، بایدتمام جوانب‌کار را درنظرگرفت، تا اشتباهی پیش‌نیاید. دراین مسأله، به‌هیچگونه محاسبه‌ای نیاز نداریم، زیرا همراه با بالاآمدن آب، کشتی و همراه آن نردبان طنابی هم بالا می‌آید وبنابراین هرگزآب به پلهٔ سوم نمی‌رسد.

۲۸. ۱. مجموع همهٔعددهای روی صفحهٔ ساعت، مساوی ۷۸ است، یعنی مجموع عددهای‌هرقسمت، باید مساوی ۳ : ۷۸ ، یعنی ۲۶ باشد .

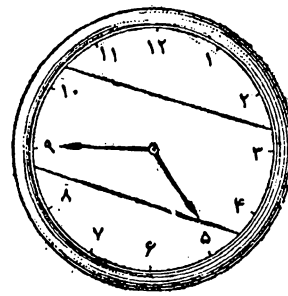


مربوط به مسألهٔ ۲۵

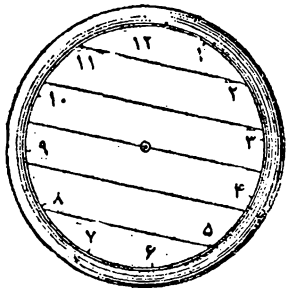
توجه کنیم که:

$$۱۲+۱=۱۳, \qquad ۱۱+۲=۱۳$$

ازآنجا راه‌حلی که درشکل صفحهٔ ۵۱۹ دیده می‌شود، بدست می‌آید.



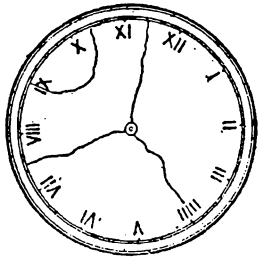
مربوط به مسألهٔ ۱.۲۸



مربوط به مسالهٔ ۲.۲۸

۲.۲۸. مجموع عددها، درهریك ازاین ۶ قسمت، بایدمساوی ۶ : ۷۸ یعنی ۱۳ باشد. بنابراین بایدعددهای روی صفحهٔ ساعت را طوری جفت‌کرد که مجموع‌هرجفت مساوی ۱۳ شود. شکل، راه تقسیم را نشان می‌دهد.

۲۹. درعددهای IX ، X و XI . سه علامت X (که نمایندهٔ ۱۰ است) مجاورهم قرارگرفته‌اند. روشن‌است‌که دو تا از اینها، باید دریك قسمت قرارگیرد، ضمناً ، شکاف باید عدد IX (ونه XI) را به دو قسمت X و I تقسیم‌کند ، زیرا تنها دراینصورت است که مجموع همهٔ عددهای صفحهٔ ساعت مساوی ۸۰ می‌شود. در یکی ازراه‌حلها، تنها یکی از شکافها را باید جابجاکرد (شکل را ببینید). حالا دیگر مجموع عددها در هرقسمت مساوی ۲۰ می‌شود .



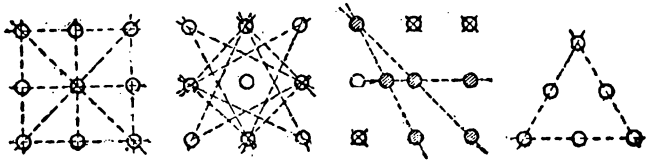
مربوط به‌مسألهٔ ۲۹

۳۰. جوان ، بعدازآنکه‌عقربه‌های شکسته را جوش می‌دهد، اشتباهاً عقربهٔ بزرگ را به‌جای ساعت شمار و عقربهٔ کوچك را به‌جای دقیقه شمار می‌گذارد، در نتیجه عقربهٔ بزرگ، باسرعت عقربهٔ ساعت‌شمار، یعنی کندتر وعقربهٔ کوچك، باسرعت‌عقربهٔ دقیقه‌شمار، یعنی تندتر، شروع به‌کارکردند. باراولی‌که جوان نزد مشتری‌برگشت، تقریباً ۲ساعت و ۱۰ دقیقه از

زمان‌تنظیم ساعت گذشته بود، یعنی‌حدودساعت۸ و۱۰ دقیقهٔ‌عصربود. دراین مدت، عقربهٔ بزرگتر (که باسرعت عقربـهٔ ساعت‌شمار حرکت می‌کرد)، از ۱۲ به۲ رسیده بود. عقربهٔ کوچکترهم (که‌باسرعت عقربهٔ دقیقه‌شمارحرکت مـی‌کرد)، دراین مدت دودورکامل زده است و۱۰ دقیقه دیگرهم جلو رفته است. به‌این‌ترتیب، ساعت درست‌را نشان می‌داد.

به‌سادگی می‌توان حساب کردکه باردوم هم، وقتی‌که جوان بعداز۱۳ ساعت و۵ دقیقه که ازساعت ۶ گذشته بـود، بـه‌منزل مشتری‌رفت، حرکت عقربه‌های عوضی چنان بوده است کـه ساعت درست را نشان می‌داده‌انـد: عقربـهٔ بزرگتر بعداز ۱۳ ساعت حرکت روی عدد ۱ ایستاده امت. عقربهٔ کوچکترهم (که‌به‌جای عقربهٔ دقیقه‌شمار کارمی‌کند)، دراین مـدت ۱۳دور کامل می‌زند وچون۵ دقیقه‌دیگرهم‌جلو می‌رود، روی ۷ قراردارد. به‌همین مناسبت، مرتبهٔ دوم‌هم‌به‌نظر می‌رسیدکه‌ساعت، وقت دقیق‌را نشان‌می‌دهد.

۳۱. ۸ ردیف سه‌دکمه‌ای‌و ۱۲ ردیف دودکمه‌ای داریم (روی‌شکل، ردیفها را باخطچین نشان داده‌ایم).

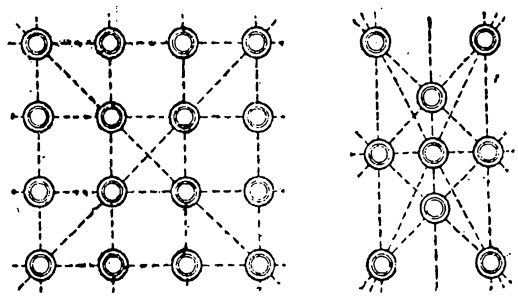


مربوط به مسالهٔ ۳۱

درشکل سوم ازسمت‌چپ، نشان داده شده است‌که‌چگونه می‌توان‌سه دکمه را برداشت وباحرکت‌دادن مختصریکی ازع دکمهٔ باقیمانده، سه‌ردیف سه دکمه‌ای درست‌کرد.

ترتیب دیگر قراردادن ۶ دکمه در سه‌ردیف سه‌دکمه‌ای درشکل‌سمت راست دیده می‌شود.

۳۲. وضع قرارگرفتن شانزده مهره در ۱۰ ردیف ۴ مهره‌ای درشکل سمت چپ ووضع قرارگرفتن نه‌مهره در ۱۰ ردیف سه مهره‌ای درشکل‌سمت راست صفحهٔ بعدنشان داده شده است.



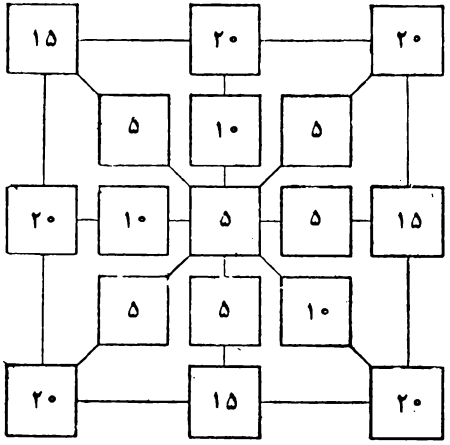
مربوط به‌مسألهٔ ۳۲

۳۳. حل مسأله را در شکل ، می‌بینید.

۳۴. با توجه به اینکه :

$$۱+۱۹=۲۰,$$
$$۲+۱۸=۲۰,$$
$$۳+۱۷=۲۰,...$$

هرکدام ازاین زوج‌عددها را در دودایرهٔ مقابل‌هم، وعدد ۱۰ را در دایـرهٔ مرکزی قرار می‌دهیم .



مربوط به مسألهٔ ۳۳

حل کامل مسأله، درشکل صفحهٔ‌بعد دیده می‌شود.

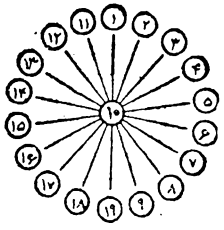
۱.۳۵. اغلب ممکن است جواب بدهندکه اتوبوس دورتر ازتهران است،که البته درست نیست، زیرا همهٔ مسافرهای اتوبوس و دوچرخـه در یك نقطه هستند وبنابراین ازتهران به‌یك فاصله‌اند.

۲.۳۵. همیشه‌یك‌کیلوگرم‌یك فلز، از نیم‌کیلوگرم‌آن بیشتر است.

۳.۳۵ برای ۶ ضربه، ۳۰ ثانیه وقت لازم است، بنابراین برای ۱۲ ضربه، بایده۶۰ ثانیه، یعنی۱ دقیقه، صبرکنیم. این جوابی است‌که اغلب‌به

پرسش مسألهٔ ۳ می‌دهند، که البته نادرست است.

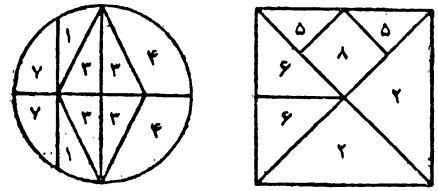
وقتی که ساعت ۶ ضربه می‌زند، بین این ضربه‌ها ۵ فاصله قراردارد، بنابراین برای هرفاصله ۵ : ۳۰، یعنی ۶ ثانیه، وقت‌لازم است. ازطرف دیگر بین ضربهٔ اول و دوازدهم، ۱۱ فاصله‌وجود دارد وبنابراین بـرای این ۱۱ فاصله ۶×۱۱، یعنی ۶۶ ثانیه باید صبرکرد.



مربوط به مسألهٔ ۳۴

۴۰۳۵. همیشه.

۳۶. جواب مسأله، در شکل داده شده است.



مربوط به مسألهٔ ۳۶

۳۷. ۲۰۰ ریال.

۳۸. درنظر اول، ممکن است تصور شود که مسأله‌ای پیچیده استو به استدلالی خاص، نیازدارد. ولی مطلب خیلی ساده است: مگس رویهم ۳ ساعت پروازکرده است و بنابراین رویهم ۳۰۰کیلومتر رفته است.

۳۹. سال 1961. و این تنها سالی از سدهٔ بیستم است که با سروته کردن کاغذ، تغییر نمی‌کند: 6 به 9 و 9 به 6 تبدیل می‌شود.

۱۰۴۰. دخترعدد ۸۰۸ را به‌جای ۷۰۷ دیده است.

۲۰۴۰. جای عددهای 8 و 9 را عوض‌کنید و 9 را وارونه به‌صورت 6 بگذارید. دراینصورت مجموع هر یك از ستونها، مساوی ۱۸ می‌شود.

۴۱. اختلاف سن پدر وپسرمساوی ۲۳ سال است. بنابراین بایدپسر هم اکنون ۲۳ سال داشته باشد تا سن پدر دوبرابر اوباشد.

۴۲. دربرخورد اول به‌نظر می‌رسدکه نتیجهٔ جمع دوستون نمی‌تواند یکی باشد، ولی‌اگرکمی دقت‌کنیم، می‌بینیم کـه اگـر درستون اول یکی از جمعها، نه تا ۱ وجود دارد (۱ × ۹)، درستون جمع دیگر، یك‌عدد ۹ قـرار گرفته است (۹ × ۱)، درستون دوم جمع اول، هشت تـا ۲ (۲ × ۸) و در ستون دوم جمع دوم، دوتا ۸ (۸ × ۲) وجود دارد و غیره.

به‌این ترتیب، معلوم می‌شودکه نتیجهٔ جمع‌در هردوستون یکی است.

۴۳. مجموع رقمهای‌یکان دوعدد اول و پنجم مساوی ۱۰ و مجموع دورقم دهگان وسدگان وغیره درآنها، مساوی ۹ می‌شود، بنابراین مجموع این دوعدد برابر است با ۱۰۰۰۰۰۰.

به‌همین‌ترتیب، مجموع‌دوعدد دوم‌وششم، سوم‌وهفتم، چهارم وهشتم هم‌مساوی۱۰۰۰۰۰۰، وبنابراین، مجموع تمام عددها مساوی ۴۰۰۰۰۰۰ می‌شود.

جواب شعبده بازی دوم. عدد سوم را طوری می‌نویسیم که هریك از رقمهای‌آن، بارقم نظیرش در یکی از دوعدد، و مثلاً عـدد دوم، مجموعی برابر ۹ بدهد. روشن است‌که دراینصورت، حاصلجمع سه عدد را می‌توان‌به این‌ترتیب‌ازچپ به‌راست نوشت: اول‌عدد ۱ را می‌نویسیم‌وبعد تمام‌رقمهای عدداصلی، با این تفاوت‌که ازآخرین‌رقم‌سمت راست‌آن یك واحدکم‌می‌کنیم.

۴۴. فرض‌کنید،سکه‌ای‌که تعدادریالهای‌آن‌زوج‌است (مثلاً دوریالی) دردست راست وسکه‌ای‌که تعداد ریالهای‌آن فرد است (مثلاً پنج‌ریـالی) در دست‌چپ باشد. دراینصورت سه برابرعدد زوج مساوی عدد زوج ودوبرابر عدد فرد بازهم عددی زوج و بنابراین مجموع‌آنها هم عددی زوج می‌شود.

حالا فرض‌کنید، سکه‌ای‌که تعداد ریالهای‌آن فرد است دردست راست و سکه‌ای‌که تعداد ریالهای‌آن زوج است، دردست چپ باشد. دراینصـورت سه‌برابر عدد فرد، عددی فرد و دوبرابر عدد زوج، عـددی زوج و مجمـوع آنها، عددی فرد می‌شود.

درصورت‌مسأله، می‌توان به‌طورکلی‌گفت‌که ریالهای‌دست‌راست رادر عددی فرد و ریالهای دست چپ را در عددی زوج ضرب کند.

۴۵. ۴ برادر و ۳ خواهر.

۴۶. ۲+۲+۲+۲۲ و ۸+۸+۸+۸۸+۸۸۸ .

۴۷. ۱۱۱ − ۱۱ = ۱۰۰ ، ۵×۵×۵−۵×۵ = ۱۰۰ ،

$$۵(۵+۵+۵+۵) = ۱۰۰ \quad ، \quad ۵\times۵(۵-\frac{۵}{۵}) = ۱۰۰ \quad .$$

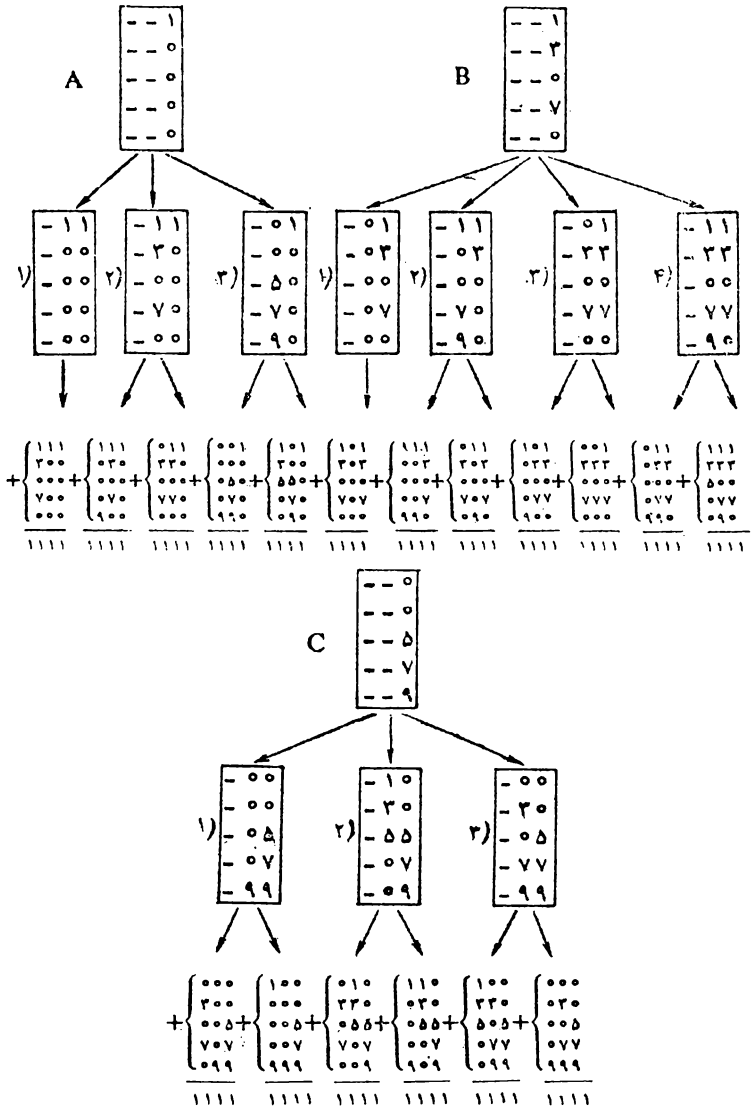
۴۸. اگر به‌طورمنظم کار را شروع کنیم، می‌توان تمام‌حالتهای‌مختلف را بدست‌آورد (طرح صفحهٔ بعد را ببینید). ابتدا حالتهای مختلف تبدیل رقمهای اول را به‌صفر مطالعه می‌کنیم (مجموع این رقمها، باید به واحد ختم شود). دراین مورد، سه حالت‌وجود دارد (درطرح؛ این سه حالت رابه A ، B و C نشان داده‌ایم). وقتی‌که حاصلجمع ستون اول را می‌دانیم، می‌توانیم حالتهای مختلفی‌راکه برای تبدیل رقمهای ستون دوم ممکن است پیدا کنیم (در طرح، حالتهای A.۱ ، ۲ ، ۳ ؛ B.۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ؛ C.۱ ، ۲، ۳) وبالاخره به‌ستون‌آخر می‌پردازیم (ردیف پایین طرح).

طرح نشان می‌دهدکه برای مسأله، ۱۸ حالت وجود دارد، دریکی از این حالتها ، ۵ رقم به صفر تبدیل شده است، دریك حالت دیگر ۶ رقم، در سه حالت ۷ رقم، درشش حالت ۸ رقم ، درپنج حالت ۹ رقم و در دوحالت، ۱۰ رقم.

نمی‌توان بیش از۱۰ رقم وکمتر از۵ رقم را به‌صفر تبدیل‌کرد،تاهمان مجموع ۱۱۱۱ بدست آید.

۴۹. همانطورکه وقتی می‌خواهیم‌جعبه‌ای را از اشیایی با اندازه‌های مختلف پرکنیم، ابتدا شییء بزرگتر را قرار می‌دهیم، برای تشکیل مجموع مورد نظر هم بهتر است‌که ازبزرگترین جملهٔ ممکن درجمع، شروع‌کنیم.بنا برشرط، باید تعداد جمله‌های جمع مساوی ۸ و همهٔ عددها فرد باشند.

هیچکدام ازعددهای ۱۷،۱۹ و ۱۵، نمی‌توانند جمله‌ای از جمع‌مورد نظر باشند، زیرا برای‌آنها نمی‌توان هفت عدد فرد دیگر پیداکرد که‌رویهم مساوی۲۰ شوند. اگر یکی از جمله‌های جمع را ۱۳ بگیریم، لازم وکافی است‌که هفت جملهٔ دیگر را واحد بگیریم:



مربوط به مسألهٔ ۴۸

$$۱۳+۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱=۲۰$$

وقتی‌که جملهٔ اول را مساوی ۱۱ بگیریم ، جملهٔ دوم نمی‌تواند ۹،

۷، یا ۵ باشد (زیرا در اینصورت نمی‌توان تعداد لازم جمله‌های دیگر را انتخاب کرد)؛ جملهٔ دوم را ۳ می‌گیریم:

$$۱۱+۳=۱۴$$

این عدد، شش واحد کمتر از ۲۰ است وما هم ۶ جمله لازم داریم ، بنابراین جواب دوم بدست می‌آید :

$$۱۱+۳+۱+۱+۱+۱+۱+۱=۲۰$$

جملهٔ اول را۹ می‌گیریم. ۷ نمی‌تواند جملهٔ دوم باشد (زیرا ۷+۹ مساوی ۱۶ می‌شودکه تا۲۰ تنها ۴ واحد فاصله دارد، ولی ما ۶ جمله‌لازم داریم). ۵ را امتحان می‌کنیم، داریم:

$$۹+۵=۱۴$$

برای ۶ جملهٔ باقیمانده، ۶ واحد داریم و بنابراین ممکن است.جواب سوم بدست می‌آید:

$$۹+۵+۱+۱+۱+۱+۱+۱=۲۰$$

جملهٔ دوم را ۳ می‌گیریم :

$$۹+۳=۱۲$$

۸ واحد برای ۶ جمله می‌ماند. جملهٔ سوم را هم مساوی ۳ می‌گیریم ، دراینصورت :

$$۹+۳+۳=۱۵$$

۵ واحد برای پنج جمله می‌ماند. جواب چهارم بدست می‌آید:

$$۹+۳+۳+۱+۱+۱+۱+۱=۲۰$$

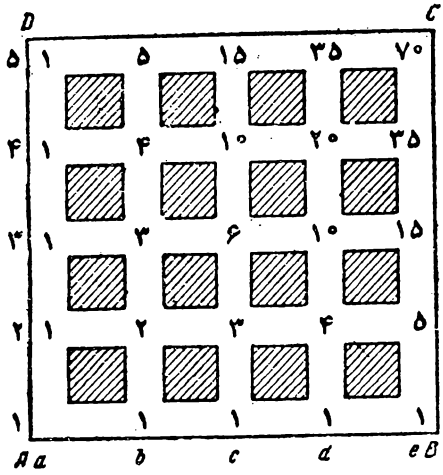
دیگر فکر می‌کنم که روش کارروشن‌شده است. آزمایش‌را ادامه‌دهید، جمله اول را ۷، بعد ۵ وبالاخره ۳ بگیرید، رویهم ۱۱ جواب‌بدست‌می‌آید:

$$۱۳+۱+۱+۱+۱+۱+۱+۱=۲۰$$
$$۱۱+۳+۱+۱+۱+۱+۱+۱=۲۰$$
$$۹+۵+۱+۱+۱+۱+۱+۱=۲۰$$

$$۹+۳+۳+۱+۱+۱+۱+۱=۲۰$$
$$۷+۷+۱+۱+۱+۱+۱+۱=۲۰$$
$$۷+۵+۳+۱+۱+۱+۱+۱=۲۰$$
$$۷+۳+۳+۳+۱+۱+۱+۱=۲$$
$$۵+۵+۵+۱+۱+۱+۱+۱=۲۰$$
$$۵+۵+۳+۳+۱+۱+۱+۱=۲۰$$
$$۵+۳+۳+۳+۳+۱+۱+۱=۲۰$$
$$۳+۳+۳+۳+۳+۳+۱+۱=۲۰$$

تنهایك جواب‌وجود دارد (ردیف ششم)، که تعداد جمله‌های نامساوی درآن بیش از دیگران است، دراین‌جمع ازچهار عدد فرد مختلف استفاده شده است.

۵۰. اگربخواهیم همهٔ مسیرهای‌ممکن از A تا C را مستقیماًوبدون طرح روش‌کار، محاسبه‌کنیم، دچار، سردرگمی و بلاتکلیفی می‌شویم. باید مسیرهارا به‌تدریج و تاچهاراههایی‌که به‌نقطهٔ A نزدیکتر است، محاسبه‌کرد (شکل را ببینید).



مربوط به‌مسالهٔ ۵۰

روشن‌است که به‌هر کدام ازچهارراههایی که درطول AB و AD قرار گرفته است، تنها یك‌راه می‌رود، و به‌چهار راه (b — ۲) دو مسیر وجود دارد. بـه‌چهار راه (c — ۲) به دوطـریق می‌توان رسید: اولاً از طـریق (b — ۲)، یعنی به وسیلهٔ دومسیر، ثانیاً ازطریق نقطهٔ (c — ۱)، یعنی‌باز هم یك مسیر. بنابراین بـه چهار راه (c — ۲) رویهـم از ۱+۲، یعنی ۳ مسیر می‌توان رسید (آنها را پیداکنید). به‌همین‌ترتیب‌می‌توان استدلال‌کرد که تا چهارراه (b — ۳) هم، ۳ مسیر وجود دارد.

به چهارراه (c — ۳). ۳مسیر از طریق نقطهٔ (b — ۳) و ۳ مسیراز طریق نقطهٔ (c — ۲)، یعنی‌رویهم ۶ مسیر وجود دارد. با ادامهٔ این‌استدلال معلوم می‌شودکه به‌طورکلی، تعداد مسیرهایی‌که به‌طرف هرچهارراه وجود دارد، برابراست‌با مجموع مسیرهایی‌که به‌طرف‌دوچهار راه‌قبلی وجود دارد: یکی چهار راه‌سمت چپ و دیگری چهار راه سمت پایین . مثلاً ، اگر معین کرده باشیم‌که تعداد مسیرها به‌چهار راه (c — ۳) مساوی ۶ وتعداد مسیرها به‌چهارراه (d — ۲)مساوی۴ است، دراینصورت‌تعداد مسیرهایی‌که از A تا جهارراه (d — ۳) وجود دارد، مساوی ۱۰ می‌شود وغیره.

به‌این‌ترتیب، می‌توان تعداد مسیرهای موجود را، از نقطهٔ A تا هر چهار راه دلخواه پیداکرد. با این روش، تعداد مسیرهایی‌که از نقطهٔ A تـا ننطهٔ C می‌توان پیمود، مساوی ۷۰ می‌شود.

(تعداد مسیرها مساوی $C_{۸}^{۴}$ و در حالت‌کلی مساوی C_{m+n}^{n} است ، که‌درآن m و n به‌ترتیب عبارتست ازتعدادمحله‌ها درطول AB و AD.)

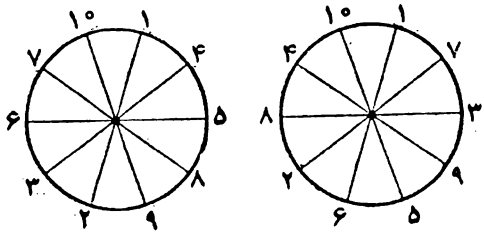
۵۱. اگردر دوانتهای‌قطری، عددهایA وa و در دوانتهای‌قطرمجاور آن، عددهای B و b قرارگرفته‌باشد، باید داشته باشیم: $A+B=a+b$ ازآنجا بدست می‌آید: $A-a=b-B$ ، یعنی تفاضل عددهایی که مقابل هم دردوانتهای یك قطر قرارگرفته‌اند، باید مقداری ثابت باشد.

با این‌کلید، می‌توانیم همهٔ جوابهای مسأله را پیدا کنیم.

حالا روشن است‌که برای حل مسأله باید عددهای صحیح از ۱ تا ۱۰ را به ۵ زوج طوری تقسیم‌کردکه تفاضل دوعدد هر زوج مقدار ثابتی باشد. آزمایش معلوم می‌کندکه تنها دوگروه پنج زوجی از این ده‌عدد وجـود دارد که باشرط مورد نظر می‌سازد:

a) گروه با اختلاف ۱	b) گروه با اختلاف ۵
۱ — ۲	۱ — ۶
۳ — ۴	۷ — ۲
۵ — ۶	۳ — ۸
۷ — ۸	۹ — ۴
۹ — ۱۰	۵ — ۱۰

باقراردادن این عددها روی‌محیط‌دایره، دو جواب اصلی بدست‌می‌آید (شکل رابببنید). همهٔ جوابهای دیگر را می‌توان با جا به‌جاکردن یك‌زوج عدد، از دوسر یك قطر به دوسر قطری دیگر، پیداکرد، زیرا جابه‌جا شدن زوجها درداخل یك‌گروه، اشکالی به‌وجود نمی‌آورد.



مربوط به مسألهٔ ۵۱

به‌این ترتیب، اگر زوج ۲ — ۱ را دوسر یك‌قطر قراردهیم. در دو انتهای قطر مجاور می‌توان یکی از زوجهای ۳ — ۴ ، ۷ — ۸ یا ۹ — ۱۰ را قرار داد.

تا اینجا چهارجواب مختلف بدست می‌آید. درهرکدام ازاین حالتها، برای دوطرف قطرسوم می‌توان یکی ازسه زوج باقیمانده را انتخاب‌کرد، یعنی تا اینجا رویهم ۳ × ۴ یعنی ۱۲ جواب. برای هریك از این حالتها، بسته به‌اینکه دوزوج باقیمانده را دوسرقطرهای چهارم وپنجم چگونه قرار دهیم، دوحالت‌پیش‌می‌آید. به‌این ترتیب برای‌هرکدام ازگروهها، ۲ × ۱۲ یعنی ۲۴ جواب بدست می‌آید.

رویهم۴۸ جواب (تعداد جوابها برابر است با دوبرابر تعدادترتیبهای مختلف چهارعنصر: $2P_4$).

۵۲. برای چهارعدد، تنها یك گروه عدد وجود دارد:

$$۱+۱+۲+۴=۱\times۱\times۲\times۴$$

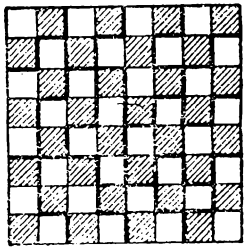
برای پنج عدد، سه جواب پیدا می‌شود:

$$۱+۱+۱+۲+۵=۱\times۱\times۱\times۲\times۵$$
$$۱+۱+۱+۳+۳=۱\times۱\times۱\times۳\times۳$$
$$۱+۱+۲+۲+۲=۱\times۱\times۲\times۲\times۲$$

گروههای ۶ و ۷ و... عددی را خودتان پیداکنید. مثلاً دوعدد ۲و ۶ را انتخاب‌کنید، و به مجموع‌آنها، ۶+۲ ، آنقدر واحد اضافه‌کنید تا حاصلجمع مساوی حاصلضرب ۶×۲ یعنی ۱۲ بشود و حاصلضرب ۶×۲ را هم درهمان واحدها ضرب‌کنید.

۵۳.
$$۹+۸+۷+۶۵+۴+۳+۲+۱=۹۹,$$
$$۹+۸+۷+۶+۵+۴۳+۲۱=۹۹,$$
$$۱+۲+۳۴+۵۶+۷=۱۰۰,$$
$$۱+۲۳+۴+۵+۶۷=۱۰۰$$

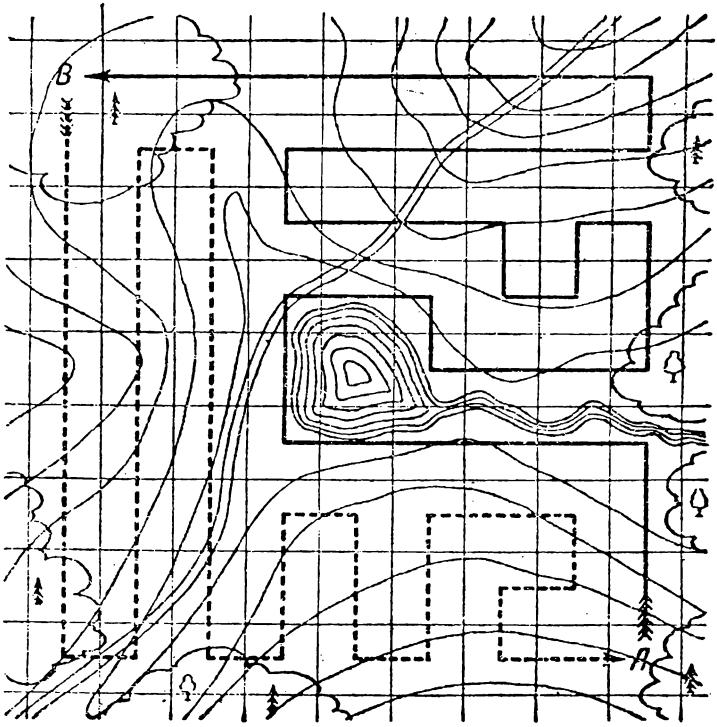
۵۴. راه حل‌ممکن، درشکل نشان داده شده است.



مربوط به‌مسألهٔ ۵۴

۵۵. یکی از راه‌حلهای ممکن در شکل صفحهٔ‌بعد داده شده‌است. مسیر یکی از زمین‌شناسها با خط کامل و دیگری با نقطه‌چین مشخص‌شده است. ضمناً هرزمین شناس درست از۴۰ خانه عبورکرده‌است.

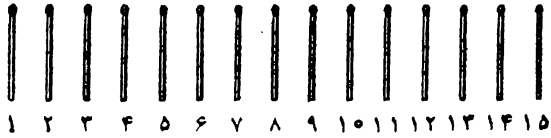
۵۶. هرراه حل دیگری‌هم که‌برای این مسأله فکرکنید، منجر به‌همان راه‌حل اساسی‌می‌شود، که درصورت‌مسأله



مربوط به مسألهٔ ۵۵

آورده‌ایم، یعنی زوجها را دردوطرف جمع کنیم تا اینکه به‌هشت‌چوب‌کبریت برسیم وسپس مطابق طرح عمل کنیم.

۵۷. برای اینکه بیان‌حرکت چوب‌کبریتها ساده‌تر باشد، روی صفحهٔ کاغذ، ۱۵ عدد صحیح، از ۱ تا ۱۵، به‌ردیف ازچپ به‌راست‌بنویسید و روی هریك از عددها، چوب‌کبریتی قرار دهید، اینطور:



چوب‌کبریتهارا به‌این‌ترتیب جابه‌جاکنید: ۵ را روی ۱ بگذارید، ۶ را روی ۱، یا به‌طور خلاصه به‌این ترتیب:

۵ ⟵ ۱، ۶ ⟵ ۱، ۹ ⟵ ۳، ۱۰ ⟵ ۳، ۸ ⟵ ۱۴، ۷ ⟵ ۱۴،

۴ ⟵ ۲، ۱۱ ⟵ ۲، ۱۳ ⟵ ۱۵، ۱۲ ⟵ ۱۵

می‌بینیدکه راه حل برهمان اساس مسألهٔ قبل است: گروه سه‌چوب کبریتی را دریکی از مرزهای ردیف مفروض می‌سازیم، سپس گروههای سه‌تایی را روی‌چوب‌کبریتهای دوم در دوطرف دوازده ردیف چوب‌کبریتی که باقی‌مانده است، می‌سازیم.

هرترتیب دیگری‌که برای جابه‌جاکردن چوب‌کبریتها درنظر بگیریم، منجر به‌همین راه حل می‌شود.

با استدلالی‌که درمتن مسأله‌های ۵۶ و ۵۷ آوردیم، معلوم می‌شود که‌برای تبدیل به‌گروههای دوتایی، لااقل ۴ جفت (یعنی ۸) چوب کبریت وبرای تبدیل‌به‌گروههای سه‌تایی،لااقل ۴ تا سه‌تا (یعنی ۱۲) چوب‌کبریت لازم است. ازهمین استدلال برای تبدیل به‌گروههای ۵تایی، ۶تایی ،... و nتایی هم می‌توان استفاده کرد: درهرمورد باید حداقل ۴گروه داشت (۴n چوب‌کبریت). از اینجا نتیجه می‌شود کـه برای تشکیل‌گروههای nتایی، کافی‌است‌که ۴n چوب‌کبریت‌داشته‌باشیم،ولی‌می‌توان‌با ۵n، ۶n، ۷n،... چوب‌کبریت‌هم، گروههارا ساخت. به‌این‌ترتیب برای درست‌کردن‌گروههای n چوب‌کبریتی، می‌توان kn چوب‌کبریت را بـه‌ردیف هم چید، کـه درآن $k \geqslant ۴$ است.

۵۸. مطلب خیلی ساده است. وقتی‌که از منزل خارج می‌شدم‌ساعت دیواری را به‌کار انداختم و وقتی را که نشان می‌داد یادداشت کردم، سپس وقتی‌که به‌منزل برگشتم به‌ساعت‌دیواری نگاه کردم. اختلاف وقت‌درساعت دیواری، نشان می‌دادکه من چه مدت درمنزل نبوده‌ام. همین اطلاع، به‌من امکان دادکه ساعت دیواری را روی وقت صحیح قرار دهم.

مدتی راکه پیش دوستم مانده بودم ازکل زمانی‌که در منزل‌نبوده‌ام، کم‌کردم، در نتیجه زمانی را که برای رفت وآمـد صرف‌کرده بودم، بدست

آوردم . این عدد رانصف‌کردم و به زمانی که موقع خداحافظی از دوستم پرسیده بودم، اضافه‌کردم تا معلوم شودکه ساعت‌دیواری را روی چه‌وقتی قرار دهم .

۵۹. جواب اول ـ برای تنظیم دوتساوی اول، فکرزیادی‌لازم‌نیست:

$$(۱+۲) : ۳ = ۱,$$

$$۱۲ : ۳ : ۴ = ۱$$

برای تساوی سوم، عمل تساوی اول را تکرار می‌کنیم، نتیجه را به ۴ اضافه وحاصل را برعدد آخر، یعنی ۵، تقسیم می‌کنیم:

$$[(۱+۲) : ۳+۴] : ۵ = ۱$$

این‌روش را می‌توان برای‌همهٔ‌تساویهایی‌که درردیف‌فردقرار گرفته‌اند، به‌کار برد،مثلاً برای تشکیل تساوی پنجم، تساوی سوم را تکرارمی‌کنیم، نتیجه را به عدد بعدی اضافه وحاصل را به عدد آخر تقسیم می‌کنیم.

به‌همین ترتیب می‌توان براساس تساوی دوم، همهٔ تساویهای ردیف زوج را درست‌کرد. به این ترتیب خواهیم داشت:

$$(۱+۲) : ۳ = ۱$$

$$۱۲ : ۳ : ۴ = ۱$$

$$[(۱+۲) : ۳+۴] : ۵ = ۱$$

$$(۱۲ : ۳ : ۴+۵) : ۶ = ۱$$

$$\left\{[(۱+۲) : ۳+۴] : ۵+۶\right\} : ۷ = ۱$$

$$[(۱۲ : ۳ : ۴+۵) : ۶+۷] : ۸ = ۱$$

$$\left\{\{[(۱+۲) : ۳+۴] : ۵+۶\} : ۷+۸\right\} : ۹ = ۱$$

همانطورکه می‌بینید، ازعمل تفریق استفاده نکرده‌ایم.

جواب دوم.

$(۱+۲) : ۳ = ۱$

$۱۲ : ۳ : ۴ = ۱$

$[(۱+۲) \times ۳ - ۴] : ۵ = ۱$

$(۱ \times ۲ + ۳ - ۴ + ۵) : ۶ = ۱$

$\{[(۱+۲) \times ۳ - ۴] : ۵ + ۶\} : ۷ = ۱$

$[(۱+۲) : ۳ \times ۴ + ۵ + ۶ - ۷] : ۸ = ۱$

$(۱ \times ۲ + ۳ + ۴ - ۵ + ۶ + ۷ - ۸) : ۹ = ۱$

دراین جوابها ازهرچهار عمل حساب استفاده شده است.

۶۰. کیلومتر شمار اتومبیل عدد ۱۵۹۵۱ را نشان می‌دهد. بعد از اینکه اتومبیل ۲ساعت حرکت‌کند، بدون تردید رقم ده‌هزار نمی‌تواندتغییر کند، بنابراین رقم اول وآخر عدد متقارن جدید، همان ۱ خواهد بود. رقم هزار، می‌تواند وباید تغییرکند، زیـرا اتومبیل در دو ساعت مسلماً از ۴۹ کیلومتر بیشتر می‌رود، ولی بدون شك مسافتی‌کـه طی می‌کند، از ۱۰۰۰ کیلومتر کمتر است. بنابراین ، رقم هزارگان وهمراه با آن، رقم دهگـان مساوی ۶ است.

روشن است‌که رقم سدگان‌می‌تواند صفر یا واحدباشد وکیلومترشمار، یکی ازعددهای ۱۶۰۶۱ یا ۱۶۱۶۱ را نشان دهد.

رقم سدگان نمی‌تواند مساوی۲ باشد، زیرا دراین‌صورت‌باید اتومبیل به اندازهٔ

$$۱۶۲۶۱ - ۱۵۹۵۱ = ۳۱۰ \quad \text{(کیلومتر)}$$

را در دوساعت طی‌کرده باشد؛ وچنین سرعتی برای یك اتومبیل نـه‌عادی است و نه عاقلانه.

اگر کیلومتر شمار، عدد ۱۶۰۶۱ را نشان دهد، سرعت اتومبیل ۵۵

کیلومتر در ساعت و اگرعدد ۱۶۱۶۱ را نشان دهد، ۱۰۵ کیلومتردرساعت بدست می‌آید، که غیرعادی نیستند.

۶۱. برای حل مسأله، باید تعداد ابزارهایی راکه سه‌گروه ساخته است، پیداکنیم. برای این منظور هم باید به‌نوبهٔ خود بدانیم‌که هریك از ۱۰عضوگروه به‌طور متوسط، چند وسیله‌را درست‌کرده‌است. اگر۹وسیله‌ای راکه سرگروه به‌طوراضافی درست‌کرده‌است به‌طورمساوی بین۹کارگرجوان تقسیم‌کنیم، معلوم می‌شودکه هریك از ده عضوگروه به‌طور متوسط به اندازهٔ ۱+۱۵، یعنی ۱۶ وسیله درست‌کرده‌اند. ازاینجا نتیجه می‌شودکه سرگروه ۹+۱۶، یعنی ۲۵ وسیله را درست کرده است. به این ترتیب، رویهم ۲۵+(۹×۱۵)، یعنی۱۶۰ وسیله، به‌کمك این‌گروه درست‌شده‌است

کسانی‌که جبر می‌دانند، می‌توانند این مسأله را به‌کمك تشکیل یك معادلهٔ یك مجهولی حل‌کنند.

۶۲. اتومبیل باسرعت ۳۰کیلومتر در ساعت، هرکیلومتر را در ۲ دقیقه، وباسرعت ساعتی۲۰کیلومتر، هرکیلومتر را در ۳ دقیقه طی می‌کند. یعنی، وقتی‌که اتومبیل با سرعت ساعتی ۲۰کیلومتر حرکت می‌کند، درهر کیلومتر، یك دقیقه را از دست می‌دهد. می‌دانیم‌که اتومبیل، وقتی‌که با سرعت ساعتی ۲۰کیلومتر حرکت می‌کند، رویهم ۲ ساعت یا ۱۲۰ دقیقه را از دست‌می‌دهد، بنابراین، فاصلهٔ از ده تا شهر مساوی۱۲۰کیلومتراست.

اتومبیل با چه سرعتی باید حرکت‌کند تا درست به موقع برسد؟

اگر تصورکنیم‌که این سرعت، عبارتست از واسطهٔ عددی بین ۲۰ و ۳۰ کیلومتر، یعنی ۲۵کیلومتر اشتباه کرده‌ایم.

اتومبیل باید رویهم ۵ ساعت در راه باشد، زیرا:

$$\frac{۱۲۰}{۳۰}+۱=۵$$

بنابراین، برای اینکه گندم درست درساعت ۱۱ به شهر برسد، اتومبیل‌باید با سرعت $\frac{۱۲۰}{۵}$، یعنی ۲۴ کیلومتر درساعت حرکت‌کند.

۶۳. اگر قطاری که شاهد عبور قطارهای مقابل است، بی‌حرکت بود، جواب دوست اول درست بود، ولی قطار این دوستان هم درجهت مخالف قطارهای مقابل و با همان سرعت، حرکت می‌کند. بنابراین اگر قطاری از طرف مقابل بعد از ۵ دقیقه دیده می‌شود، به معنای آنست که درصورت ساکن بودن قطار دوستان، بعد از ۱۰ دقیقه به‌آن می‌رسید. به‌این ترتیب فاصلهٔ زمانی بین هر دوقطار متوالی که از طرف مقابل می‌آید، مساوی ۱۰ دقیقه است.

حالا دیگر روشن است که درهرساعت ۶ قطار به‌شهر می‌رسد، نه ۱۲ قطار.

۶۴. باید مجموع رقمهای این عددها را پیدا کرد:

۱,۲,۳,۴,...,۹۹۹۹۹۹۹۹۸, ۹۹۹۹۹۹۹۹۹, ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰

عددها را به‌این ترتیب درگروههای دو عددی قرار می‌دهیم:

۹۹۹۹۹۹۹۹۹ , ۰

۹۹۹۹۹۹۹۹۸ , ۱

۹۹۹۹۹۹۹۹۷ , ۲

.....

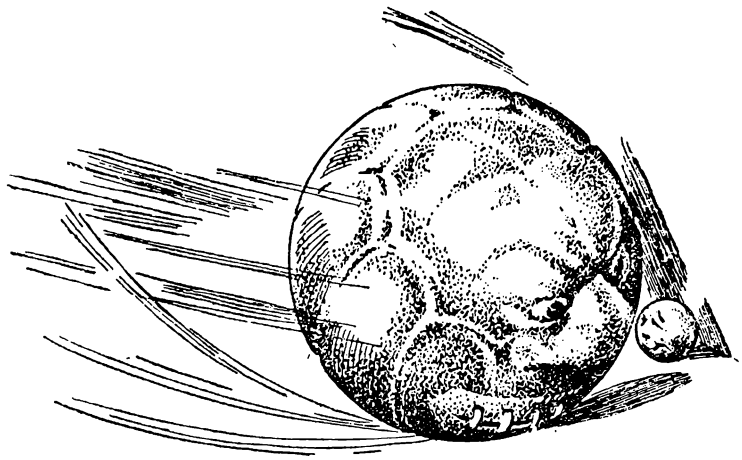
نیم‌میلیارد (۵۰۰۰۰۰۰۰۰) جفت بدست می‌آید و مجموع رقمها درهرجفت مساوی ۸۱ است. آخرین عدد ۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰، زوجی ندارد و مجموع رقمهای آن مساوی ۱ است.

به این ترتیب مجموع رقمهای عددهای مورد نظر چنین می‌شود:

$$(۵۰۰۰۰۰۰۰۰ \times ۸۱) + ۱ = ۴۰۵۰۰۰۰۰۰۰۱$$

۶۵. اگرتوپ کوچك، خود را روی زمین به‌یکی از دیوارهای اطاق بچسباند، از دسترس توپ بزرگ چدنی دور می‌ماند، اگر از ارهٔ پای دیوار مانع شود که توپ کوچك خود را به دیوار وکف اطاق بچسباند، می‌تواند به یکی ازگوشه‌های اطاق پناه ببرد.

کسانی که‌هندسه می‌دانند،می‌توانند محاسبه کنندکه اگرقطر کرهٔ بزرگتر



مربوط به مسألهٔ ۶۵

تقریباً ۵/۸۳ برابر (دقیقاً $\sqrt{۳}۲+۳$ برابر) قطر کرهٔ کوچکتر باشد، وقتی که کرهٔ کوچکتر خود را به‌کنار دیوار به‌چسباند، ازضربهٔ توپ بزرگتر مصون خواهد بود.

قطرتوپ فوتبال هم تقریباً ۵/۸۳ برابر قطرتوپ تنیس است، بنابراین اگر توپ‌کوچك سلولوئیدی خود را به‌کنار دیوار برساند و به‌آن به‌چسبد، توپ بزرگ چدنی نمی‌تواند آسیبی به‌آن برساند.

۶۶. ساعت، درهرشبانه‌روز به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}$، یعنی $\frac{۱}{۶}$ دقیقه جلو می‌رود. درنظر اول گمان می‌رود برای اینکه ساعت ۵ دقیقه جلوبرود، $\frac{۱}{۶}$: ۵ ، یعنی ۳۰ روز وقت‌لازم است، یعنی صبح ۳۱ اردیبهشت. ولی‌این جواب درست نیست.

در صبح ۲۸ اردیبهشت، ساعت به اندازهٔ $\frac{۱}{۶}\times ۲۷$ ، یعنی $۴\frac{۱}{۲}$ دقیقه جلو رفته است، وچون درجریان روز هم $\frac{۱}{۲}$ دقیقه جلو می‌رود، بنابراین عصر روز بیست‌وهشتم اردیبهشت، ساعت ما، ۵ دقیقه جلو رفته است.

۶۷. $۲\frac{۱}{۲}$ برابر .

۶۸. ممیز، دراین‌صورت عدد ۲/۳ بدست‌می‌آیدکه از ۲ بزرگتر واز ۳ کوچکتر است.

۶۹. a) $\frac{۱}{۵}$ ، b) $\frac{۱}{۷}$ ؛ اگر کسر $\frac{۱}{۲n-۱}$ را درنظر بگیریم و به اندازهٔ مخرج ، به صورت و مخرج‌آن اضافه‌کنیم، کسر مفروض n برابر می‌شود. خودتان می‌توانید استدلال آنرا پیداکنید.

۷۰. اگر $\frac{۱}{۲}$، ثلث عددمجهول‌است، دراین‌صورت‌باید این‌ثلث‌را سه برابرکرد تا $۱\frac{۱}{۲}$ به عنوان عدد مجهول بدست آید .

۷۱. فاصلهٔ میدان تا ایستگاه راه‌آهن، برابربا $\frac{۱}{۱۲}(=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۳})$ تمام‌راه دانش‌آموز است. توکا این‌فاصله را ۵ دقیقه طی می‌کند. بنابراین برای‌تمام راه ۵ × ۱۲ ، یعنی ۶۰ دقیقه وقت‌لازم دارد (درست‌یك‌ساعت)؛ $\frac{۱}{۴}$ راه رادر ۴ : ۶۰ ، یعنی ۱۵ دقیقه طی‌می‌کند، از اینجا معلوم می‌شودکه او درساعت ۷ و ۱۵ دقیقه ازمنزل خارج شده و درساعت ۸ و ۱۵ دقیقه به‌مدرسه رسیده است .

۷۲. جواب مساوی ۱۲ ثانیه نیست . ازپرچم اول تـا پرچم هشتم، درست ۷ فاصله وجود دارد و ازپرچم اول تـا پرچم دوازدهم ، ۱۱ فاصله. ورزشکار،هرفاصله‌را در $\frac{۸}{۷}$ ثانیه وبنابراین، ۱۱ فاصله را در ۱۱ × $\frac{۸}{۷}$ ، یعنی $۱۲\frac{۴}{۷}$ ثانیه طی می‌کند.

۷۳. او دیرتر ازپیاده به‌منزل می‌رسد. درنیم‌راه همانقدرکه برای‌تمام راه به‌صورت‌پیاده، لازم است، وقت‌صرف‌کرده است. به‌این ترتیب، به‌اندازهٔ زمانی‌که درقطار بوده است، دیرتر به مقصد می‌رسد. چون سرعت قطار ۱۵ برابرسرعت پیاده‌است و نصف راه را با قطار پیموده است، بنابراین به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۳۰}$ زمان پیاده‌روی، تأخیر خواهد داشت.

۷۴. ساعت دیواری در ۳/۵ ساعت، ۱۴ دقیقه عقب می‌ماند. به‌این ترتیب درساعت ۱۲، ساعت دیواری وقت ۱۱ و ۴۶ دقیقه‌را نشان می‌دهد، یعنی ۱۴ دقیقه مانده به ۱۲. ولی دراین ۱۴ دقیقه هم، باز یك‌دقیقه عقب می‌ماند. به این ترتیب ، ساعت دیواری در ۱۲ و ۱۵ دقیقه، ساعت ۱۲ را نشان می‌دهد .

۷۵. نشانه‌گذار متوجه شد که

$$\frac{۷}{۱۲}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}$$

یعنی اگر از ۷ صفحهٔ مفروض ، ۴ صفحه را هرکدام بـه سه قسمت مساوی تقسیم‌کنیم، ۱۲ قطعه بدست می‌آید کـه هرکدام ازآنهـا مساوی $\frac{۱}{۳}$ صفحهٔ اصلی است. حالا اگر ۳ صفحهٔ باقیمانـده را، هریك بـه چهار قسمت مساوی تقسیم‌کنیم، بازهم ۱۲ قطعه بدست‌می‌آیدکه هرکدام ازآنها مساوی $\frac{۱}{۴}$ صفحهٔ اصلی است. و به‌سادگی می‌توانیم ۱۲ صفحه راکه هرکـدام تنها از ۲ قطعه درست شده است، بسازیم.

نشانه‌گذار، برای ساختن ۶ صفحه، از۵ صفحهٔمفروض، ازاین‌تساوی استفاده می‌کند :

$$\frac{۵}{۶}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}$$

یعنی ۳ صفحه را نصف و ۲ صفحهٔ دیگر را ثلث می‌کند.

بالاخره داریم:

$$\frac{۱۳}{۱۲}=\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۴}$$

یعنی باید ۴ صفحه را به سه‌قسمت مساوی و ۹ صفحهٔ دیگر را بـه ۴ قسمت مساوی تقسیم‌کنیم.

به همین ترتیب : $\frac{۱۳}{۳۶}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۹}$

یعنی ۹ صفحه را بـه‌چهار قسمت و ۴ صفحه را بـه نـه‌قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم.

از تساوی $\frac{۴}{۷}+\frac{۲}{۳}=\frac{۲۶}{۲۱}$ معلوم‌می‌شودکه دراین موردباید ۱۴ صفحه را بـه سه قسمت وهـریك از ۱۲ صفحهٔ بقیه را بـه ۷ قسمت مساوی تقسیم کنیم .

با آشنایی به این روش، حالا خودتان چند مسألهٔ مشابـه طرح وحل کنید .

۷۶. $\frac{۱}{۴}$ یك قطعه صابون، $\frac{۳}{۴}$ کیلوگرم وزن دارد، بنابراین تمام آن ۳ کیلوگرم وزن خواهد داشت.

۱۰۷۷. $\frac{۳}{۳}$ ، $\frac{۲}{۲}$ ، $\frac{۱}{۱}$ ، $\frac{۹}{۹}$ و غیـره ، همچنین ۱×۱ یـا ۰—۱ ، ۱—۲ ،...، یا $۱^{۰}$ ، $۲^{۰}$ ،...، یا ۰۱ .

۲۰۷۷. $\frac{۳۳۳}{۳\times۳}=۳۷$.

۳۰۷۷. مثلاً $\frac{۹۹}{۹۹}+۹۹$ یا ۵—۵—۵۵+۵۵ ، و یا درحالت کلی :

$$\frac{(۱۰۰a+۱۰a+a)-(۱۰a+a)}{a}$$

که در آن ، a عبارتست از رقمی دلخواه. مثلاً برای a=۶ :

$$\frac{۶۶۶-۶۶}{۶}=۱۰۰$$

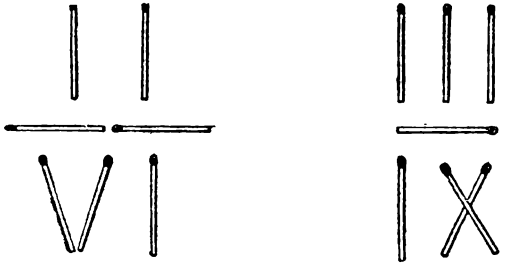
و یا برای a=۹

$$\frac{۹۹۹-۹۹}{۹}=۱۰۰$$

۴۰۷۷. $\frac{۴۴}{۴}+۴۴$.

۵۰۷۷. $\frac{۹۹}{۹}+۹$.

۶.۷۷. شکل را ببینید. یك جواب دیگر را هم خودتان پیدا کنید.



مربوط به مسألهٔ ۷۷-۶

۷.۷۷. $۱+۳+۵+۷+\frac{۷۵}{۷۵}+\frac{۳۳}{۱۱}$.

۸.۷۷. $۷۹\frac{۱}{۳}+۵=۸۴+\frac{۲}{۶}$ ؛ $۷۵\frac{۱}{۳}+۹=۸۴+\frac{۲}{۶}$.

۹.۷۷. ۱ و $\frac{۱}{۲}$ ، یا $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ ، یابه‌طورکلی $\frac{۱}{n}$ و $\frac{۱}{n-۱}$ ، که درآنها n عدد صحیحی است‌بزرگتر از واحد ، یا x و $\frac{x}{x+۱}$ ، که در آن x عدد صحیح دلخواهی است به استثنای $x=-۱$.

۱۰.۷۷ ۱ $=(۴-۳)(۶-۷)(۸-۹)+\frac{۱}{۲}+\frac{۱۴۸}{۲۹۶}+\frac{۳۵}{۷۰}$ ، ۰/۵
جوابهای دیگری هم می‌توان پیدا کرد.

۱۱.۷۷. $۱۰۰=۲۱\frac{۴۵}{۹۰}+۷۸\frac{۳}{۶}$ ، یا $۱۰۰=۴۹\frac{۳۸}{۷۶}+۵۰\frac{۱}{۲}$.
می‌توانید جوابهای دیگری هم پیدا کنید.

۷۸. یکی از جوابهای ممکن :

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۶}{۱}+\frac{۳}{۴}+\frac{۵}{۳}+\frac{۵}{۴}=۱۰,$$

$$\frac{۲}{۱}+\frac{۵}{۱}+\frac{۲}{۶}+\frac{۶}{۳}+\frac{۴}{۶}=۱۰,$$

$$\frac{۴}{۱}+\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{۲}+\frac{۵}{۲}+\frac{۵}{۶}=۱۰$$

۷۹. از صورت مسأله معلوم است که $\frac{۱}{۴}$ تعداد بچه‌گربه‌ها مساوی $\frac{۳}{۴}$ شده است، بنابراین تعداد بچه‌گربه‌هامساوی $\frac{۱}{۴} : \frac{۳}{۴}$، یعنی ۳ عدد است

آزمایش : $\frac{۳}{۴}$ بچه‌گربه‌ها مساوی $\frac{۹}{۴}$ یعنی $۲\frac{۱}{۴}$ می‌شود که اگر به‌آن $\frac{۳}{۴}$ را اضافه کنیم، همان عدد ۳ بدست می‌آید.

۸۰. اگر بدون فکر جواب بدهید، ممکن است به جواب نادرست ۸ کیلومتر درساعت برسید ($۸ = \frac{۴+۱۲}{۲}$). اگر تمام راه را مساوی ۱ بگیریم، نصف راه را در ۱۲ : $\frac{۱}{۲}$، یعنی $\frac{۱}{۲۴}$ واحد زمان طی می‌کند ونیم دیگر راه را در ۴ : $\frac{۱}{۲}$، یعنی $\frac{۱}{۸}$ واحد زمان. بنابراین‌برای تمام راه به اندازهٔ $\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۲۴}$، یعنی $\frac{۱}{۶}$ واحد زمان، وقت صرف می‌کند. بنابراین سرعت متوسط اسب مساوی $\frac{۱}{۶} : ۱$، یعنی ۶ کیلومتر درساعت می‌شود.

۸۱. مسافر، در طول $\frac{۲}{۳}$ از نصف تمام راه، یعنی رویهم $\frac{۱}{۳}$ تمام راه را خوابیده است.

۸۲. سرعت جابه‌جایی مسافرهایی‌که درقطاردوم نشسته‌اند، نسبت به قطار متحرك اول، برابر است با ۳۶+۴۵، یعنی ۸۱ کیلومتر درساعت یا $\frac{۴۵}{۲}$ متر در ثانیه.

بنابراین طول قطار اول مساوی $۶ \times \frac{۴۵}{۲}$، یا ۱۳۵ متر است.

۸۳. دوچرخه سوار $\frac{۱}{۳}$ راه، یعنی نصف راهی راکه با دوچرخه رفته است، پیاده طی‌کرده است. ولی دوبرابرآن وقت صرف‌کرده است. بنابراین سرعت با دوچرخه، چهاربرابر سرعت پیاده بوده است.

۸۴. A، دوسوم کار را انجام‌داده‌است و $\frac{۱}{۳}$ تمام‌کار برایش باقی‌مانده است. B، $\frac{۱}{۶}$ کار را تمام کرده و $\frac{۵}{۶}$ آن برایش مانده است.

بنابراین، B باید بقیهٔ کار را با سرعتی برابر $\frac{۱}{۳} : \frac{۵}{۶}$ یعنی $۲\frac{۱}{۲}$ برابر سرعت A انجام دهد، تا با او در یك زمان کار را تمام کند.

۸۵. حق با دوست مژده است. وقتی‌که به یکی از عاملهای ضرب، $\frac{۱}{۳}$ آنرا اضافه‌کنیم، حاصلضرب $\frac{۴}{۳}$ برابر می‌شود، و وقتی‌که از یکی از عاملها، $\frac{۱}{۳}$ آنرا کم کنیم، حاصلضرب $\frac{۲}{۳}$ برابر می‌شود. بنابراین وقتی‌که به یکی ازعاملها، $\frac{۱}{۳}$ آنرا اضافه، و ازعامل دیگر $\frac{۱}{۳}$ آنرا کم‌کنیم، حاصلضرب $\frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۳}$ یعنی $\frac{۸}{۹}$ برابر می‌شود. اشتباه، برابر $\frac{۱}{۹}$ جواب است که مساوی ۲۰ مترمکعب شده‌است، درنتیجه جواب مساوی ۱۸۰ مترمکعب می‌شود.

۸۶. ابتدا دوقطعه نان را روی تاوه قرار می‌دهد، برای برشته کردن یکطرف آنها، ۳۰ ثانیه وقت لازم است. سپس یکی از قطعه‌نانها را درتاوه برمی‌گرداند، قطعه دوم را بیرون از تاوه می‌گذارد وبه‌جای آن قطعهٔسوم نان را قرار می‌دهد، بعدازآنکه ۳۰ ثانیه دیگر بگذرد، هردوطرف نان اول و یکی از دوطرف نانهای دوم و سوم برشته می‌شود. بار سوم، قطعه‌نانهای دوم وسوم را روی‌تاوه می‌گذارد، تا طرف دوم‌آنها هم برشته‌شود؛ برای این‌کار هم ۳۰ ثانیه وقت لازم است، یعنی روی‌هم ۹۰ ثانیه یا $۱\frac{۱}{۲}$ دقیقه.

بخش دوم

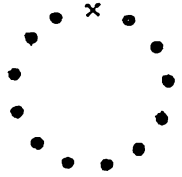
۸۷. «اسیرها»، ابتداگندم‌کوب‌را (۵ کیلوگرم) در زنبیل‌می‌گذارند و

آن‌را به‌پایین می‌فرستند. در زنبیل خالی‌که دربالا قراردارد ، ۲ گندم‌کوب می‌گذارند (۱۰ کیلوگرم). این‌بار را به‌طرف زمین می‌فرستند واین امکان‌را پیدا می‌کنندکه به‌کمك‌آن، بار ۱۵ کیلوگرمی را به‌پایین بفرستند (بااضافه کردن دوگندم‌کوب به‌زنبیل اول‌که بالاآمده است). زنبیل ۱۵ کیلوگرمی پائین می‌رود و زنبیل ۱۰ کیلوگرمی بالا می‌آید. دوباره، دوگندم‌کوب به آن اضافه می‌کنند و زنبیل ۲۰ کیلوگرمی به‌طرف زمین فرستاده می‌شود. این‌کار را ادامه می‌دهند تا زنبیلی با ۷ گندم‌کوب (۳۵ کیلوگرم) به‌پایین برود.روشن است‌که دراین موقع، زنبیلی‌که ۶ گندم‌کوب دارد، بالا می‌آید. آهنگر این‌گندم‌کوبها را از زنبیل خارج می‌کند و ندیمه را درآن‌می‌نشاند (که ۴۰ کیلو وزن دارد). دختر به زمین می‌رسد و زنبیلی‌که ۷ گندم‌کوب دارد،بالا می‌آید.آهنگر، ۶ تا ازگندم‌کوبها را برمی‌دارد و به دخترعلامت می‌دهدکه از زنبیل خارج شود. زنبیل حاوی یك‌گندم (۵ کیلوگرم) را به پایین می‌فرستد و زنبیل خالی، بالا می‌آید، دختر ندیمه در زمین داخل زنبیل می‌شود (رویهم ۴۵ کیلوگرم) ، و در بالا ، دریجان (۵۰ کیلوگرم). دریجان پایین می‌رود و ندیمه بالا می‌آید. ندیمه دربرج و دریجان در زمین از زنبیل خارج می‌شوند. زنبیلی‌که حاوی یك‌گندم‌کوب است به پایین و زنبیل خالی به بالا حرکت می‌کند.

آهنگرکار اول را دوباره تکرار می‌کند تا بالاخره، ندیمه را برای‌بار دوم به زمین می‌فرستد. دریجان در این موقع وارد زنبیل می‌شود (رویهم ۹۰ کیلوگرم) و دربرج آهنگر بایك‌گندم‌کوب (رویهم ۹۵ کیلوگرم) در زنبیل‌قرار می‌گیرد،آهنگربه‌طرف زمین و دریجان و ندیمه به‌طرف‌بالاحرکت می‌کنند. دریجان وندیمه دربرج وآهنگر درپایین، از زنبیلهاخارج می‌شوند.

بالاخره، باهمان روش ابتدا ندیمه‌پایین می‌آید، سپس ندیمه بالا می‌رود و دریجان پایین می‌آید و بالاخره دوباره ندیمه با بالاآمدن ۷ گندم کوب پایین می‌آید. آهنگر، زنبیل خالی را به زمین محکم می‌بندد ، تا با افتادن‌زنبیل بالا به‌زمین، سروصدا ایجاد نشود. آنوقت هرسه نفر به‌سلامت خود را به‌کوه‌ها می‌رسانند تا از خشم شاهزاده بی‌رحم درامان باشند .

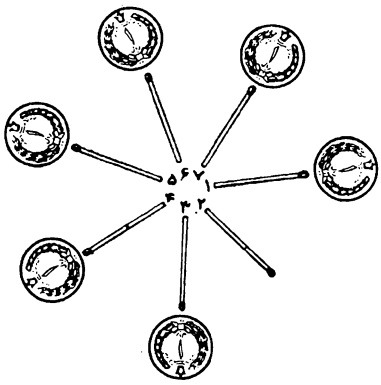
۸۸. مثلاً جهت حرکت‌را، جهت‌حرکت عقربه‌های ساعت می‌گیریم، دراینصورت نازی باید شمارش را ازششمین موش بعد از موش سفید (بدون محاسبهٔ خود موش سفید) شروع‌کند. ازمـوش ششم شمارش را شروع‌کند وهربار سیزدهمین‌موش‌را بخورد. برای اینکه‌از قبل بدانیم‌که ازکدام موش باید شمارش راآغاز کند، ۱۲ نقطه ویك‌صلیب روی‌یك دایره‌بگذارید (شکل را ببینید). شمارش‌را ازصلیب شروع‌کنید وهربار نقطهٔ سیزدهم را (صلیب را هم به‌حساب می‌آوریم) ، حذف‌کنید. آخرین نقطه‌ای‌که باقی ماند، بایدجای‌موش‌سفیدباشد وبه‌سادگی‌می‌توان‌فاصلهٔ‌آنرا تاصلیب‌معین‌کرد.



مربوط به مسألهٔ ۸۸

۸۹. اگر ۲۰ قفس پرنده را به ردیف بگذاریم و ازچپ به‌راست، بنا برشرط مسألـه، مرتباً پرنـدهٔ قفس پنجم را آزادکنیم، دوقفسی‌کـه آخـرکار بـاز نشده باقی می‌ماند ، قفسهای هفتم و چهاردهم (ازچپ بـه راست) هستند. آزمایش عمل‌خیلی ساده است.

۹۰. رمزکار در اینست‌که هر باربایدسکه راکنار چوب‌کبریتی قرار داد،که دفعـهٔ قبل، شمارش را ازآن شروع‌کرده‌بودیم. فرض‌کنید،شمارش را از چوب‌کبریت پنجم شروع کرده باشید (شکل‌رابینید). نخستین‌سکه، کنارچوب‌کبریت هفتم قرارمی‌گیرد؛ حالا باید سکـه راکنار چـوب‌کبریت پنجم قـرارداد، بـرای ایـن منظور، شمارش‌را ازچوپ‌کبریت سوم شروع



مربوط به مسألهٔ ۹۰

می‌کنیم. برای بـارسوم ، شمارش را از چوب‌کبریت اول شروع می‌کنیم تا سکه درکنار چوب‌کبریت سوم قـرارگیرد و غیره.

۹۱. ابتدا قطار کارگران ازعقب وارد خط فرعی بن‌بست می‌شود و سه‌واگن خود را درآن‌جا می‌دهد، بعد لکوموتیو همراه با دو واگن دیگر مسافتی به‌جلو می‌رود. قطارمسافری جلو می‌آید تا انتهای‌آخرین‌واگن آن کنار خط فرعی قرارگیرد، دراینجاسه‌واگنی‌که داخل خط فرعی است‌به‌دنبال آن بسته می‌شود و جلو می‌رود تا این سه‌واگن از خط فرعی خارج شود، سپس قطار مسافری همراه با این سه واگن عقب عقب می‌رود و راه‌را برای لکوموتیو و دو واگن کارگری باز می‌کند که بتواند داخل خط فرعی شود. به‌این ترتیب راه برای عبور قطار مسافری باز می‌شود.

به پرسش اضافی خودتان پاسخ بدهید.

۹۲. پدرها را A ، B و C ، و دخترها را a،b و c می‌نامیم.طرح حل مسأله چنین است:

ساحل دوم	ساحل اول
. . .	A B C
. . .	a b c

I. ابتدا، دو دختر به ساحل دوم می‌روند:

. . .	A B C
. b c	a . .

II. یکی از دخترها برمی‌گردد و دختر سوم را با خود می‌برد:

. . .	A B C
a b c	. . .

III. یکی از دخترها به‌ساحل اول، پهلوی پدرش برمی‌گردد و دو پدر دیگر نزد دخترهایشان به ساحل دوم می‌روند:

. B C	A . .
. b c	a . .

IV. یکی از پدرها همراه با دخترش به ساحل اول برمی‌گردد، دخترش را در ساحل اول می‌گذارد وبا پدردیگر، به‌ساحل‌دوم برمی‌گردد.

. . .	A B C
a b .	. . c

V. دختری‌که در ساحل دوم است، به ساحل اول می‌آید و بادختر دوم برمی‌گردد:

. . .	A B C
a . .	. b c

VI. و بالاخره یکی از دخترها به‌ساحل اول می‌آید وآخرین دختر را با خودش می‌برد:

. . .	A B C
. . .	a b c

و عبور از رودخانه، با شرطهای مسأله به انجام می‌رسد.

۹۳. جابه‌جاکردن چهار زوج با قایقی‌که سه‌نفر جا دارد. پدرها را A، B، C و D و دخترهای نظیرآنها را a، b، c و d می‌گیریم:

ساحل اول	در قایق	ساحل دوم
A B C D		. . . .
a b c d		. . . .

I. سه دختر حرکت می‌کنند:

A B C D		. . . .
	⟶ b c d ⟶	
a . . .		. b c d

دو تا ازآنها برمی‌گردند:

A B C D . . . .

← b c ←

a b c . . . . d

II. یکی از پدرها با دخترش و ضمناً پدری‌که دخترش درساحل‌دیگر است، حرکت می‌کنند:

$$\begin{matrix} A\,B\,.\,. \\ a\,b\,.\,. \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} C\,D \longrightarrow & .\,.\,C\,D \\ c & .\,.\,c\,d \end{cases}$$

یك پدر با دخترش برمی‌گردد:

$$\begin{matrix} A\,B\,C. \\ a\,b\,c. \end{matrix} \longleftarrow \begin{cases} C \\ c \end{cases} \longleftarrow \begin{matrix} .\,.\,.D \\ .\,.\,.\,d \end{matrix}$$

III. سه پدر حرکت می‌کنند:

. . . . ⟶ A B C ⟶ A B C D

a b c . . . . d

یك دختر برمی‌گردد:

A B C D

. . . .

a b c d ←d← . . . .

IV. سه تا از دخترها حرکت می‌کنند:

. . . . A B C D

a . . . ⟶ b c d ⟶ . b c d

پدری‌که دخترش درساحل اول است برمی‌گردد:

A . . . ← A ← . B C D

a . . . . b c d

V. پدر و دختر باهم حرکت می‌کنند:

$$\begin{matrix} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} A \longrightarrow & A\ B\ C\ D \\ a & a\ b\ c\ d \end{cases}$$

(درحالت برگشت چهارم، می‌شد دو دختر برگردند و همراه با دختر سوم به‌طرف ساحل دوم بروند).

حالا به‌حالتی که قایق دونفری است و جزیره‌ای در وسط رودخانه وجود دارد، می‌پردازیم.

	ساحل اول	جزیره	ساحل دوم
	A B C D	. . . .	. . . .
	a b c d	. . . .	. . . .
I)	A B C D	. . . .	. . . .
	a b . .	. . . .	. . c d
II)	A B C D	. . . .	. . . .
	a . . .	. . . .	. b c d
III)	A B . .	. . . .	. . C D
	a b . .	. . : .	. . c d
IV)	A B C .	. . . .	. . . D
	a b . .	. . c .	. . . d
V)	A B C .	. . . .	. . . D
	. . . .	a b c .	. . . d
VI)	A . . .	. . . .	. B C D
	a . . .	. b c .	. . . d

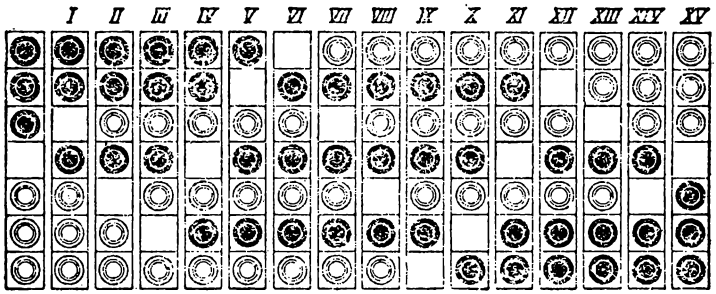
کتابخانه مجازی ریاضیات

VII)	A . . .	. . . .	. B C D
	a . . .	. b . .	. . c d
VIII)	. . . .	. . . .	A B C D
	a . . .	. b . .	. . c d
IX)	. . . .	. . . .	A B C D
	a . . .	. . . .	. b c d
X)	. . . .	. . . .	A B C D
	. . . .	. . . .	a b c d

۹۴. فرض کنید، مهره‌های سیاه تنها به‌طرف پایین ومهره‌های سفید تنها به‌طرف بالا حرکت‌کنند (زیرا طبق‌شرط باید به‌طرف یکدیگر حرکت کنند) . بـه این ترتیب (از راست بـه چپ بخوانید) ، بایـد مهره‌ها را جا به‌جا کرد:

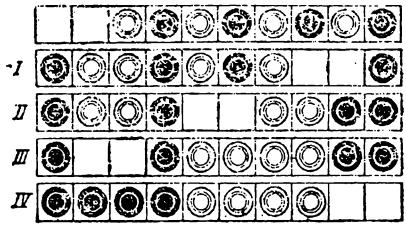
سیاه ـ سفید ـ سفید ـ سیاه ـ سیاه ـ سیاه ـ سفید ـ سفید ـ سفید ـ سفید ـ
سیاه ـ سیاه ـ سیاه ـ سفید ـ سفید ـ سیاه .

برای‌اینکه مطلب‌را بهتر بفهمید، طرح‌جابه‌جایی مهره‌ها را در۱۵ حرکت، به‌وسیلهٔ شکل نشان داده‌ایم.



مربوط به مسألهٔ ۹۴

۹۵. حل مسأله روی شکل داده شده است.

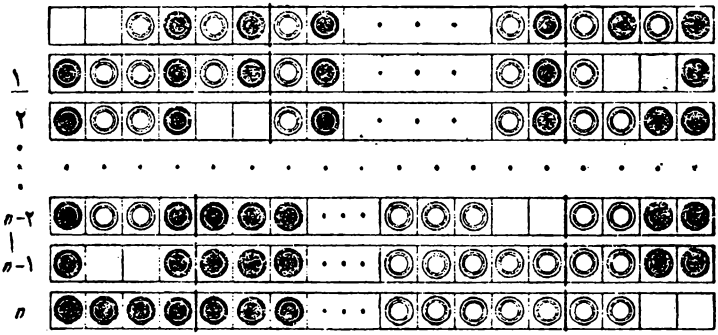


مربوط به مسألهٔ ۹۵

بعد از چهار حرکت، مهره‌های سیاه‌کنار هم، و مهره‌های سفید هم کنارهم قرارمی‌گیرند. می‌توان از وضع اخیر شروع کرد و باهمان شرطها، به‌حالت اصلی رسید. با توجه به‌همین شکل، روش عمل عکس هم روشن می‌شود.

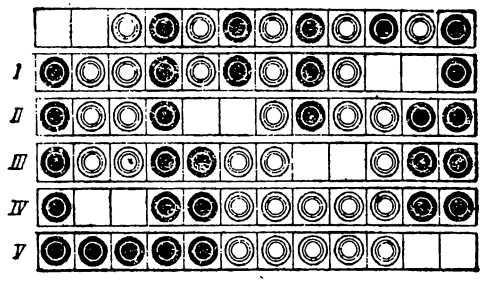
۹۶. راه حلها، به ردیف از بالا به‌پایین، برای حالتهای پنج، شش و هفت زوج مهره ، در شکل صفحهٔ **۵۵۲** داده شده است.

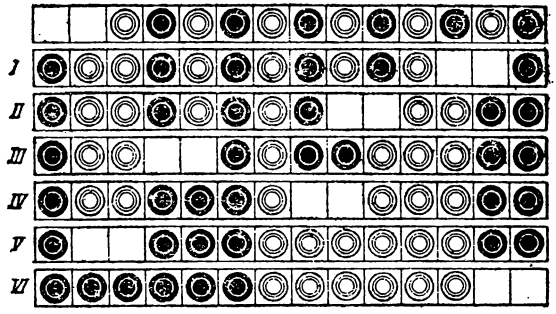
۹۷. از n زوج مهرهٔ مفروض، دو زوج درسمت چپ و دو زوج در سمت راست جدا می‌کنیم (روی شکل این‌تقسیم را با خطهای سیاه پررنگ انجام داده‌ایم). روی چهار زوج دوطرف، دوحرکت‌انجام می‌دهیم، به‌نحوی

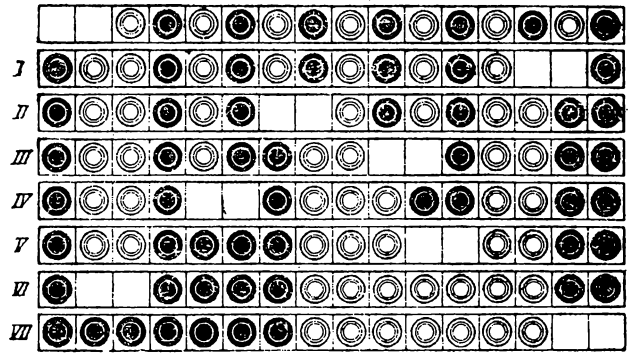


مربوط به مسألهٔ ۹۷

که خانه‌های خالی درکنار مهره‌های داخلی قرارگیرد (روی شکل بعد از حرکتهای ۱ و ۲). اگر همین چهار زوج دو طرف بود، دوحرکت دیگر







مربوط به مسألهٔ ۹۶

برای حل مسأله کافی بود، ولی این دوحرکت را برای بعد می‌گذاریم و با استفاده از دوخانهٔ آزاد، که در سمت چپ مهره‌های وسط قرار دارد،

مهره‌های وسط را به‌ترتیبی‌که می‌خواهیم ردیف می‌کنیم. بنابر فرض، این امکان وجود دارد، زیرا فرض براین بود که برای (۴ — n) زوج مهره، مسأله با (۴ — n) حرکت حل می‌شود. به این ترتیب، بعد از حالت ۲، با (۴ — n) حرکت، مهره‌های وسط به‌حالت (۲ — n) تبدیل می‌شود که مهره‌های‌سیاه درسمت چپ، ومهره‌های سفیددرسمت راست‌آن قرارگرفته‌اند. حالا دوباره به ۴ زوج دوطرف برمی‌گردیم و با دوحرکت، جواب‌کامل‌را بدست می‌آوریم.

به این ترتیب، برای حل تمام مسأله، یعنی برای n زوج مهره، n حرکت لازم می‌شود.

این روش اثبات، ضمناً طرح ردیف حرکتهای متوالی را هم معلوم می‌کند. برای هرتعداد زوج مهره، مسأله به‌حل چهار زوج کمتر منجر می‌شود تا زمانیکه تعداد زوجها به حداقلی‌که راه حل آنرا می‌دانیم، برسد.

۹۸. این راه‌حل ساده‌ای است‌که برای هرکدام ازحالتها، قابل عمل است. ابتدا کارتها را به‌ترتیب شماره (ازبالا به پایین) منظم می‌کنیم، سپس طبق همان قاعدهٔ صورت مسأله، آنها را روی میز قرار می‌دهیم. کارتها به این ترتیب قرار می‌گیرند (شماره‌های از چپ به راست، به‌ترتیب ازپایین به‌بالا در روی میز خواهد بود):

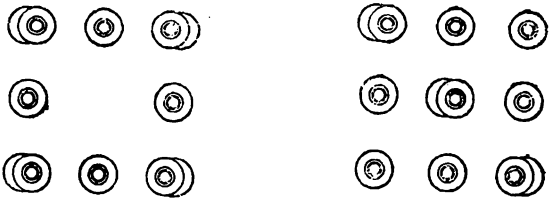
۱،۳،۵،۷،۹،۲،۶،۱۰،۸،۴

کارت شمارهٔ ۴ روی همه قرار گرفته است، بنابراین اگر بخواهیم کارت شمارهٔ ۱۰ روی همه قرارگیرد، باید آنرا در ابتدا در ردیف چهارم قراردهیم. همچنین، ازآنجا که‌کارت شمارهٔ۸ درجای دومین‌کارت ازبالا قرار گرفته است وما می‌خواهیم‌کارت شماره ۹ دراینجا قرارگیرد، باید کارت شمارهٔ ۹ را در دستمان در ردیف هشتم (از بالا به‌پایین) قراردهیم، به‌همین ترتیب تا آخر. به‌این ترتیب، ردیف‌کارتها در دست ما، از بالا به پایین، باید به این صورت باشد

۱،۶،۲،۱۰،۳،۷،۴،۹،۵،۸

و روشن است‌که از این روش، برای حالتهای دیگر مسأله هم می‌توان استفاده کرد.

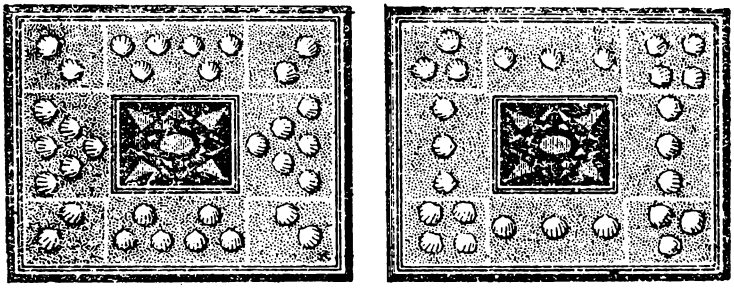
۹۹. معمای اول. باید درهر رأس مربع (شکل سمت‌چپ) دو مهره (یك مهره روی مهرهٔ دیگر)، یا در دو رأس مقابل، سه مهره قرار دهیم.



مربوط به مسألهٔ ۹۹

معمای دوم. ۹ مهره را در سه ردیف قرار دهید (شکل سمت راست)، سه ردیف بدست می‌آید که درهریك ازآنها، سه مهره وجود دارد. سه مهره باقی می‌ماند، آنها را به‌ترتیب روی سه مهرهٔ یکی از قطرها می‌گذاریم، آنطورکه درشکل دیده می‌شود. به‌این ترتیب در هر ردیف و هرستون،چهار مهره خواهد بود.

۱۰۰. راه حلها درشکل نشان داده شده است.



مربوط به مسألهٔ ۱۰۰

۱۰۱. بعد از حملهٔ اول، ۳۶ نفر برای «پادگان» قلعه باقی می‌ماند. ببینیم در وسط هرضلع چند نفر باید قرارگیرد. چون درهرکدام از ردیفهای اول و سوم، باید۱۱ نفر وروی‌هم ۲۲ نفرباشند، برای‌ردیف دوم۲۲-۳۶ ،

یعنی۱۴ نفرمی‌ماند (شکل‌را ببینید) بنابراین در وسط هرکدام از ضلعها، ۷ نفر مدافع باید قرار گیرد.

تعدادکل نفرات، در وسط ضلعها، ۲۸ نفر می‌شود. بنابراین باید ۸ نفر باقیمانده را بین گوشه‌ها تقسیم‌کردکه به‌هر رأس ۲ نفر می‌رسد.

به همین ترتیب، می‌توان وضع آرایش نیروها را بعد از حمله‌های دوم، سوم، چهارم و پنجم پیدا کرد (شکلها را ببینید).

۲	۷	۲
۷	۳۶	۷
۲	۷	۲

مربوط به‌مسألهٔ ۱۰۰.
بعد از حملهٔ اول

۳	۵	۳
۵	۳۲	۵
۳	۵	۳

بعد از حملهٔ دوم

۴	۳	۴
۳	۲۸	۳
۴	۳	۴

بعد از حملهٔ سوم

۵	۱	۵
۱	۲۴	۱
۵	۱	۵

بعد از حملهٔ چهارم

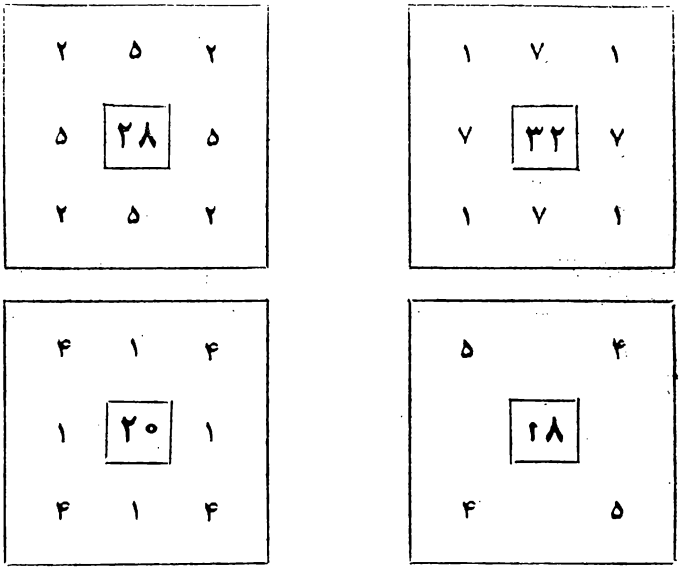
۶	—	۵
—	۲۲	—
۵	—	۶

بعد از حملهٔ پنجم

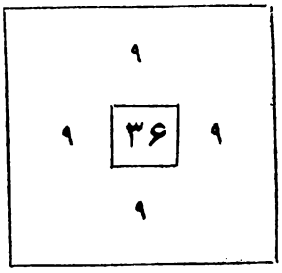
ولی اگر مبارزه ادامه پیدا کند و باز هم از نفرات مدافع، از صحنه

جنگ خارج شوند، دیگر نمی‌توان نیروها را طوری آرایش داد، که ازهر ضلع قلعه، ۱۱ نفر دفاع کند.

۱۰۲. با استدلالی شبیه مسألهٔ قبل، می‌توان طرحهای زیر را برای حالتهای مختلف قرار دادن لامپها درست‌کرد (در مربع وسط، تعداد کل لامپها نوشته شده است):



وقتی که ۱۸ لامپ داشته باشیم، همهٔ آنها باید درگوشه‌های اطاق نصب شود. ولی وقتی که ۳۶ لامپ داشته باشیم، باید همهٔ آنها را در چهار دیوار اطاق نصب کرد:



بنابراین، اگر بخواهیم درطول هردیوار ۹ لامپ نصب کرده باشیم، می‌توانیم حداقل از ۱۸ لامپ و حداکثر از ۳۶ لامپ استفاده کنیم.

برای پاسخ به‌پرسش‌آخر، هم می‌توان به‌طور ساده آزمایش کرد وهم می‌توان از جبر کمك گرفت (کسانی‌که نمی‌خواهند بـه بررسی کامل اینگونه مسأله‌هابپردازند وبا توجه به‌آن خارج از قدرت آنهاست، می‌توانند ازاین قسمت صرفنظر کنند و به مسألهٔ بعد بپردازند).

اگر تعداد لامپهای هرگوشه را a و تعداد لامپهای روی هردیوار را b فرض کنیم، روشن است که تعداد کل لامپها $n=۴(a+b)$ می‌شود. این عدد را می‌توان اینطور نوشت:

$$n=۲(a+b+a)+۲b$$

دراینجا $s=a+b+a$، عبارتست‌از تعداد لامپها درطول هردیوار. وقتی‌کد عدد s بدون‌تغییرباقی بماند، تعدادکل لامپها، یعنیn، باکم شدنb کم و با زیاد شدن b ، زیاد می‌شود. اگر به b ، دو واحد اضافه شود، به تعداد لامپها، ۴ واحد اضافه می‌شود. متخصص برق هم به‌همین ترتیب‌عمل می‌کرد: تعداد لامپهارا ۴واحد اضافه می‌کرد، درنتیجه به‌هرb، ۲واحد اضافه می‌شد ، و برای اینکه مجموع $s=a+b+a$ ثابت بماند، از هر a ، یك واحدکم‌می‌کرد. ضمناً همیشه‌نوعی تقارن در وضع‌آرایش لامپها وجود دارد.

ولی کاملاً ممکن است‌که تعداد لامپها را در طول هردیوار ثابت نگه داشت، بدون اینکه تقارن آرایش آنها را حفظ کنیم.

تعـداد لامپها را درگوشه‌ها به‌ترتیب $a_۱$ ، $a_۲$ ، $a_۳$ و $a_۴$ ، و تعداد لامپهایی را که روی دیوارهاهستند به‌ترتیب $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ و $b_۴$ می‌گیریم:

$a_۱$	$b_۱$	$a_۲$
$b_۲$		$b_۳$
$a_۳$	$b_۴$	$a_۴$

تعداد کل لامپها، یعنی n ، را می‌توان به‌این ترتیب نشان داد:

$$n=۴s-(a_۱+a_۲+a_۳+a_۴)$$

که در آن، s عبارتست از تعداد ثابت لامپها در طول هردیوار:

$$s=a_۱+b_۱+a_۲=a_۱+b_۲+a_۳+a_۳+b_۴+a_۴=$$
$$=a_۲+b_۳+a_۴$$

وقتی‌که s ، مقدارثابتی‌باشد، تعدادکل‌لامپهاباکم‌شدن $a_۱+a_۲+a_۳+a_۴$ زیاد می‌شود و با زیاد شدن $a_۴+a_۳+a_۲+a_۱$ ، کم می‌شود. مثلاً به $b_۱$ و $b_۲$ به اندازهٔ x لامپ اضافه می‌کنیم، یعنی رویهم ۲x لامپ . اگر از $a_۱$ به اندازهٔ x لامپ کم کنیم، s تغییر نمی‌کند و به تعداد کل لامپهاهم به اندازهٔ x اضافه می‌شود. به همین ترتیب، اگر x لامپ به $b_۱$ و x لامپ به $b_۲$ اضافه و x لامپ از $a_۲$ کم‌کنیم، بازهم به‌همان نتیجه‌می‌رسیم وغیره.

همچنین، اگر به هرکدام از عددهای $b_۱$ ، $b_۲$ ، $b_۳$ و $b_۴$ به اندازهٔx اضافه ، و هریك ازعددهای $a_۱$ و $a_۴$ ، یا $a_۲$ و $a_۳$ ، به اندازهٔ x کم کنیم، یا به اندازهٔ $\frac{x}{۲}$ از هریك‌ازعددهای $a_۱$ ، $a_۲$ ، $a_۳$ و $a_۴$ کم‌کنیم، درهرحال مقدار s ثابت می‌ماند ، و تعداد کل لامپها به اندازهٔ ۲x اضافه می‌شود. بنابراین، درحالتی‌که به‌تقارن‌آرایش لامپها، توجهی نداشته‌باشیم، می‌توانیم به تعداد کل n ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ یا هرعدد دیگری اضافه کنیم.

اگر در همین مسأله، تعداد لامپها را از ۲۴ به ۲۵ اضافه کنیم، می‌توانیم، مثلاً به این ترتیب، آنها را آرایش دهیم:

۲	۴	۳
۴	۲۵	۳
۳	۳	۳

۱۰۳. از شرط سوم معلوم می‌شود که تعداد کل خرگوشها از ۲۲

کمتر و از ۴۴ بیشتر نیست (با حل مسألهٔ ۱۰۱ مقایسه کنید). بنابر شرط چهارم باید تعداد خرگوشها ، مضربی از۳ باشد. بنابراین تعداد خرگوشها، مساوی یکی از عددهای ۲۴ ، ۲۷ ، ۳۰ ، ۳۳ ، ۳۶ ، ۳۹ یا ۴۲ می‌باشد. به‌سادگی معلوم می‌شودکه با ۲۴ خرگوش (۱۶ و ۸)، نمی‌توان درهرضلع قفس، ۱۱ خرگوش قرار داد، زیرا دراینصورت خانهٔ خالی پیدا می‌شود و با شرط اول نمی‌سازد. اگر تعداد خرگوشها را ۳۳، ۳۶، ۳۹ یا ۴۲ بگیریم، می‌توان درهرضلع قفس ۱۱ خرگوش جاداد؛ ولی دراین حالتها، دربعضی از خانه‌ها بیش از ۳ خرگوش جا می‌گیرد (آزمایش کنید!)، که با شرط دوم نمی‌سازد.

به‌این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که تعداد اولیهٔ خرگوشها ۳۰ بوده است که می‌توانسته‌اند، آنها را به‌صورت زیر درخانه‌های قفس جا دهند (عدد مربع وسط، نمایندهٔ تعداد خرگوشها درهرطبقه است):

۱	۱	۱
۱	۱۰	۲
۱	۲	۱

طرح طبقهٔ اول

۲	۳	۳
۳	۲۰	۲
۳	۲	۲

طرح طبقهٔ دوم

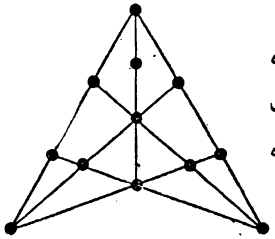
ولی انستیتو، سه‌خرگوش‌کمتر دریافت‌کرد، یعنی ۲۷ خرگوش، که آنها را به‌ترتیب زیر درخانه‌های قفس جا دادند:

۲	۱	۱
۱	۹	۱
۱	۱	۱

طرح طبقهٔ اول

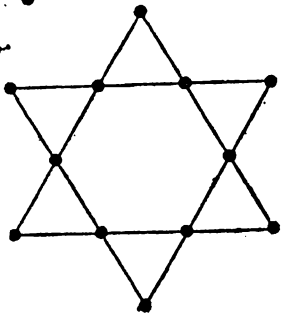
۳	۱	۳
۱	۱۸	۲
۳	۲	۳

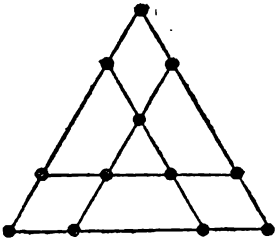
طرح طبقهٔ دوم

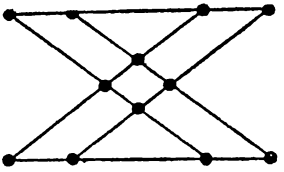


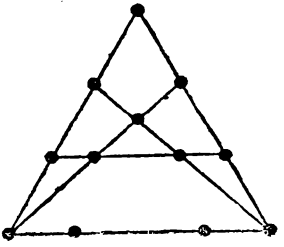
مربوط به مسألهٔ ۱.۱۰۴

۱.۱۰۴. چهارجواب در پایین صفحه داده شده است. طرح قراردادن ۱۲ لامپ در۷ ردیف ۴ لامپی هم درشکل سمت چپ همین صفحه داده شده است.

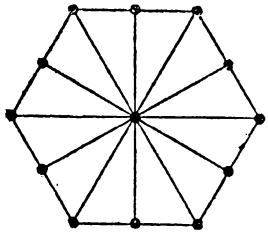








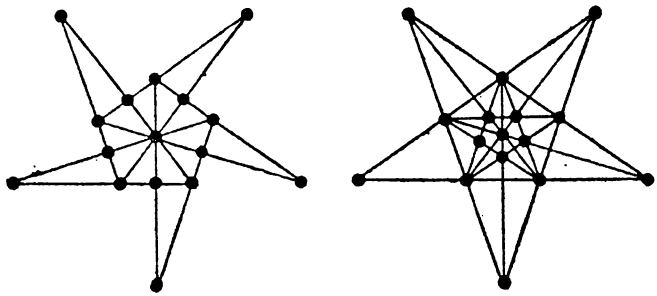
مربوط به مسألهٔ ۱.۱۰۴



مربوط به مسألهٔ ۲.۱۰۴

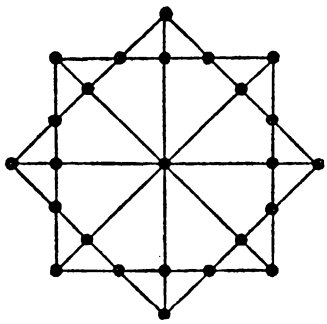
۲.۱۰۴ جواب، در شکل داده شده است.

۳.۱۰۴. شرطهای اصلی مسأله، در طرح تپه‌ای کـه درشکل سمت راست داده شده است، صدق‌می‌کند؛ ولی این‌توصیه‌که باید هردو ردیف درنقطه‌ای‌که شامل یك شیء است، به‌هم برسند، رعایت نشده است. به‌همین مناسبت این طرح از طرف باغبان رد شد. طرح درست، درشکل سمت چپ داده شده است.

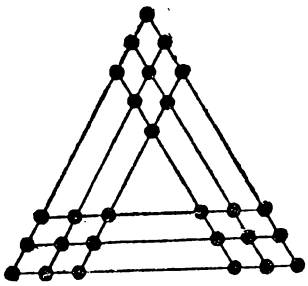


مربوط به مسألهٔ ۳.۱۰۴

۴.۱۰۴ جواب مسأله، در شکل پایین داده شده است.



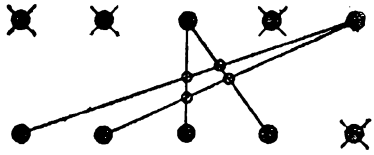
مربوط به مسألهٔ ۴.۱۰۴



مربوط به مسألهٔ ۱۰۵

۱۰۵. جواب مسأله، در شکل بالا نشان داده شده است.

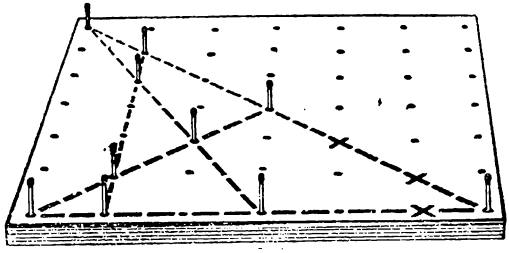
۱۰۶. راهنمایی برای حل بازی اول. هرجواب ممکن مسأله را در بارهٔ تغییرجای چهارمهره (از ده وضع ممکن دو ردیف)، به‌نحوی‌که ۵ردیف چهار مهره‌ای بدست آید، می‌توان بـه سادگی و به سرعت بـه‌کمك ترسیم هندسی، پیداکرد. به‌جای مهره، نقطه‌هایی برصفحهٔ کاغذ بگذارید و سه‌نقطهٔ دلخواه از ردیف بالا و یك نقطه از ردیف پایین را خط بـزنید. یکی از دو نقطه‌ای را که در ردیف بالا باقی مانده است به دو نقطـه از ردیف پایین و



مربوط به مسألهٔ ۱۰۶

سپس نقطهٔ دیگر ردیف بالا را به‌دونقطه دیگر ردیف پایین وصل‌کنید (شکل را ببینید). اگـر ترکیب نقطـه‌ها را طـوری بگیریم‌که بـه خطهای موازی برخورد نکنیم، از برخورد این خطها، چهار نقطه برخورد بدست می‌آید. چهار نقطه خط زده را هم درهمین چهار نقطه برخورد باید قرار داد.

بازی دوم. جواب مسأله، در مـورد استقرار چـوپ کبریتها، درشکل پایین نشان داده شده است.



مربوط به مسألهٔ ۱۰۶

۱۰۷. کمترین تعـداد حرکت، ۲۴ است؛ این حرکتها بـه اینصورت است:

۱) A — ۱ (مهرهٔ ۱ را دردایرهٔ A بگذارید)؛ ۲) B — ۲ (مهرهٔ ۲ را دردایرهٔ B بگذارید)؛ ۳) C — ۳ ؛ ۴) D — ۴ ؛ ۵) D — ۲ ؛ ۶) B — ۵؛ ۷) B — ۳؛ ۸) B — ۱ ؛ ۹) C — ۶؛ ۱۰) A — ۷؛ ۱۱) A — ۱ ؛ ۱۲) E — ۶ ؛ ۱۳) C — ۳ ؛ ۱۴) C — ۱ ؛ ۱۵) A — ۵؛ ۱۶) A — ۱؛ ۱۷) A — ۳؛ ۱۸) A — ۱؛ ۱۹) C — ۶؛ ۲۰) B — ۸؛ ۲۱) B — ۶؛ ۲۲) E — ۲ (یا درC)؛ ۲۳) B — ۴ ۲۴) B — ۲

۱۰۸. حداقل تعداد جابه‌جایی، مساوی ۱۹ است.

راه حلی که شامل کمترین تعداد حرکت است، براساس جابه‌جایی آنها به صورت زنجیری وجود دارد، یعنی مثلاً، اول مهره‌های ۱ و ۷ را باهم عوض می‌کنیم، سپس مهرهٔ ۷ را با مهره‌ای که درخانهٔ هفتم قرارگرفته‌است و در اینجا مهرهٔ شمارهٔ ۲۰. آنوقت مهرهٔ شمارهٔ ۲۰ را با مهره‌ای که جای آنرا اشغال کرده است، یعنی با مهرهٔ ۱۶ و سپس مهرهٔ ۱۶ را با مهرهٔ ۱۱ (که در خانهٔ شانزدهم قرارگرفته است) عوض می‌کنیم و غیره، تا آنجا که هردو مهره، درجای اصلی خودشان باشند.

آنوقت دوباره، عوض‌کردن مهره‌ها را ازجای دیگری شروع می‌کنیم و به‌همان ترتیب ادامه می‌دهیم، تا کار تنظیم مهره‌ها به‌پایان برسد.

همهٔ مبادله‌هایی که در مورد این مسأله لازم است، در ۵ زنجیر زیر نشان داده شده است:

۱) ۱ و ۷ ؛ ۷ و ۲۰ ؛ ۲۰ و ۱۶ ؛ ۱۶ و ۱۱ ؛ ۱۱ و ۲ ؛ ۲ و ۲۴ ؛

۲) ۳ و ۱۰ ؛ ۱۰ و ۲۳ ؛ ۲۳ و ۱۴ ؛ ۱۴ و ۱۸ ؛ ۱۸ و ۵ ؛

۳) ۴ و ۱۹ ؛ ۱۹ و ۹ ؛ ۹ و ۲۲ ؛

۴) ۶ و ۱۲ ؛ ۱۲ و ۱۵ ؛ ۱۵ و ۱۳ ؛ ۱۳ و ۲۵ ؛

۵) ۱۷ و ۲۱

طرح جابه‌جاییهای لازم را می‌توان از قبل مشخص‌کرد، به‌شرطی‌که ابتدا مهره‌ها را به‌همان ردیفی که ابتدا بوده است به ردیف بنویسیم و زیر آنها به‌ترتیب، شماره‌های ردیف را قرار دهیم:

... ،۲۲ ،۸ ،۲۰ ،۱۲ ،۳ ،۱۹ ،۱۰ ،۲۴ ،۷

... ،۹ ،۸ ،۷ ،۶ ،۵ ،۴ ،۳ ،۲ ،۱

نخستین ستون عددها ، یعنی ۷ و ۱ را خط می‌زنیم، این دو عدد، نخستین جابه‌جایی‌را معین‌می‌کنند؛ سپس در ردیف‌پایین عدد ۷ را پیدامی‌کنیم که روی آن عدد ۲۰ نوشته‌شده است، ۲۰ و ۷ را خط می‌زنیم، این دومین مبادله را معین می‌کند؛ در ردیف پایین به دنبال عدد ۲۰ می‌رویم که روی آن، عدد ۱۶ قرار گرفته است، خط زدن روی ۱۶ و ۲۰، سومین مبادله‌را نشان می‌دهد و به‌همین ترتیب تا آخر.

وقتی‌که زنجیر پاره شود، دوباره ازنخستین دوعددی که درسمت چپ خط نخورده است، شروع می‌کنیم.

بدترین حالتها، موقعی است که تنها یك زنجیر تشکیل شودکه در اینصورت به اندازهٔ ۱ — ۲۵، یعنی ۲۴ مبادله لازم است (آخرین مبادله لازم‌نیست و مهره‌ها به‌خودی خود درجای خود هستند).

در مسألهٔ ما ، پنج زنجیرپیدا شد، علاوه برآن مهرهٔ شمارهٔ ۸ درجای خود بود وبه‌همین‌مناسبت به ۱ — ۵ — ۲۵، یعنی۱۹حرکت احتیاج‌داشتیم.

۱۰۹. اگر، مثلاً، یکی از ۹ شکلات جعبهٔ بیرونی را برداشته و در کوچکترین جعبه قرار دهیم، دراین‌جعبهٔ داخلی ۵ شکلات خواهد بود،یعنی ۱+۴ ، در جعبه دوم، چند شکلات است ؟ ۴ شکلات درخود آن، و ۵ شکلات‌هم درجعبهٔ داخل‌آن، یعنی‌رویهم۹ شکلات، یعنی۴ زوج به‌اضافهٔ۱.

اگر به‌همین ترتیب؛ استدلال را ادامه دهیم، معلوم می‌شود که در جعبه سوم ۱۳ شکلات، یعنی ۱+۱۲ و در جعبه آخر ۲۱، یعنی ۱+۲۰ شکلات وجود دارد و در هرحال ، تعداد شکلاتهای داخل هرجعبه طوری است که در تقسیم بر ۴، به باقیماندهٔ ۱ می‌رسد.

اگرفکر کنید، بازهم می‌توانید، جوابهای دیگری برای این‌مسأله پیدا کنید.

۱۱۰. همهٔ پیاده‌هارا باید در ۱۶ حرکت ازصحنه خارج کرد. نخستین

ضربه‌را می‌توان به‌هرکدام ازپیاده‌ها، به‌جزc۴ ، d۳ ، d۴ ، e۵ ، e۶ و f۵ ، وارد آورد. مثلاً می‌توان اسب را جایی قرار داد که اول c۲ را بزنه، بعد b۴ و سپس به ترتیب d۳ ، b۲ ، c۴ ، d۲ ، b۳ ، d۴ ، e۶ ، g۷ ، f۵ ، e۷ ، g۶ ، e۵ ، f۷ ، g۵.

۱۱۱. معمای اول. رقم اول (از سمت‌چپ) را نشانهٔ شمارهٔ مهره، و رقم دوم را نشانه شمارهٔ خانه‌ای‌که این مهره باید درآن جا بگیرد،فرض می‌کنیم. دراینصورت می‌توان به‌ترتیب زیر، مهره‌ها را جابجا کرد:

۲—۱؛ ۳—۲؛ ۴—۳؛ ۴—A ؛ ۵—۴؛ ۵—۳؛ ۶—۵؛ ۶—۴؛

۷—۶؛ ۷—۵؛ ۷—B ؛ ۸—۷؛ ۸—۶؛ ۸—۵؛ ۹—۸؛ ۹—۷؛

۹—۶؛ ۱—۹؛ ۱—۸؛ ۱—۷؛ ۱—C ؛ ۹—۷؛ ۹—۸؛ ۹—۹؛

۹—۱۰؛ ۸—۶؛ ۸—۷؛ ۸—۸؛ ۸—۹؛ ۷—۵؛ ۷—۶؛ ۷—۷؛

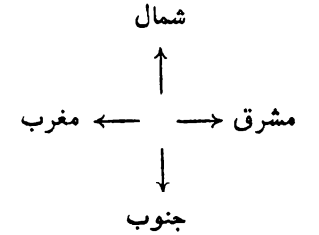
۷—۸؛ ۱—۷؛ ۱—۶؛ ۱—۵؛ ۱—B ؛ ۶—۵؛ ۶—۶؛ ۶—۷؛

۶—C؛ ۵—۴؛ ۵—۵؛ ۵—۶؛ ۵—۷؛ ۴—۳؛ ۴—۴؛ ۴—۵؛

۴—۶؛ ۱—۵؛ ۱—۴؛ ۱—۳؛ ۱—A

دنبالهٔ جابه‌جایی روشن است.

معمای دوم. چهار جهت برای حرکت، ممکن است: به طرف شمال، به‌طرف جنوب، به طرف شرق و به‌طرف غرب.



دراینصورت به‌ترتیب زیرمی‌توان جابه‌جایی مهره‌ها را انجام داد:

۱) به طرف مشرق،
۲) پرش به مغرب،
۳) به طرف مغرب،
۴) پرش به مشرق،
۵) به‌طرف شمال،
۶) پرش به‌جنوب،
۷) به‌طرف جنوب،
۸) پرش به‌شمال،
۹) پرش به مشرق،
۱۰) به‌طرف مغرب،
۱۱) پرش به‌مغرب،
۱۲) به‌طرف شمال،
۱۳) به‌طرف مشرق،
۱۴) پرش به مغرب،
۱۵) به‌طرف جنوب،
۱۶) پرسش به مشرق،
۱۷) به‌طرف شمال،
۱۸) پرش به‌جنوب،
۱۹) به‌طرف مشرق،
۲۰) به‌طرف شمال ،
۲۱) پرش به‌جنوب،
۲۲) به‌طرف مغرب،
۲۳) پرش به‌شمال،
۲۴) پرش به‌شمال،
۲۵) به‌طرف جنوب،
۲۶) پرش‌به‌جنوب،
۲۷) پرش به‌مشرق،
۲۸) به‌طرف شمال ،
۲۹) پرش به‌جنوب،
۳۰) پرش به‌مغرب،
۳۱) پرش به شمال،
۳۲) به‌طرف مشرق،
۳۳) پرش به مغرب،
۳۴) پرش به شمال ،
۳۵) به‌طرف مشرق ،
۳۶) پرش به مغرب ،
۳۷) پرش به جنوب،
۳۸) پرش به مشرق،
۳۹) پرش به مشرق ،
۴۰) به طرف مغرب ،
۴۱) پرش به مغرب ،
۴۲) به طرف مشرق،
۴۳) پرش بـه شمال ،
۴۴) به طرف جنوب ،
۴۵) پرش به جنوب ،
۴۶) بـه طرف شمال.

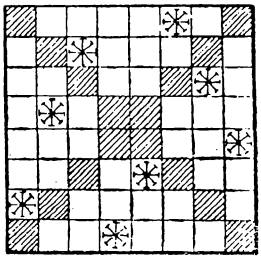
۱۱۲. جواب چنین است:

$$\left.\begin{matrix}۱\\۸\\۱۵\end{matrix}\right\} d=۷\ ;\quad \left.\begin{matrix}۲\\۷\\۱۲\end{matrix}\right\} d=۵\ ;\quad \left.\begin{matrix}۶\\۱۰\\۱۴\end{matrix}\right\} d=۴\ ;$$

$$\left.\begin{matrix}۹\\۱۱\\۱۳\end{matrix}\right\} d=۲\ ;\quad \left.\begin{matrix}۳\\۴\\۵\end{matrix}\right\} d=۱$$

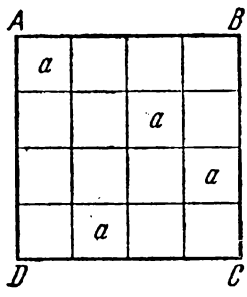
۱۱۳. مسأله، تنها یك جواب دارد کـه در شکـل داده شده است.

برای اینکه در تاریکیها سرگردان نشویم، می‌توان از روش زیر، برای جستجوی جواب، استفاده کرد: در ستون اول، جای ستاره، از قبل معلوم است. در ستون دوم ستاره را در پایین ترین خانه‌سفید که ممکن‌است. (با رعایت شرطهای مسأله)، قرار می‌دهیم. سپس به ستون سوم می‌پردازیم؛ دراین ستون هم، ستاره را درپایین‌ترین خانهٔ ممکن، می‌گذاریم‌و غیره. هربار درهرستون، ستاره را در پایین‌ترین خانه‌ای که ستاره‌های ستونهای قبل اجازه می‌دهد، قرار می‌دهیم. اگر به ستونی برسیم‌که درآن، با رعایت شرطهای مسأله، نتوانیم هیچکدام از خانه‌های سفید را اشغال کنیم، باید درستون قبل، ستاره را به‌کمترین تعداد خانه‌ای که ممکن است بالابریم (وبه‌هرحال باید در خانه‌ای قرار دهیم‌که با شرطهای مسأله بسازد). اگر این بالابردن ممکن نباشد، به ستارهٔ قبلی توجه می‌کنیم و آنرا به‌کمترین تعداد خانه‌ای که ممکن است، بالا می‌بریم و غیره. با ادامه این روش، بالاخره به جواب مسأله، می‌رسیم.


مربوط به مسألهٔ ۱۱۳

ممکن است این‌روش طولانی باشد، ولی درعوض به‌طورمنظم وقطعی به جواب نزدیك می‌شود.

۱۰۱۱۴ فرض می‌کنیم که چهار حرف یکی باشند. یکی از حرفها را دریکی از خانه‌های قطر AC، ومثلاً درگوشهٔ بالا و سمت چپ مربع، قرار می‌دهیم (شکل را ببینید). بین خانه‌های قطر دوم BD، یکی در ردیف افقی و یکی در ردیف قائم باخانه‌ای‌که اولین حرف را گذاشته‌ایم، قرار دارد. بنابر- این حرف دوم را دریکی از دو خانهٔ آزاد قطر دوم می‌توان قرار داد.



مربوط به مسألهٔ ۱۰۱۱۴

به‌سادگی معلوم می‌شودکه برای جادادن دو حرف دیگر، تنها یك جواب وجود دارد، زیرا مثلاً در ردیفهای افقی،

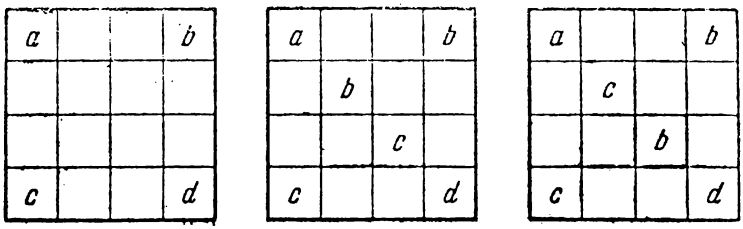
تنها دو خانهٔ منحصر به‌فرد است که می‌توان حرفها را قرارداد تا در ردیف قائم یا قطری با دوحرف قبلی، قرار نگیرند.

حالا دیگر می‌توان، تعداد جوابها را پیدا کرد. برای هریك از چهار حالتی‌که می‌توان حرف اول را، روی قطر AC قرار داد، دوحالت برای گذاشتن حرف دوم روی قطر BD وجود دارد، یعنی رویهم ۸ = ۲ × ۴ حالت و هر ۸ جواب را می‌توان باچرخاندن یکی از جوابهای مربع، بدست آورد.

حالا فرض می‌کنیم‌که چهارحرف مفروض مختلف باشند: a، b، c و d. دراینصورت اگر مثلاً ردیف حرفها را به‌ترتیبی‌که درخانه‌ها قرار می‌دهیم (a، b، c، d) بگیریم، می‌توان این ردیف را عوض کرد و مثلاً به‌شکل (b، c، d، a) را قرار داد.

می‌دانیم که جای چهار حرف را به ۲۴ طریق می‌توان عرض کرد، بنابراین تعداد جوابها رویهم مساوی ۲۴ × ۸ ، یعنی ۱۹۲، می‌شود.

۲.۱۱۴. ازشرط مسأله پیداست‌که باید چهارحرفی که در چهارگوشهٔ مربع قراردارد، مختلف باشند. بنابراین، قبل ازهمه، چهار حرف رابه‌طریق دلخواهی درچهارگوشهٔ مربع قرار می‌دهیم (شکل را ببینید.) درخانه‌های قطری، که شامل a و d است، باید b و c را قرار داد، ولی این دو حرف



مربوط به مسألهٔ ۲.۱۱۴

را به دو طریق می‌توان روی این قطر قرار داد (شکلهای b و c).

بعداز آنکه شش خانهٔ مربع، به این ترتیب پرشد، به‌سادگی معلوم می‌شودکه برای پرکردن بقیهٔ خانه‌ها، باتوجه به شرطهای مسأله، تنها یك

راه حل وجود دارد. برای این منظور باید ابتدا خانه‌های کناری (افقی و قائم) را پر کرده و سپس و به‌خانه‌های قطر دوم پرداخت. نتیجهٔ کار را در شکل زیر نشان داده‌ایم:

a	d	c	b
b	c	d	a
d	a	b	c
c	b	a	d

a	c	d	b
d	b	a	c
b	d	c	a
c	a	b	d

به‌این ترتیب، اگرحرفهای مربوط به‌چهارگوشه‌ها را گذاشته‌باشیم، دوجواب برای مسأله بدست می‌آید. ولی چون چهار حرف را به ۲۴طریق می‌توان‌درگوشه‌ها قرارداد، مسأله رویهم ۲ × ۲۴ ، یعنی ۴۸ جواب‌دارد.

اگر مربع را روی یکی از جوابها بچرخانیم، ۷ جواب دیگر بدست می‌آید.

اگر هرجوابی را که از چرخاندن جواب دیگر بدست می‌آید، جواب جدید به حساب نیاوریم، مسأله رویهم ۸ : ۴۸ ، یعنی ۶ جواب مختلف خواهد داشت.

۱۱۵. بدون شك، بعد از یك رشته آزمایش، خواهید توانست یکی‌از جوابهای‌ممکن مسأله‌را پیداکنید. یکی ازجوابهادر جدول صفحهٔ ۵۷۰ داده شده است.

برای اینکه تعداد جوابهای مسأله را پیدا کنیم، چهار رنگ را به A ، B ، C و D و چهار عدد ۱، ۲، ۳، و ۴ را به a، b، c و d نشان می‌دهیم. مسأله منجر به این می‌شودکه ابتدا در ۱۶ خانهٔمربع، چهارحرف A ، B ، C و D را طوری قراردهیم‌که درهر ردیف‌افقی، هرردیف‌عمودی وهریك ازدو ردیف قطری، حرفهای‌مشابه وجودنداشته باشد؛ سپس‌حرفهای a ، b ، c و d را به تمام طریقه‌های ممکن، پهلوی آنها بگذاریم. از حل مسألهٔقبل می‌دانیم‌که حرفهای A ، B ، C و D را به ۴۸ طریق می‌توان

۱ قرمز	۴ سیاه	۲ سبز	۳ سفید
۲ سفید	۳ سبز	۱ سیاه	۴ قرمز
۳ سیاه	۲ قرمز	۴ سفید	۱ سبز
۴ سبز	۱ سفید	۳ قرمز	۲ سیاه

در ۱۶ خانهٔ مربع قرار داد. همچنین حرفهای a ، b ، c و d را هم به ۴۸ نوع می‌توان دراین خانه‌ها گذاشت. برای اینکه جوابی از مسألهٔ خودمان را بدست آوریم، کافی است هریك از ۴۸ حالت اول را با هریك از ۴۸ حالت دوم درنظر بگیریم. یکی ازاین جوابها در شکل‌سمت چپ داده شده است.

Aa	*Bd*	*Cb*	*Dc*
Db	*Cc*	*Ba*	*Ad*
Bc	*Ab*	*Dd*	*Ca*
Cd	*Da*	*Ac*	*Bb*

مربوط به مسألهٔ ۱۱۵

اگر دراین جواب A ، B ، C و D را به رنگهای مربوطه، یعنی قرمز، سیاه ، سبز و سفید؛ و a ، b ، c و d را به عددهای ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ تبدیل کنیم، همان جدولی‌بدست‌می‌آید، که قبلاً ازآن نام‌بردیم. روشن است‌که تعدادجوابهای مختلف مسأله مساوی ۴۸ × ۴۸ ، یعنی بیش از دوهزارخواهد بود.

۱۱۶. فرض کنید، در ابتدا ، خانهٔ شمارهٔ ۱ ، آزاد مانده باشد. هر هرحرکت را می‌توان به وسیلهٔ دو عدد نشان داد: عدد اول نمایندهٔ خانه‌ای است که حرکت ازآن شروع می‌شود و عدد دوم نمایندهٔ خانه‌ای است که حرکت درآنجا به‌پایان می‌رسد. دراینصورت راه حل زیر وجود دارد:

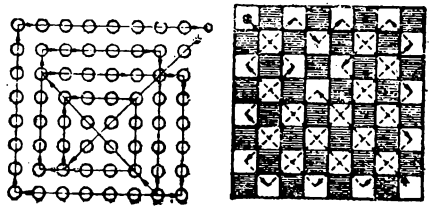
۱۰؛ ۸ — ۱۰؛ ۸ — ۸؛ ۲۲ — ۹؛ ۷ — ۷؛ ۲۱ — ۸؛ ۱۰ — ۹؛ ۷ — ۷؛ ۱ — ۹
۱۸؛ ۳۰ — ۶؛ ۱۸ — ۱۸؛ ۱۶ — ۱۱؛ ۳ — ۶؛ ۱۸ — ۹؛ ۱ — ۴؛ ۶ —
۳۳؛ ۳۱ — ۳۰؛ ۱۸ — ۲۵؛ ۳۳ — ۳۰؛ ۲۸ — ۲۶؛ ۲۴ — ۲۵؛ ۲۷ —
۱۸؛ ۶ — ۱۱؛ ۲۵ — ۲۵؛ ۲۳ — ۱۸؛ ۲۰ — ۲۴؛ ۲۶ — ۲۵؛ ۳۳ —
۱ — ۳ ؛ ۱۱ — ۱۳ ؛ ۶ — ۱۸ ؛ ۱۱ — ۹

۱۱۷. هر ۲۴ جواب، دراینجا داده شده است:

۱)	۱ — ۲,۳	۲ — ۶,۵	۶ — ۱,۳	۱ — ۶,۲
۲)	۱ — ۲,۳	۴ — ۱,۳	۳ — ۶,۵	۵ — ۳,۴
۳)	۱ — ۴,۵	۳ — ۴,۱	۴ — ۲,۶	۲ — ۳,۴
۴)	۱ — ۴,۵	۵ — ۲,۶	۶ — ۴,۱	۱ — ۶,۵
۵)	۲ — ۳,۴	۳ — ۱,۶,۵	۶ — ۲,۴	۲ — ۱,۶
۶)	۲ — ۳,۴	۵ — ۲,۳	۳ — ۱,۶	۱ — ۳,۵
۷)	۲ — ۴,۵	۵ — ۱,۳,۶	۶ — ۲,۴	۲ — ۱,۶
۸)	۲ — ۴,۵	۳ — ۲,۵	۵ — ۱,۶	۱ — ۵,۳
۹)	۳ — ۱,۲	۵ — ۳,۲	۲ — ۶,۴	۴ — ۵,۲
۱۰)	۳ — ۱,۲	۴ — ۳,۱	۱ — ۶,۵	۵ — ۱,۴
۱۱)	۳ — ۱,۲	۱ — ۲,۶,۴	۶ — ۲,۳	۳ — ۶,۵
۱۲)	۳ — ۱,۲	۲ — ۱,۶,۵	۶ — ۳,۱	۳ — ۶,۴
۱۳)	۳ — ۴,۵	۲ — ۳,۵	۵ — ۱,۶	۱ — ۲,۵
۱۴)	۳ — ۴,۵	۱ — ۳,۴	۴ — ۲,۶	۲ — ۱,۴
۱۵)	۳ — ۴,۵	۴ — ۱,۶,۵	۶ — ۵,۳	۳ — ۲,۶
۱۶)	۳ — ۴,۵	۵ — ۲,۶,۴	۶ — ۳,۴	۳ — ۱,۶
۱۷)	۴ — ۳,۲	۳ — ۱,۶,۵	۶ — ۲,۴	۴ — ۵,۶
۱۸)	۴ — ۳,۲	۱ — ۴,۳	۳ — ۵,۶	۵ — ۳,۱

۱۹)	۴ — ۱,۲	۱ — ۳,۶,۵	۶ — ۲,۴	۴ — ۶,۵
۲۰)	۴ — ۱,۲	۳ — ۱,۴	۱ — ۶,۵	۵ — ۱,۳
۲۱)	۵ — ۳,۴	۴ — ۱,۶	۶ — ۳,۵	۵ — ۶,۴
۲۲)	۵ — ۳,۴	۲ — ۳,۵	۳ — ۱,۶	۱ — ۲,۳
۲۳)	۵ — ۱,۲	۳ — ۲,۵	۲ — ۶,۴	۴ — ۳,۲
۲۴)	۵ — ۱,۲	۱ — ۴,۶	۶ — ۲,۵	۵ — ۱,۶

۱۱۸. مسیرحرکت دختر و پسر ، به‌ترتیب در شکلهای a و b داده شده است. مسیرهای دیگری هم وجود دارد. آنها را پیدا کنید.



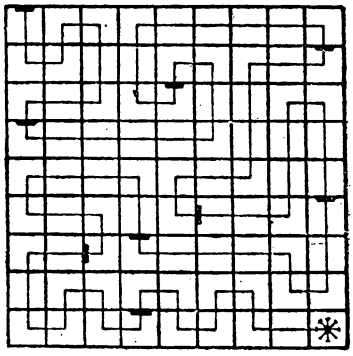
a) b)

۱۱۹. حرکت اسب طوری است که از خانهٔ سیاه به خانه سفید، و سپس ازخانهٔ سفید به خانهٔ سیاه می‌رود وغیره. صفحهٔ شطرنج ۶۴ خانه‌دارد و برای اینکه اسب به خانه h۸ برسد، و ضمناً از هرخانهٔ صفحهٔ شطرنج یکبار عبور کند، باید ۶۳ حرکت انجام دهد.

اسب، در وضع اولیه، درخانهٔسیاه است (شکل صفحهٔ۱۰۷ را ببینید) و بعد از ۶۳ حرکت هم باید دوباره به خانهٔ سیاه برسد.

ولی این ممکن نیست، زیرا ۶۳ عددی فرد است و اسب، همیشه بعد آنکه به تعداد فرد حرکت‌کرده باشد، درخانهٔ سفید قرار می‌گیرد (با اولین حرکت به‌خانه سفید می‌رود، دوباره بعداز حرکت سوم، بعد ازحرکت پنجم و غیره درخانه سفید قرار می‌گیرد).

۱۲۰. مسیرحرکت زندانی، درشکل صفحهٔ‌بعدنشان داده شده‌است.آیا شماخودتان توانستیدآنرا حل‌کنید؟ حالا دوباره حل‌آنرا امتحان کنید وهمهٔ



مربوط به مسألهٔ ۱۲۰

تغییر مسیرهایی راکه ممکن است، پیدا کنید.

۱۲۱. زندانی باید طوری حرکت کند که کلیدهای d و e را بردارد و درهای E و D را باز کند (شکل‌صفحهٔ ۱۰۹ را ببینید)، سپس‌باید به‌طرف کلید c برود و باآن در C را باز کند، کلید a را بردارد و به‌کمك آن در A را بازکند و کلید b را بردارد. حالاباید دوباره از E و D عبورکند و به B برسد، کلید f رابردارد دوباره از E بگذرد و در F را باز کند، کلید g را بردارد و با بازکردن در G از زیر زمین خارج شود.

راه آزادی، خیلی ساده نیست! باید از ۹۳ در عبور کند.

بخش سوم

۱۲۲. شکلهای a ، b ، c ، d و e را در صفحهٔ ۵۷۴ ببینید.

۱۲۳. a) ۱۲ چوب کبریتی که در داخل مربع بزرگ قرار دارد، بردارید و ازآنها مربع جدیدی بسازید.

b) شکل صفحهٔ ۵۷۴ را ببینید .

c) شکل صفحهٔ ۵۷۵ را ببینید: a (اگر۴ چوب‌کبریت را برداریم)، b (اگر ۶ چوب کبریت را برداریم، یك‌جواب دیگر را خودتان پیداکنید)، c (اگر۸ چوب کبریت را برداریم، دوجواب دیگر را خودتان پیدا کنید)؛

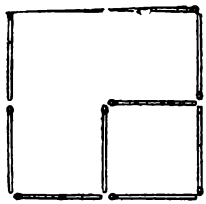
d) شکل d را در صفحهٔ ۵۷۵ را ببینید؛

e) شکل a را در صفحهٔ ۵۷۶ ببینید؛

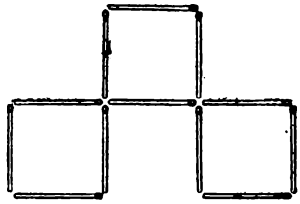
f) شکل b را در صفحهٔ ۵۷۶ ببینید؛

g) شکل c را در صفحهٔ ۵۷۶ ببینید؛

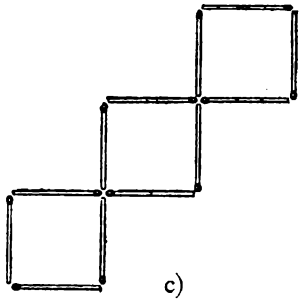
h) شکل d را در صفحهٔ ۵۷۶ ببینید.



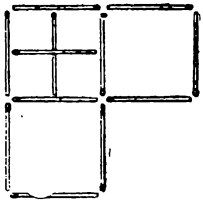
a)



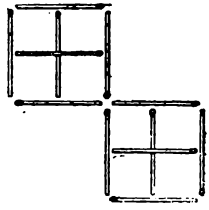
b)



c)

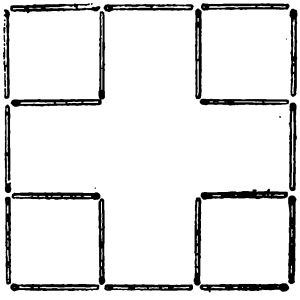


(d

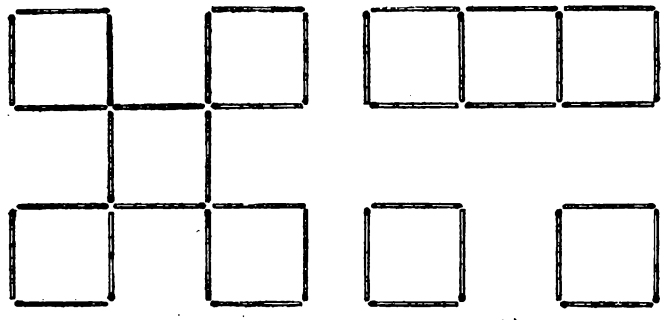


(c

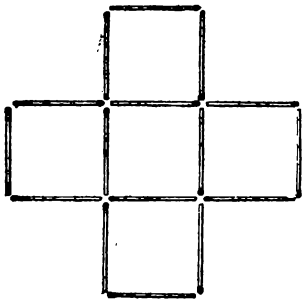
مربوط به مسألهٔ ۱۲۲



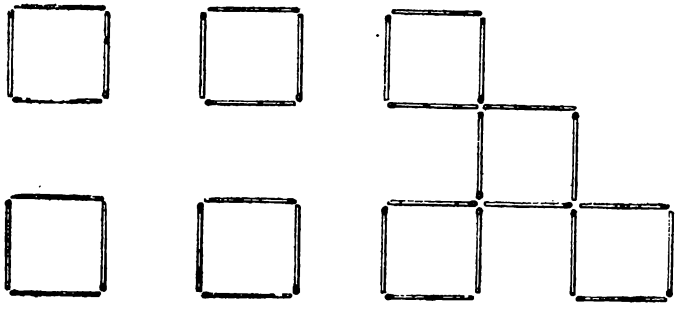
مربوط به مسألهٔ ۱۲۳ ـ b



a) b)



c)

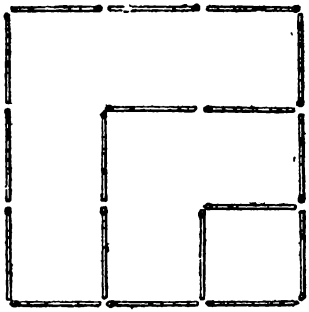


d)

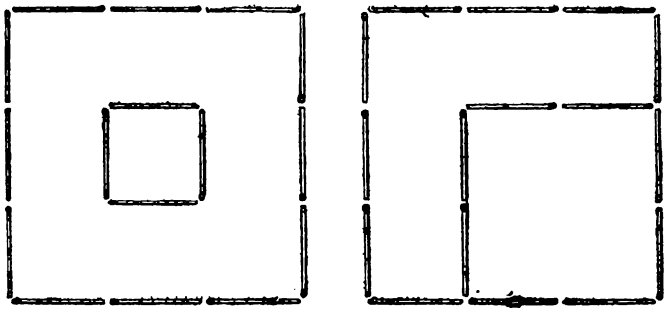
مربوط به مسألهٔ ۱۲۳

۱۲۴. جواب در شکل صفحهٔ۵۷۷ داده شده است.

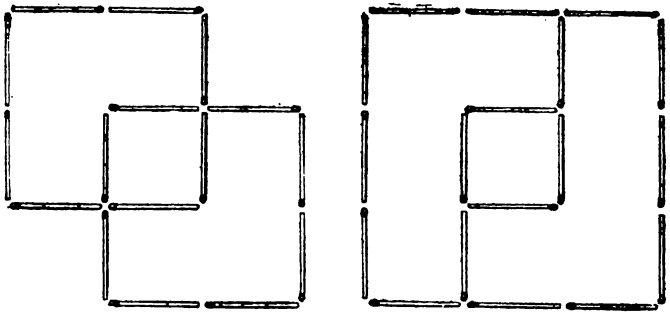
۱۲۵. جواب در شکل صفحهٔ۵۷۷ داده شده است.



a)



b

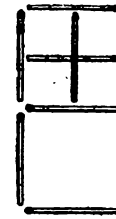


c) d)

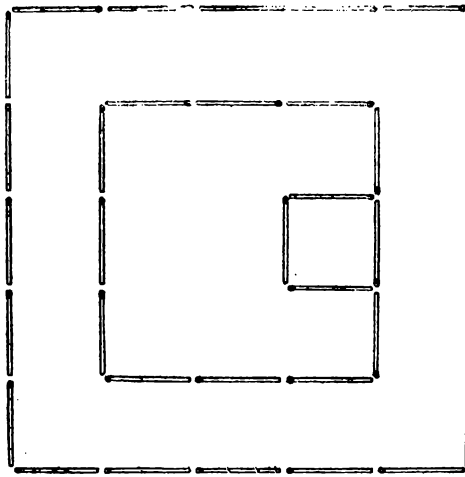
مربوط به مسألهٔ ۱۲۳

۱۲۶. شکل صفحهٔ ۵۷۷ را ببینید.

۱۲۷. شکل را درهمین صفحه ببینید.

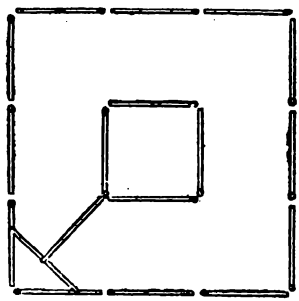


مربوط به مسألهٔ ۱۲۴

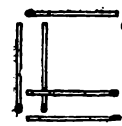


مربوط به مسألهٔ ۱۲۵

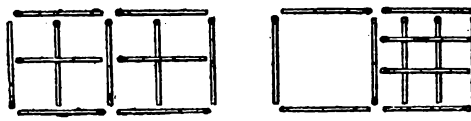
مربوط به مسألهٔ ۱۲۹



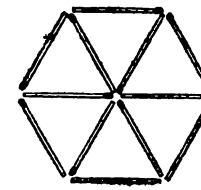
مربوط به‌مسألهٔ ۱۲۶

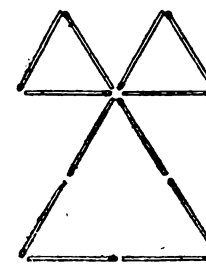


مربوط به‌مسألهٔ ۱۲۷

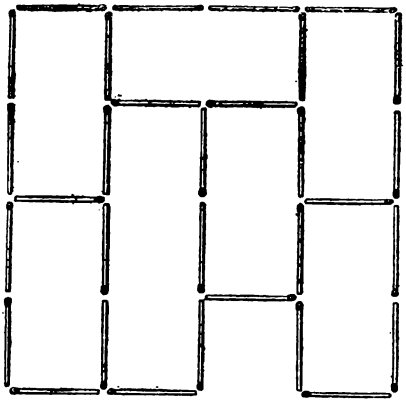


مربوط به مسألهٔ ۱۲۸

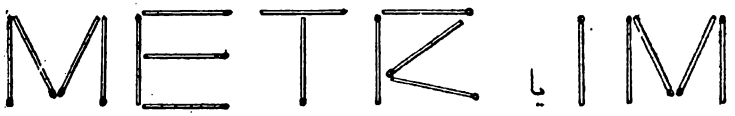




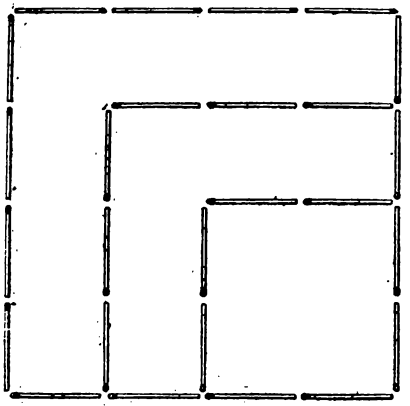
مربوط به مسألهٔ ۱۳۰



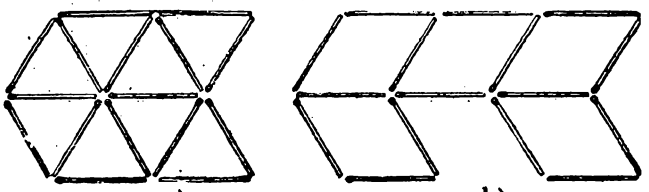
مربوط به‌مسألهٔ ۱۳۱



مربوط به مسألهٔ ۱۳۲

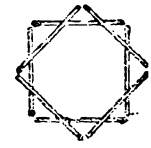


مربوط به مسألهٔ ۱۳۳

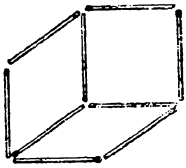


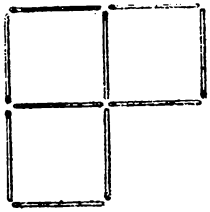
مربوط به مسألهٔ ۱۳۵

۱۲۸. جواب در شکل صفحهٔ۵۷۷ داده شده است.

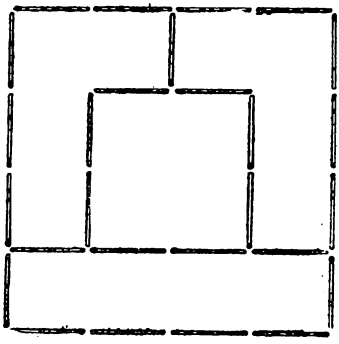


مربوط به مسألهٔ ۱۳۷

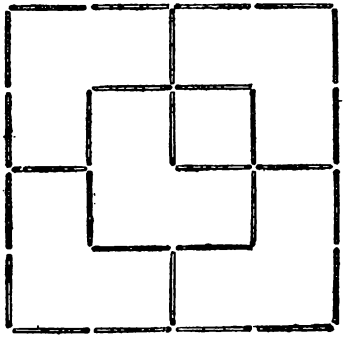




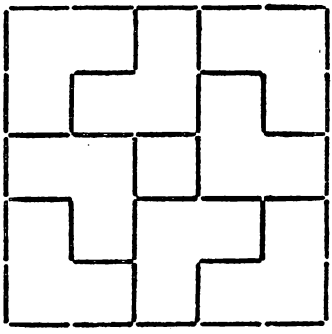
مربوط به مسألهٔ ۱۳۶



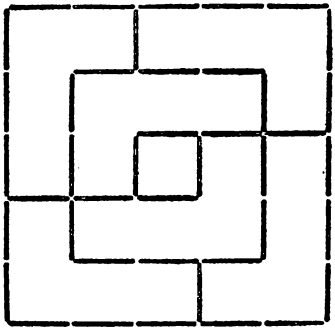
مربوط به مسألهٔ ۱۳۹



مربوط به مسألهٔ ۱۳۸



b)



a)

مربوط به مسألهٔ ۱۴۰

۱۲۹. دو چوب‌کبریت را از وسط خم کنید (شکل درصفحهٔ ۵۷۷).

۱۳۰. شکل را در صفحهٔ۵۷۷ ببینید.

۱۳۱. در شکل اصلی ۳۰ مربع بوده است . در شکل صفحهٔ۵۷۸، جواب مسأله داده شده است، باید حداقل ۹ چوب کبریت را برداشت.

۱۳۲. جوابها در صفحهٔ۵۷۸ داده شده است.

۱۳۳. جواب را در شکل صفحهٔ۵۷۸ ببینید.

۱۳۴. دوچوب‌کبریت را درکنار میز یا کتاب طوری قرار دهیدکه کناره‌های میز یا کتاب، دو ضلع دیگر مربع را تشکیل دهند.

۱۳۵. جواب را در شکل صفحهٔ۵۷۸ ببینید.

۱۳۶. جواب را در شکل صفحهٔ۵۷۹ ببینید.

۱۳۷. جواب در شکل صفحهٔ۵۷۹ داده شده است.

۱۳۸. جواب در شکل صفحهٔ۵۷۹ داده شده است.

۱۳۹. جواب را در شکل صفحهٔ۵۷۹ ببینید.

۱۴۰. شکلهای a و b را در صفحه۵۷۹ ببینید.

۱۴۱. ۸۴۰.

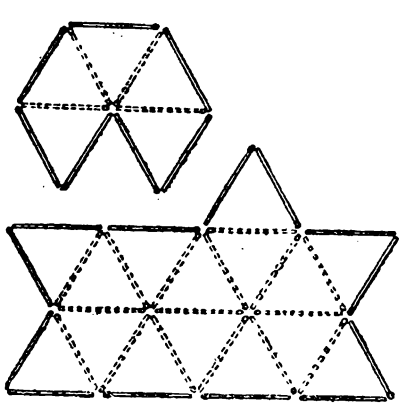
۱۴۲. شکل را درصفحهٔ۵۸۱ ببینید. جوابهای‌دیگری هم‌وجود دارد.

۱۴۳. جواب اول. با ۱۲ چوب‌کبریت، مثلث قائم‌الزاویه‌ای‌بسازید که ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن مساوی ۳ و ۴ چوب‌کبریت و وترآن مساوی ۵ چوب کبریت باشد (شکل درصفحهٔ ۵۸۱). مساحت چنین مثلثی برابر است با $\frac{1}{2}(۳\times۴)$ ، یعنی ۶ واحد مربع.

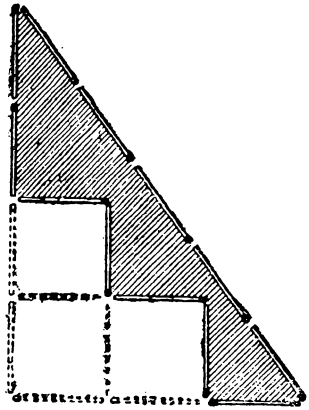
اگر ۶ چوب‌کبریت را ازکنار زاویهٔ‌قائمه، آنطورکه درشکل‌می‌بینید، برداریم، سه واحد مربع ازمساحت مثلث کم می‌شود و شکلی بدست‌می‌آید (که روی شکل هاشور خورده است) که مساحتی مساوی ۳ ـ ۶، یعنی ۳ واحد مربع دارد.

جواب دوم. مربعی بسازیدکه مساحت آن مساوی ۴واحد مربع‌باشد، سپس آنرا به شکلی تبدیل کنید. که هم‌ارز مربع باشد و بالاخره یك‌واحد

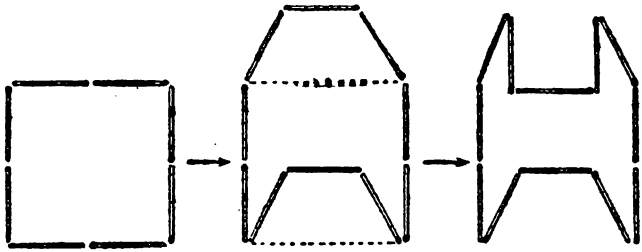
مربع ازآن خارج کنید (شکل‌را درهمین صفحه ببینید). به‌این ترتیب، شکل حاصل به مساحت ۳ واحد مربع بدست می‌آید.



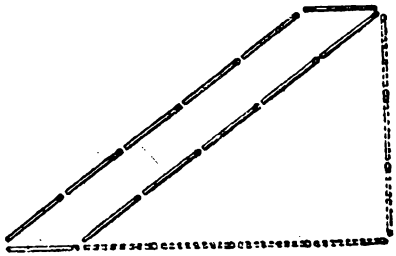
مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۳. جواب‌اول



مربوط به مسألهٔ ۱۴۲



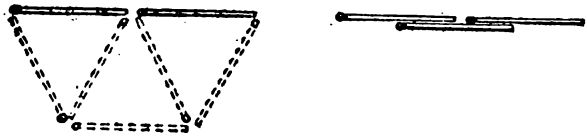
مربوط به مسألهٔ ۱۴۳. جواب دوم



مربوط به‌مسألهٔ ۱۴۳. جواب سوم

جواب سوم. می‌توان متوازی‌الاضلاعی ساخت که قاعدهٔ آن مساوی یك واحد و ارتفاعش مساوی ۳ واحد باشد (شکل را درصفحهٔ قبل ببینید).

۱.۱۴۴. دو چوب‌کبریت، وقتی روی یك خط راست قرار دارند که زاویهٔ بین آنها مساوی ۱۸۰ درجه باشد. برای اینکه زاویهٔ ۱۸۰ درجه را بدست‌آوریم، سه مثلث متساوی‌الاضلاع (آنطور که درشکل دیده می‌شود)



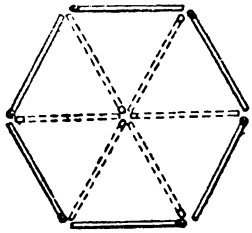
a) b)

مربوط به مسألهٔ ۱۴۴ . ۱

می‌سازیم. مجموع زاویه‌هایی که در رأس مشترك سه مثلث قرار دارند، مساوی ۱۸۰ درجه است، زیرا ۱۸۰ = ۳ × ۶۰.

یك راه حل دیگر هم درشکل b داده شده است.

۲.۱۴۴. شش‌مثلث متساوی‌الاضلاع بایك رأس مشترك می‌سازیم (شکل را ببینید)؛ در اینصورت شش‌ضلعی ما، منتظم می‌شود، زیرا طول هرضلع شش ضلعی، مساوی شعاع دایرهٔ محیطی می‌شود و این خاصیت مخصوص شش ضلعی منتظم است.

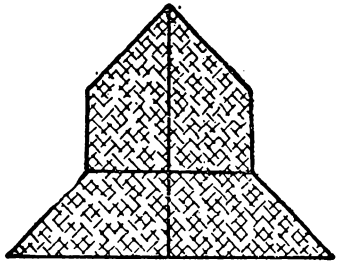


مربوط به مسألهٔ ۱۴۴-۲

بخش چهارم

۱.۱۴۵. خطهای برش درشکل صفحهٔ بعد نشان داده شده است. اگر رسم شکل و تقسیم آنرا با دقت انجام دهیم، با رویهم قراردادن قسمتهایی که بدست می‌آید، می‌توان درستی تساوی شکلها را تحقیق کرد.

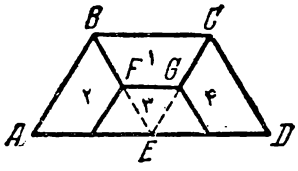
۲.۱۴۵. اگر وسط قاعدهٔ AD از ذوزنقهٔ ABCD را E بگیریم



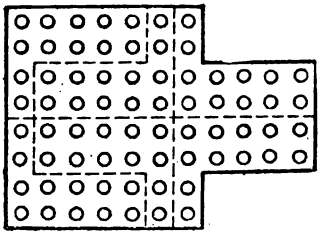
مربوط به مسألهٔ ۱.۱۴۵

(شکل را ببینید)، با وصل وسط پاره خطهای AE ، BE ، CE و DE به یکدیگر و رسم پاره خطهای BF و CG، چهار ذوزنقهٔ مساوی‌بدست می‌آوریم.

درستی تقسیم را می‌توان با رویهم‌قراردادن قسمتها بدست‌آورد. ولی به‌کمك استدلال هندسی هم می‌توان تساوی ذوزنقه‌ها را ثابت کرد.



مربوط به مسألهٔ ۲.۱۴۵

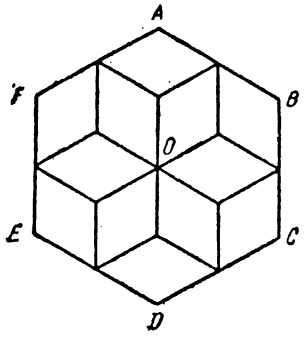


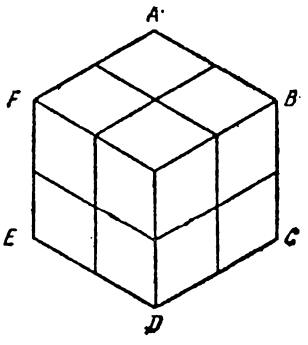
مربوط به مسألهٔ ۳.۱۴۵

این اثبات مشکل نیست.

۳.۱۴۵. خطهای تقسیم در شکل نشان داده شده است.

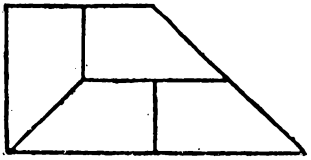
۴.۱۴۵. برای اینکه خطهای تقسیم‌را درشش‌ضلعی‌منتظم ABCDEF بدست‌آوریم، مثلاً می‌توان‌وسط ضلعهای‌آنرا به‌وسط شعاعهای OA، OB، OC ، OD ، OE و OF وصل کرد. هر قسمت از شش‌ضلعی، یك لوزی





مربوط به مسألهٔ ۱۴۵.۴

است (که می‌توان تحقیق یا اثبات کرد)، ولی لوزی، با وجودی که ضلعهای مساوی دارد، منتظم نیست، زیرا زاویه‌های آن با هم برابر نیستند.

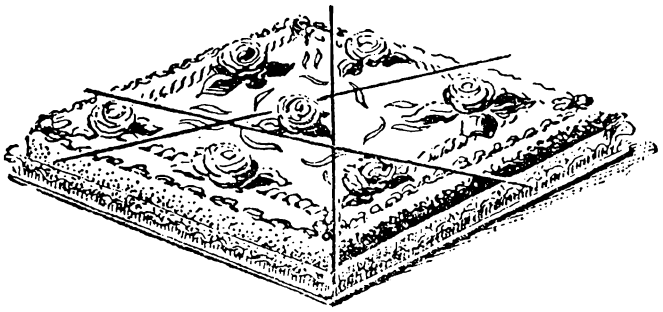


مربوط به‌مسألهٔ ۵.۱۴۵

در شکل، روش‌دیگری هم‌برای این تقسیم داده شده است ، ابتدا شش ضلعی را بـه سه لوزی مساوی تقسیم می‌کنیم و سپس هرلوزی را بـه نوبهٔ خود به چهار لـوزی جدیـد مساوی تقسیم می‌نماییم.

۵.۱۴۵. جواب مسأله، در شکل بالاداده شده است.

۱۴۶. جواب در شکل زیرداده شده است:



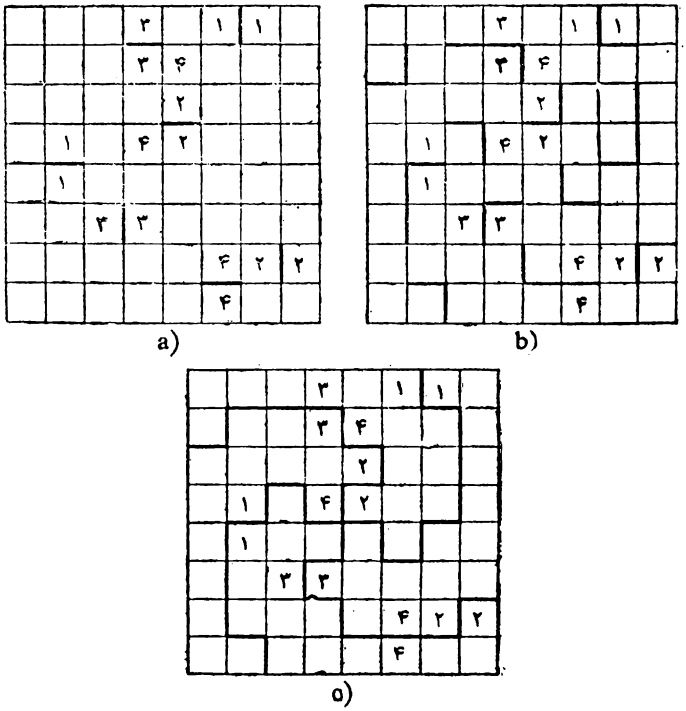
مربوط به مسألهٔ ۱۴۶

۱۴۷. خطهای تقسیم‌را می‌توان به‌ترتیب بازسازی کرد (شکل‌صفحهٔ بعد رابینید) :

a) ابتدا عددهای متشابهی را که درکنار هم قرارگرفته‌اند ، با خطی ازهم جدا کنید (شکل a)؛

b) با توجه به اینکه‌شکلهای تقسیم باید متقارن باشند، یعنی‌هرکدام بعد از دوران ۹۰ درجه دور مرکز مربـع، برشکل مساوی خـودش منطبق شود، هرکدام ازاین خطهای تقسیم‌را درجای جدیدی‌که بعد از دوران‌بدست می‌آید، قرار می‌دهیم (شکل b)؛

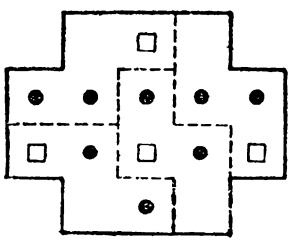
c) ۴ خانهٔ مرکزی را هم جدا می‌کنیم، زیرا بنابر شرط مسأله‌معلوم



مربوط به مسألهٔ ۱۴۷

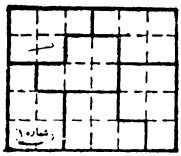
می‌شود که دوتا ازاین چهارخانه نمی‌تواند دریك شکل واقع شود؛ دیگر کامل کردن خطهای دورهٔ برش، با توجه به شرطهای مسأله، مشکل‌نیست (شکل c).

۱۴۸. جواب مسأله، در شکل سمت چپ داده شده است.

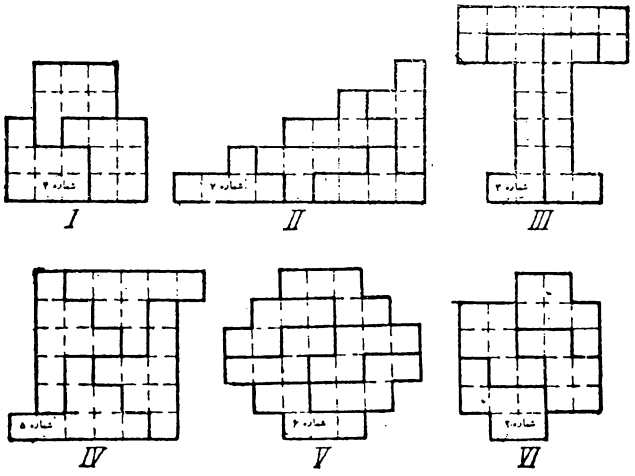


مربوط به مسألهٔ ۱۴۸

۱۴۹. به‌کمك آزمایش، معلوم می‌شود که مربع مستطیل را می‌توان به‌کمك قطعه‌های شمارهٔ ۱ ساخت. هر شش قطعهٔ‌شمارهٔ۱ یك‌مستطیل‌می‌دهد. شکل III، از ۳ قطعهٔ شمارهٔ ۳ ؛

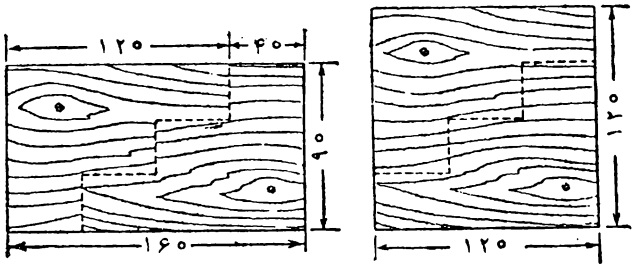


شکل IV ، از ۴ قطعهٔ شمارهٔ ۵؛ شکل V ، از ۶ قطعهٔ شمارهٔ ۶؛ و شکل VI، از ۴ قطعهٔ شمارهٔ ۲ درست شده است. تمام جوابها را می‌توانید درشکل ببینید.



مربوط به مسألهٔ ۱۴۹

۱۵۰. واسیا، تخته سه‌لایی‌را به‌صورت پله‌کانی بریده است (شکل را ببینید) .

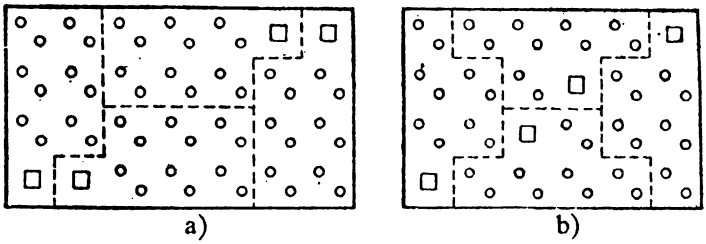


مربوط به مسألهٔ ۱۵۰

باید در نظر داشت که همیشه نمی‌توان باتقسیم پله‌کانی، یك مستطیل

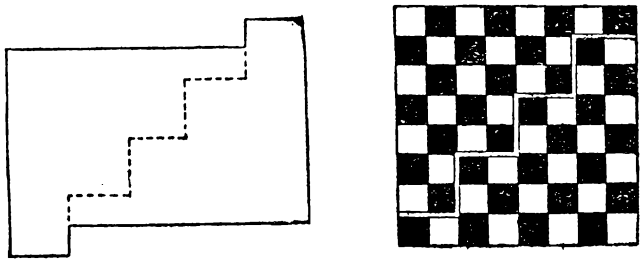
را به مربع تبدیل‌کرد. ولی به‌هرحال همیشه‌می‌توان یك مستطیل را به‌مربع تبدیل کرد که ما دراینجا به‌آن نمی‌پردازیم.

۱۵۱. خطهای تقسیم را با خطچین درشکل نشان داده‌ایم. خودتان جواب دیگری برای لوح دوم پیدا کنید.



مربوط به مسألهٔ ۱۵۱

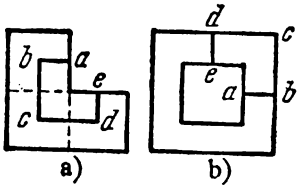
۱۵۲. خط تقسیم ، در شکل داده شده است.



مربوط به مسألهٔ ۱۵۲

۱۵۳. شکل مفروض را باید روی خط abcde برید، که در آن b، c و d، عبارتنداز مرکز مربعهای شکل مفروض (شکل a).

با قرار دادن قسمت بریده شده درکنار بقیه (آنطورکه‌درشکل b دیده

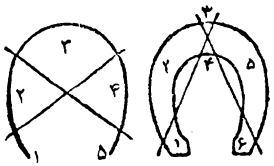


مربوط به مسألهٔ ۱۵۳

می‌شود)، قاب مورد نظر بدست می‌آید.

با همین شرطها، کوشش کنید خط دیگری هم برای تقسیم پیدا کنید.

۱۵۴. دراینجا نباید خود را به‌یك طرح سادهٔ نعل به‌صورت یك قوس محدود کرد (شکل‌را ببینید). اگرشکل‌نعل را به‌صورت کامل‌آن رسم نکنیم، نمی‌توانیم به‌کمك دو خط راست، آنرا به بیش از ۵ قسمت تقسیم‌کنیم.

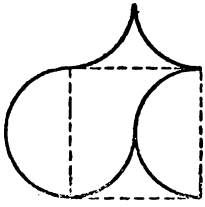


مربوط به مسألهٔ ۱۵۴

در همین شکل، طرح دقیق‌تری از نعل رسم شده است‌که به‌کمك دوخط راست به ۶ قسمت تقسیم شده است.

۱۵۵. خواننده باید به این نکته‌توجه‌کند که دراین مسأله، برخلاف مسألهٔ قبل، منع نشده است‌که بعد از یك ضربه نمی‌توانیم قطعه‌ها را جابه‌جا کنیم. راه حل مسأله‌هم درهمین نکته نهفته است.

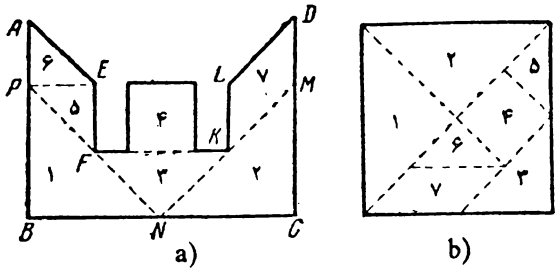
اولین ضربه را طوری‌می‌زنیم‌که نعل در زیرسوراخهای C و D قطع شود. به‌این ترتیب، نعل به سه قسمت تقسیم می‌شود که درهرقسمت دو سوراخ وجود دارد. حالا سه‌قسمت جدا شده نعل‌را طوری رویهم می‌گذاریم‌که به‌تقریب، سوراخهای آنها رویهم قرارگیرد. دیگر یك‌ضربه کافی است که نعل را به ۶ قسمت تقسیم کند (شکل صفحهٔ ۱۳۰ را ببینید) .


مربوط به مسألهٔ ۱۵۶

۱۵۶. جواب را می‌توانید درشکل ببینید.

۱۵۷. جواب را درشکل‌صفحهٔ بعد داده‌ایم. تقسیم‌شکل‌را به وسیلهٔ خط چین و قطعه‌های مساوی را در دو شکل با یك عدد نشان داده‌ایم.

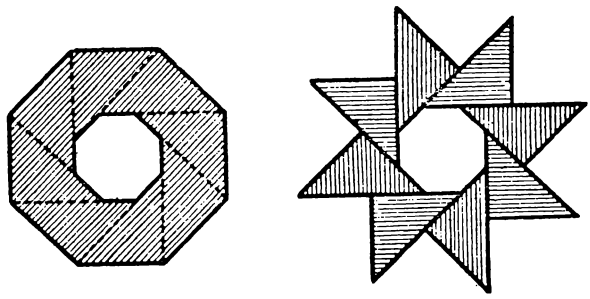
برای رسم خط PN. ابتدا روی ضلع AB پاره خط AP را مساوی EF جدا کنید و سپس از P به F وصل کنید و امتداد دهید . رسم بقیهٔ خطهای برش از روی شکل معلوم است. اگر شکل اصلی را درست رسم



مربوط به مسألهٔ ۱۵۷

کرده باشیم، زاویهٔ PNM مساوی ۹۰ درجه‌می‌شود و پاره خطهای PB، BN، NC و CM مساوی یکدیگر در می‌آیند.

۱۵۸. جواب مسأله در شکل داده شده است.

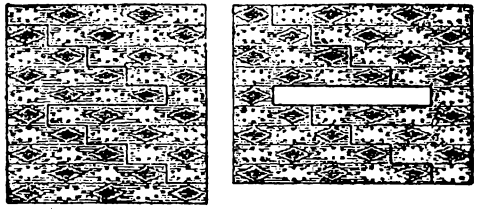


مربوط به مسألهٔ ۱۵۸

۱۵۹. جواب مسأله در شکل داده شده است. بعد از آنکه قالی به صورت دندانه‌ای، آنطورکه در شکل می‌بینیم، به دوقسمت شد، قطعه پایین را یك‌دندانه به‌سمت چپ می‌بریم وبازهم دندانه‌ها راداخل‌هم قرارمی‌دهیم.

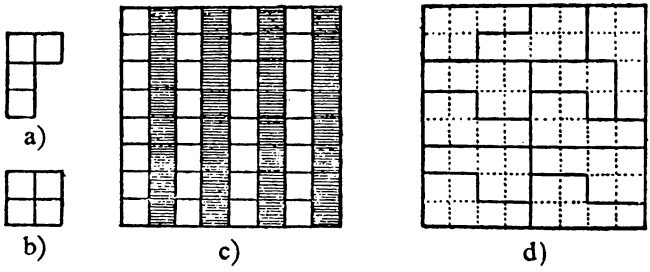
مربوط به مسألهٔ ۱۵۹

۱۶۰. نوریا ، دو برش پله‌ای روی قالیچهٔ خود به وجودآورد و آنها را، آنطورکه در شکل دیده می‌شود، پهلوی‌هم قرارداد. عرض پله‌ها ۲ دسیمتر و ارتفاع آنها یك دسیمتر است.



مربوط به مسألهٔ ۱۶۰

۱۶۱. برای اینکه ثابت کنیم که صفحهٔ شطرنج را نمی‌توانیم به ۱۵ شکل شبیه a و یك شکل شبیه b (شکل را ببینید)، تقسیم کنیم، صفحهٔ ۸×۸ شبیه صفحهٔ شطرنج درنظر می گیریم که به‌ترتیب دیگری خانه‌های سفید و سیاه آن قرارگرفته باشند (شکل c). اگر ازجای دلخواهی ازاین صفحه، شکل شبیه a را ببریم، درآن چه تعداد خانه‌های سفید و چه‌تعداد



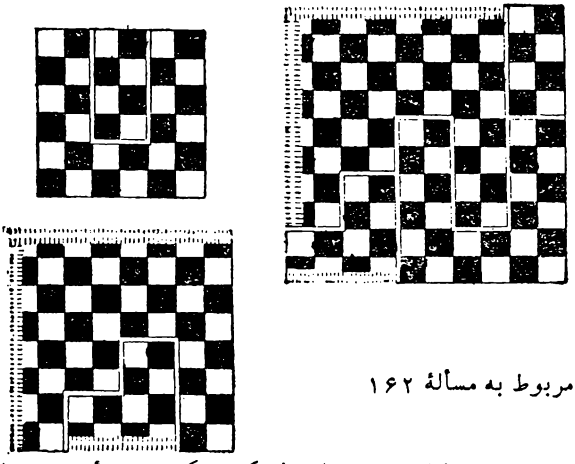
مربوط به مسألهٔ ۱۶۱

خانه‌های سیاه، عددی‌فرد است؛ در ۱۵ قطعهٔ شبیه a هم باز تعدادخانه‌های سفید و هم تعدادخانه‌های سیاه، عددی فرد است. برعکس در قطعهٔ b ، هم تعداد خانه‌های سفید و هم تعداد خانه‌های سیاه، عددی زوج است. به این ترتیب رویهم در ۱۶ قطعه، هم تعداد قطعه‌های خانه‌های سفید و هم تعداد خانه‌های سیاه، عددی فرد می‌شود ؛ درحالیکه تعداد خانه‌های سفید و هم

تعدادخانه‌های سیاه، درصفحهٔ شطرنج، عددی‌زوج است. ازهمین‌جا هم عدم امکان حل مسأله، روشن می‌شود.

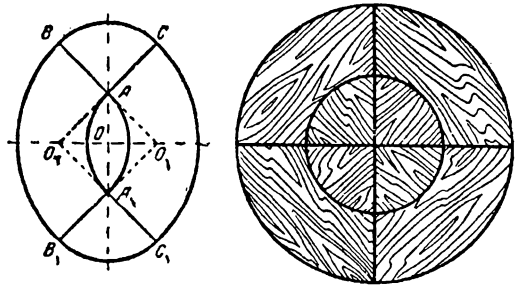
یکی از جوابهای ممکن مسألهٔ اضافی، در شکل d داده شده است. خطهای کامل، همان خطهای برش است.

۱۶۲. جواب مسأله درشکل داده شده است، خطهای‌تقسیم وحاشیهٔ‌های منگوله‌دوزی شده، در آن بخوبی مشخص شده است.



مربوط به مسألهٔ ۱۶۲

۱۶۳. استادکار، ابتدا ملاحظه کرد که نمونهٔ تخته‌ها، شکلهایی متقارن هستند و هرکدام دو محور تقارن دارند. سپس او کشف کرد که اگر نیمی از محور طولی سوراخ (روی شکل OA) را روی محور عرضی آن



مربوط به مسألهٔ ۱۶۳

قراردهد ($OO_1=OA$ و $OO_2=OA$) و نقطه‌های O_1 و A، همچنین O_2 و A را با خط راست به‌هم وصل کند، هرکدام ازشکلهای BO_1B_1 و CO_1C_1 ، ربع دایره‌های کاملی به شعاع مساوی O_2B هستند؛ همچنین شکلهای ABC و $A_1B_1C_1$ ، ربع دایره‌هایی به شعاع مساوی A_1B_1 (که درست نصف شعاع O_1B_1 است) می‌باشند.

استادکار هر یك از تخته‌ها را روی خطهای BA ، CA ، B_1A_1 ، C_1A_1 برید و از ۸ قطعه‌ای‌که بدست‌آمد، تختهٔ گرد کاملی برای روی میز ساخت (آنطورکه درشکل صفحهٔ قبل‌دیده می‌شود).

۱۶۴. ABC را شکل تکه خزی فرض کنید که می‌خواهیم با حفظ شکل،آنرا «پشت و رو» کنیم (شکل را ببینید). BD را عمود برAC رسم می‌کنیم. اگرE و F وسط ضلعهای BC و AB باشند ، خز دوز باید قطعهٔ ABC را روی خطهای DE و DF ببرد و قطعه‌های بدست آمده را روی ضلعهای مقابل قطعهٔ باقیمانده قرار دهد و دوباره بدوزد. در اینصورت مثل اینست‌که قطعه خزABC را «پشت و رو» کرده باشیم. این مطلب را می‌توان دقیقاً ثابت کرد.

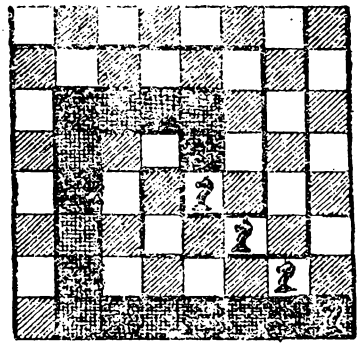
مربوط به مسألهٔ ۱۶۴

روشن است‌که در مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر مساوی‌نصف وتر است. DF و DE میانه‌های وارد بر وتر درمثلثهای ADB وBDC هستند ، بنابراین $DF=AF=FB$ و $DE=BE=CE$. از آنجا دو مثلث FBE و FDE برابر و مثلثهای AFD و DEC متساوی‌الساقین می‌شوند. یعنی، اگر مثلثهای متساوی الساقین AFD و DEC را دور ارتفاعهای آنها، و چهارضلعی FBED را دور FE دوران دهیم، هرکدام ازاین شکلها برجای قبلی و وضع قبلی خودش قرار می‌گیرد.

این مسأله را با روشهای دیگری هم می‌توان حل کرد. راهی راکه در اینجا آورده‌ایم، ساده‌ترین و باصرفه‌ترین آنهاست.

۱۶۵. درشکل صفحهٔ‌بعد، خطهای‌کلفت‌تر، روش‌تقسیم را باتوجه‌به

شرطهای مسأله، نشان می‌دهد. هرکدام از این قسمتها، حرف C را به خاطر می‌آورد. برای روشنی وضع، یکی از قسمتها را هاشور زده‌ایم.

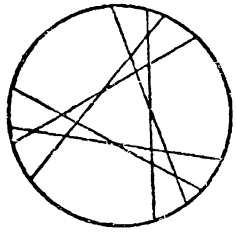


مربوط به‌مسألهٔ ۱۶۵

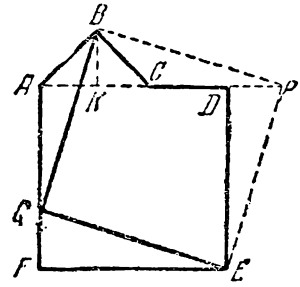
۱۶۶. برای اینکه به حداکثر تعداد تقسیمها برسیم، باید خطهای راست را طوری رسم کردکه هرکدام ازآنها همهٔ خطهای دیگررا قطع کند، و ضمناً دریك نقطهٔ برخورد، بیش از دو خط به‌هم نرسیده باشند.

یکی از جوابهای ممکن را در شکل داده‌ایم، که خطهای راست در آن بـه صورت متقارن زیبایـی قرار گرفته‌اند.

و همانطورکـه می‌بینید، تعداد، قسمتهای سطح دایـره، دراین حالت مساوی ۲۲ است.



مربوط به مسألهٔ ۱۶۶



مربوط به مسألهٔ ۱۶۷

۱۶۷. راه تقسیم، شبیه راه‌حلی است‌که در مسألهٔ متن دیدیم (صفحهٔ ۱۳۸ را ببینید). نقطهٔ K وسط AC را پیدا می‌کنیم. روی FA ، پاره‌خط FQ را مساوی AK و در امتداد CD، پاره‌خط DP را مساوی AK جدا می‌کنیم.

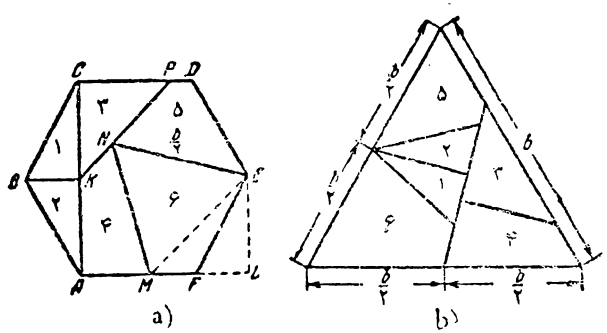
حالا شکل را روی خطهای‌راست BQ و QE می‌بریم. از قطعه‌هایی

که بدست می‌آید، مربع BPEQ درست می‌شود. خودتان مربع بودن این شکل را ثابت کنید.

اگر مثلث ABC را بزرگتر بگیریم، طوری که رأس C از مثلث، بر رأس D از مربع منطبق شود، یاحتی رأس C در امتداد AD قرار گیرد (به شرطی که AC ازدو برابر AD کوچکتر باشد)، راه حل مسأله‌تفاوت نمی‌کند؛ تنها شرطی‌که برای این راه‌حل لازم است، اینست‌که مثلث ABC قایم‌الزاویه و متساوی‌الساقین باشد.

۱۶۸. برای تبدیل شش‌ضلعی منتظم ABCDEF به مثلث متساوی‌الاضلاع، به‌ترتیب چنین عمل می‌کنیم: AC را وصل می‌کنیم، سپس BK را عمود بر AC و EL را عمود بر AF فرود می‌آوریم، LM را مساوی LE جدا می‌کنیم، EM را وصل می‌کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع EMN را بـه ضلع مساوی EM می‌سازیم، و بالاخـره KN را امتداد می‌دهیم تا CD را در P قطع کند.

اگر این ترسیمها را بادقت انجام داده باشید، باید CP و CK باهم مساوی شوند.



مربوط به مسألهٔ ۱۶۸

در شکل a ، خطهایی که بایـد شش ضلعی درطول‌آنها بریـده شود، کامل و خطهای‌کمکی نقطـه‌چین رسم شده است. در شکل b ، نشان داده شده است که چگونه می‌توان ازقسمتهای شش‌ضلعی، مثلث متساوی‌الاضلاع را ساخت.

روی یك مقوا یا کاغـذ کلفت، شش‌ضلعی را رسم کنید و سپس آنـرا

به‌ترتیبی که گفتیم به‌شش قطعه تقسیم کنید، آنگاه می‌توانید این قطعه‌هارا جلو دوستان خود بریزید و معمایی طرح کنید: از این قطعه‌ها می‌توان هم شش‌ضلعی منتظم و هم مثلث متساوی‌الاضلاع درست کرد!

کسانی‌که علاقمند هستند، خود درستی این ساختمان را ثابت‌کنند.

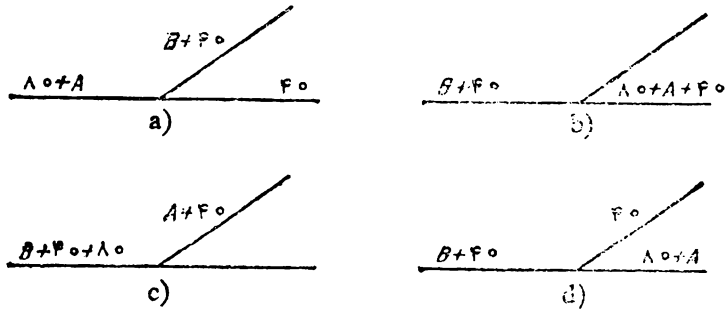
بخش پنجم

۱۶۹. بنابر عددهایی‌که صفحهٔ رادار نشان می‌دهد، هدف در ۷۵ کیلومتری ایستگاه A و ۹۰ کیلومتری ایستگاه B است.

پرگاری برمی‌داریم و با مقیاسی‌که در وسط شکل صفحهٔ ۱۴۱ قرار دارد، آنرا به اندازهٔ ۷۵ باز می‌کنیم و به مرکز A قوسی در دریا رسم می‌کنیم، سپس به‌مرکز B و شعاع مساوی ۹۰، قوس دیگری رسم‌می‌کنیم، تا قوس اول را قطع‌کند. نقطهٔ برخورد این دو قوس، محلی است‌که هدف قرار گرفته است.

۱۷۰ ۱) شش برش؛ ۲) ۲۷ مکعب؛ ۳) هیچ ۴) هشت، به تعداد رأسهای مکعب؛ ۵) دوازده، به تعداد یالهای مکعب؛ ۶) شش، به تعداد وجه‌های مکعب؛ ۷) یکی.

۱۷۱. برای اینکه قطارهای با لکوموتیوهای A و B را ازکنار هم عبور دهیم، باید به این ترتیب عمل کنیم (شکل را ببینید):



مربوط به مسألهٔ ۱۷۱

a) لکوموتیو B را با ۴۰ واگن به‌سمت چپ می‌بریم وآنها را داخل خط فرعی می‌کنیم (بقیهٔ ۴۰ واگن هنوز در خط سمت راست قرار دارند).

b) لکوموتیو A با ۸۰ واگـن خود بـه خط سمت راست می‌رود و پهلوی ۴۰ واگن باقیماندهٔ لکوموتیو B قراو می‌گیرد، سپس لکـوموتیو B با ۴۰ واگن خود، از خط فرعی به خط سمت چپ می‌رود.

c) لکوموتیو A با ۱۲۰ واگنی‌که درکنارآنست به‌طرف چپ‌می‌آید، ۸۰ واگن خود را درسمت چپ می‌گذارد و با ۴۰ واگن (که متعلق بـه B بود) داخل خط فرعی می‌شود.

d) لکوموتیو A از خط فرعی بیرون می‌آید، ۸۰ واگن خـود را برمی‌دارد و به‌طرف راست راه خود را ادامه می‌دهد.

لکوموتیو B با ۴۰ واگن به طرف خط فرعی می‌رود، ۴۰ واگنی راکه در خط فرعی است به‌خود می‌بندد و به طری چپ، راه خود را ادامه می‌دهد.

۱۷۲. حل‌مسأله را به صورتی‌که لکوموتیوران‌آنرا حل کرده است، می‌توان به ترتیب زیر داد (شکل صفحهٔ بعد را ببینید). برای سهولت‌کار، واگنهای‌سفید و قرمز را به‌ترتیب باحرفهای a و b و لکوموتیو را باحرف n مشخص می‌کنیم:

۱) لکوموتیو به BD می‌رود، در آنجا واگن a را به‌خود می‌بندد و با آن به‌طرف بن‌بست D می‌رود؛

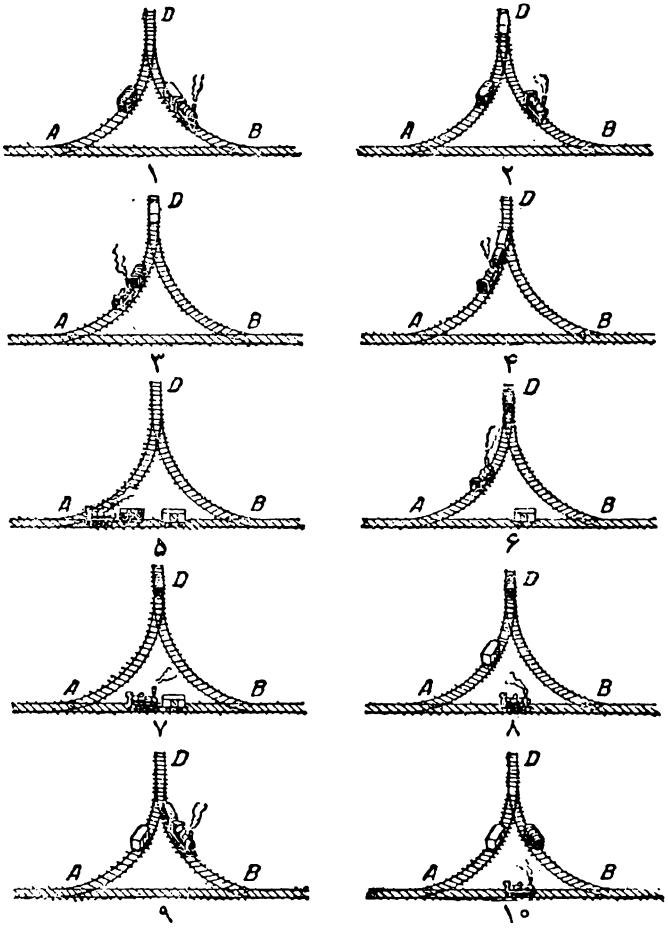
۲) واگنa را دربن‌بست D می‌گذارد وخودش به AB برمی‌گردد؛

۳) لکوموتیو از BA بـه AD می‌رود، درآنجا واگن b را به‌خود می‌بندد و با آن به‌طرف بن‌بست D می‌رود؛

۴) درآنجا، واگن a را به‌خود می‌بندد وبا واگن‌های a و b به AB می‌رود؛

۵) واگـن a را روی AB باقـی می‌گذارد و با واگن b بـه AD می‌رود؛

۶) b را در بن‌بست D می‌گذارد و خـود لکوموتیو به AB بـرـ می‌گردد؛



مربوط به مسألهٔ ۱۷۲

۷) واگن a را به‌خود می‌بندد و با آن به AD می‌رود؛

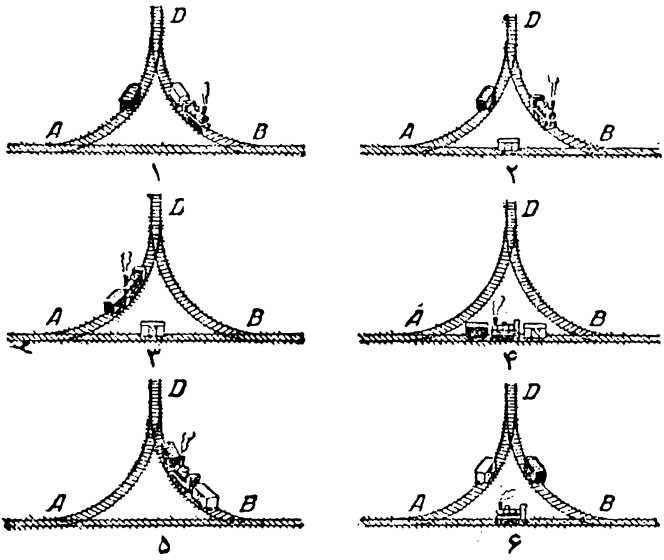
۸) a را در AD می‌گذارد و از طریق AB به BD می‌رود؛

۹) b را به‌خود می‌بندد و آنرا به BD می‌آورد؛

۱۰) b را در BD باقی می‌گذارد و خودش به AB برمی‌گردد.

خودتان راه‌حلهای دیگری‌هم می‌توانید پیدا کنید. مثلاً، من دو راه حل دیگر مسأله را با ۱۰ حرکت پیدا کرده‌ام.

حل مسأله با ۶ حرکت (شکل‌را ببینید):



مربوط به مسألهٔ ۱۷۲

۱) لکوموتیو بـه BD می‌رود، a را بـه خود می‌بندد و با آن بـه AB می‌آید؛

۲) a را در AB می‌گذارد و ازطریق بن‌بست D به AD می‌رود؛

۳) واگن b را به خود می‌بندد و با آن به AB می‌آید؛

۴) واگن a را هم به خود می‌بندد و بـا واگنهای a و b بـه BD می‌رود ؛

۵) واگن b را در BD باقی می‌گذارد و از طریق AB بـه AD می‌رود ؛

۶) واگن a را در AD می‌گذارد و خود به AB برمی‌گردد.

البته متوجه شده‌اید که دراین حالت، دودکش لکوموتیو به‌طرف‌چپ قرار می‌گیرد. احتمالاً لکوموتیوران هم به‌همین علت، مشکل خـود را در ۱۰حرکت حل‌کرده‌است، چون نمی‌خواسته است‌که جهت دودکش لکوموتیو

خود را عوض کند.

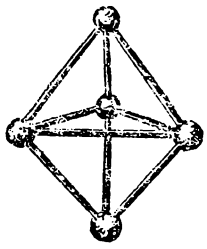
۱۷۳. توزین اول : گندمها را بـه دوقسمت مساوی تقسیم می‌کنیم (که بدون استفاده از وزنه‌ها ممکن‌است)، در هرقسمت ۴/۵ کیلوگرم گندم خواهیم داشت.

توزین دوم : یکی از دوقسمت گندم را دوبـاره بـه دوقسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، هرقسمت ۲/۲۵ کیلوگرم .

توزین سوم : ازیکی از قسمتهای اخیر، به‌کمك وزنه‌هایی که داریم، ۲۵۰ گرم کم می‌کنیم، ۲ کیلوگرم باقی می‌ماند.

۱۷۴. به‌ترتیبی‌که تسمه‌ها درشکل صفحهٔ ۱۴۵ قرارگرفته‌اند،حرکت چرخها ممکن است؛ ضمناً وقتی‌که چرخ A درجهت حرکت عقربه‌های‌ساعت حرکت‌کند، چرخ B در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت و چـرخهای C و D، درهمان جهت حرکت عقربه‌های ساعت، حرکت خواهند کرد.

وقتی هم کـه هرچهار تسمه را بـه صورت متقاطع قرار دهیم، حرکت ممکن است، ولی اگر یکی یا سه تـا از تسمه‌ها را (هرکدام که باشند) بـه صورت متقاطع وصل کنیم ، حرکت ممکن نیست.



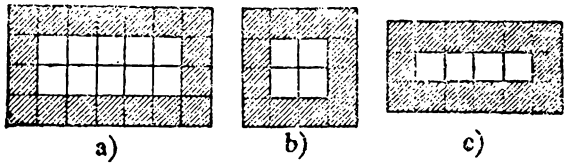
مربوط به مسألهٔ ۱۷۵

۱۷۵. بدون خـارج شدن از صفحه، یعنی مثلاً درست‌کـردن ۷ مثلث روی سطح‌میز، بـا ۹ چوب‌کبریت، ممکن نیست.

ناگزیر باید شکل را به صورت فضایی‌ساخت به‌صورت دوهرم، با قاعده‌های مشترك، به نحوی که درشکل نشان داده شده است.

۱۷۶. دختر دانش‌آموز، ابتدا مستطیل دلخواهی‌که طول و عرض‌آن عددهای صحیحی باشند، اختیار و آنرا بـه مربعهای به‌ضلع واحـد، تقسیم می‌کند(شکل‌صفحهٔ‌بعد را ببینید). حالاحاشیه‌ای به‌عرض یك‌مربع، دورتادور این‌مستطیل درنظر می‌گیرد (درشکل a، این‌حاشیه، هاشور زده شده است).

مساحت ایـن حاشیه، قسمتی ازمساحت مستطیل است، ولـی تعداد مربعهای واحدی‌که درایـن حاشیه قـرارندارد، همیشه ۴ واحدکمتراز عـدد



مربوط به مسألهٔ ۱۷۶

محیط مستطیل است. بنابراین، تعداد مربعهای داخلی (که درشکل a هاشور نخورده است) باید درست مساوی ۴ باشد.

این‌قسمت داخلی، خود یك‌مستطیل است، ولی ۴ مربع واحد را تنها به دوطریق می‌توان به‌صورت مستطیل درآورد (قسمتهای هاشور نخورده در شکلهای b و c). به‌این ترتیب برای مسأله، دوجواب پیدا می‌شود:

۱) مربع ۴×۴،

۲) مستطیل ۳×۶ .

حل جبری مسأله، منجر به‌حل یك‌معادلهٔ سیال دو مجهولی می‌شود. اگر طول و عرض مستطیل را x و y فرض کنیم، محیط آن مساوی ۲(x+y) و مساحت آن مساوی xy خواهد بود و بنابر فرض باید داشته باشیم :

$$۲(x+y)=xy$$

اگر x و y بتوانند هرعدد دلخواه باشند، این‌معادله بی‌نهایت‌جواب دارد، ولی اگر جوابهای طبیعی معادله را جستجوکنیم، تنها سه‌جواب بدست می‌آید:

$$x=۴, \quad y=۴$$

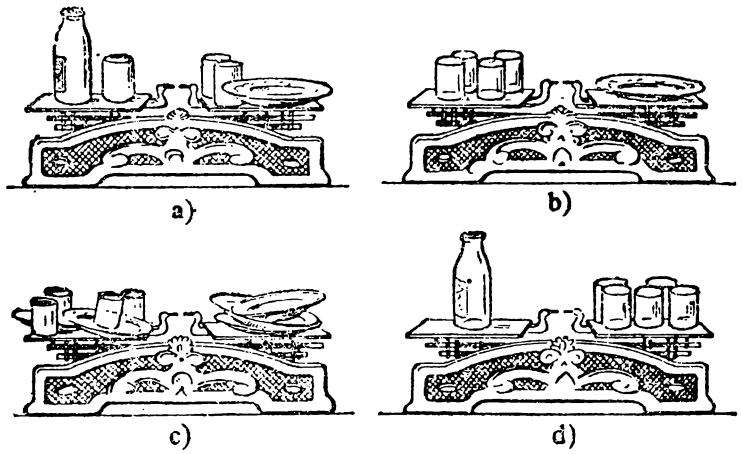
$$x=۶, \quad y=۳$$

$$x=۳, \quad y=۶$$

که از جهت مفهوم هندسی، دوجواب آخر، یکی هستند.

۱۷۷. باید همهٔ شرطهای مسأله را به‌خاطر داشته باشیم (شکل، در صفحهٔ۱۴۶). از شکل a درصفحهٔ ۱۴۶ شروع می‌کنیم، که ازآن معلوم

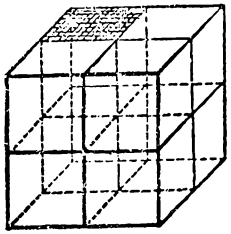
می‌شود، بطری ولیوان رویهم به‌اندازهٔ پارچ وزن دارند. درکفهٔ چپ‌ترازو (در شکل b صفحهٔ ۱۴۶)، یك بطری و درکفهٔ راست‌آن بشقاب و لیوان است. به‌هریك از دوکفه، یك لیوان اضافه می‌کنیم، روشن است که تعادل ترازو به‌هم نمی‌خورد. بنابراین یك بطری و یك‌لیوان، با یك بشقاب و دو لیوان، هم وزن است (شکل a درهمین صفحه). بـه‌این ترتیب (ازمقایسهٔ شکلa درصفحهٔ۱۴۶ وشکل a درهمین‌صفحه) معلوم می‌شودکه پارچ،وزنی مساوی یك‌بشقاب و دولیوان دارد. ولی چون دوپارچ به‌اندازهٔ سه بشقاب



مربوط به مسألهٔ ۱۷۷

وزن دارد (شکل c درصفحهٔ۱۴۶)، بنابراین، وزن ۳ بشقاب برابر است با وزن دوبشقاب و۴ لیوان (شکلb در همین صفحه)، که اگر۲ بشقاب را از دو طرف‌کم‌کنیم، روشن‌می‌شودکه وزن یك‌بشقاب برابراست‌با وزن۴ لیوان (شکل c درهمین صفحه). حال به شکل b درصفحه ۱۴۶ برمی‌گـردیم. به جای یك بشقاب می‌توانیم ۴ لیوان بگذاریم ؛ ۵ لیوان هم وزن یك بطری می‌شود (شکـل d درهمین صفحه)،که ضمناً جواب مسأله است: بطری پنج برابر لیوان وزن دارد. البته، ضمناً روشن می‌شود کـه هرپارچ، ۶ بـرابـر لیوان وزن دارد.

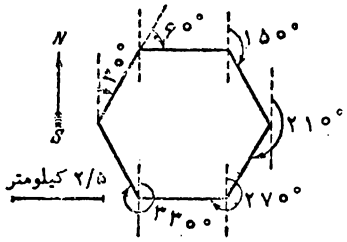
اگـر می‌خواستید از جبر استفاده کنید، می‌توانستید، مسأله را بـه کمك یك دستگاه معادله‌های درجه اول، حل‌کنید.



مربوط به مسألهٔ ۱۷۸

۱۷۸. استادکار، هرمکعب‌را به ۸ مکعب مساوی تقسیم‌کرد (شکل را ببینید). سطح‌جانبی هرمکعب کوچك، یکچهارم مکعب اصلی، ولی تعداد آنها ۸ برابرتعداد مکعبهای‌قبلی می‌شود، بنابراین مساحت‌کلی وجه‌های همهٔ مکعبها، دو برابر می‌شود.

۱۷۹. مـا در شیشهٔ پراز ساچمـه ، آب ریختیم تا پرشود. آب فاصلهٔ بین ساچمه‌ها را پرکرد. حالا حجم ساچمه‌هابه اضافهٔ حجمی آبی‌که درآن ریخته‌ایم، همان حجم شیشه است. ساچمه‌هـا را از شیشه خارج کردیم تـا حجم آب معلوم شود. حجم آب را از حجم کل شیشه کم کردیم، حجم ساچمه‌ها بدست آمد.

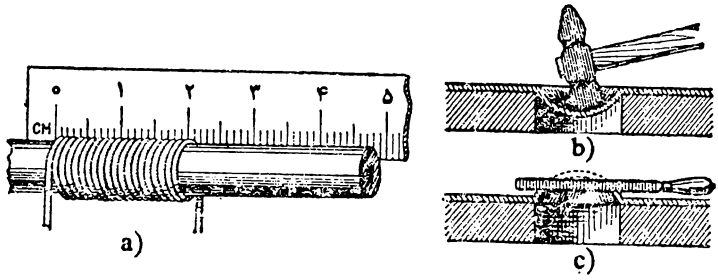


مربوط به مسألهٔ ۱۸۰

۱۸۰. مسیر حرکت گروهبان روی یـك شش‌ضلعـی منتظم است و همانطورکه از شکل می‌بینید، دوباره به همان نقطهٔ اول، برمی‌گردد.

۱۸۱. قبل ازآنکه پرگـار را از استوانـه جـدا کنیم، لبهٔ خط‌کش را روی سطح استوانه قرارمی‌دهیم، به نحوی‌که به ضلعهای پرگارتکیه‌کرده باشد. این نقطه‌های ضلعهای پرگار را با مداد علامت می‌گذاریم وفاصلهٔ بین‌آنها را، که از روی خط‌کش معلوم می‌شود، به‌خاطر می‌سپاریم، سپس پرگار را ازاستوانه جدا می‌کنیم ودوباره بـه وضعی در می‌آوریم کـه فاصلهٔ بین علامتهایـی کـه روی ضلعهای آن گذاشته‌ایم ، مساوی همان انـدازهٔ قبلی شود و بعد فاصلهٔ بین دو نـوك ضلعهای پرگار را اندازه می‌گیریم.

۱۸۲. اگریك تکه سیم را محکم دور یك میله، مثلاً میخ یا مداد ، بپیچیم (شکل a درصفحهٔ بعد)، آنوقت‌می‌توان قطر مقطع‌آنرا به‌کمك خط‌کش مدرج بدست‌آورد.



مربوط به مسألهٔ ۱۸۲

مثلاً، اگر ۲۰ حلقهٔ سیم، ۶ میلیمتر بشود، دراینصورت قطر مقطع سیم، مساوی ۰/۳ میلیمتر خواهد بود.

برای اینکه سوراخ گردی روی صفحهٔ نازك‌آهنی بـه وجـودآوریم، ابتدا صفحهٔ آهن را روی تکیه‌گاهی‌قرار می‌دهیم که سوراخ مستطیل شکل، یا بهتر است گرد، داشته‌باشد، سپس باضربهٔ چکش، قسمتی از صفحه راداخل سوراخ تکیه‌گاه فرومی‌بریم تا به‌صورت کاسه‌ای‌درآید (شکلb)، سپس‌صفحه را برمی‌گردانیم تا طرف فرو رفتهٔ آن به‌طرف بالا قرارگیرد و لبه‌های خم شدهٔ آنرا سوهان می‌زنیم تا جدا شود (شکل c)،

۱۸۳ هیچ اختراعی نمی‌تواند صرفه‌جویی ۱۰۰٪ را درسوخت تأمین کند، زیرا انرژی نمی‌تواند از «هیچ» به‌وجود آید. تنها همین مطلب، نشان می‌دهدکه محاسبهٔ همشهری مـا ، بدون مطالعه و دقـت انجام گرفته است.

اگر استفاده از یك اختراع، صرفه‌جوئی مشخصی را بـدون ارتباط با سایر اختراعها می‌دهد، استفادهٔ همزمان از هرسه اختراع باعث صرفـه‌جویی بیشتری نسبت به‌استفادهٔ ازتك‌تك‌آنها خواهد شد، والبته نه‌اینکه‌صرفه‌جویی ۱۰۰٪ را تأمین کند.

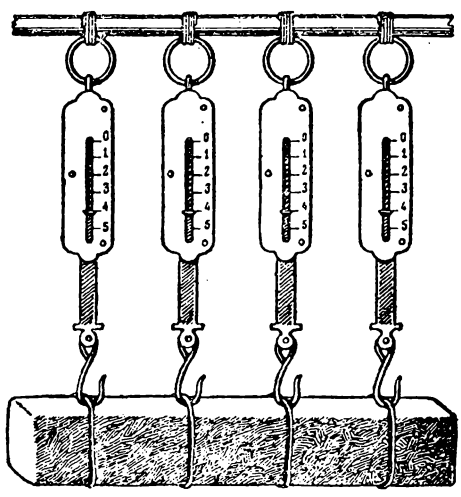
محاسبه‌را باید به‌این ترتیب انجام داد: فرض‌کنید پیش ازبهره‌برداری از اختراعهـا، ۱۰۰ کیلوگـرم سوخـت مصرف شود. بعد ازبهره‌گیری از اختراعی‌که ۳۰٪ در سوخت صرفه‌جوئی می‌کند، ۷۰ کیلوگرم سوخت لازم است.

اختراع دوم ۴۵٪ از ۷۰ کیلوگرم را صرفه‌جویی می‌کند، یعنی به اندازهٔ ۰/۵۵ × ۷۰ ، یعنی $۳۸\frac{۱}{۲}$ کیلوگرم سوخت مصرف می‌شود. اختراع بعدی ۲۵٪ از $۳۸\frac{۱}{۲}$ کیلوگرم را صرفه‌جویی می‌کند و بنابراین، مقدار مصرفی سوخت، برابر با ۰/۷۵ × $۳۸\frac{۱}{۲}$ ، یعنی $۲۸\frac{۷}{۸}$ کیلوگرم می‌شود. همهٔ صرفه‌جویی سوخت برابر $۲۸\frac{۷}{۸}$ — ۱۰۰ ، یعنی $۷۱\frac{۱}{۸}$ کیلوگرم، یعنی $۷۱\frac{۱}{۸}$٪ خواهد بود .

می‌توان ردیف استفاده از اختراعها را عوض کرد و مثلاً ابتدا از ۴۵٪ صرفه‌جویی، سپس از ۳۰٪ وآخر از ۲۵٪ استفاده کرد و یا به‌هرترتیب دیگر؛ نتیجهٔ کل درهرحال یکی خواهد بود. خودتان آزمایش کنید.

در حالتی که استفاده ازیك اختراع بستگی به‌استفاده از بقیهٔ اختراعها داشته باشد، دراینصورت استفاده ازهرسه اختراع، شبیه استفاده از حالت صرفه‌جویی بیشتر می‌شود، یعنی در مسألهٔ ما برابر ۴۵٪.

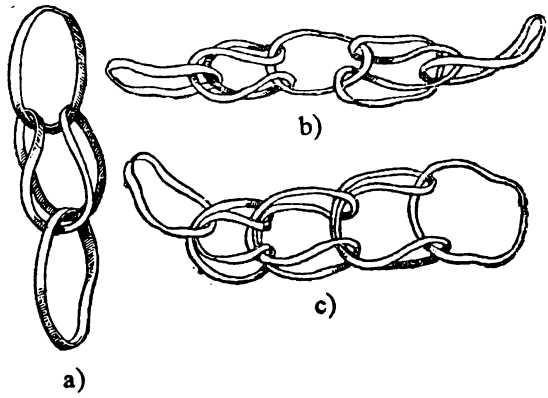
۱۸۴. باید تیرچوبی را به قلابهای چهار نیروسنج فنری آویزان کرد



مربوط به مسألهٔ ۱۸۴

(شکل‌را ببینید). هریك ازقلابها ، متحمل قسمتی از وزن تیر چوبی‌می‌شود و بنابراین مجموع همهٔ وزنها، وزن تیرچوبی را معین می‌کند. شکل نشان می‌دهد که وزن تیرچوبی مساوی ۱۶ کیلوگرم است.

۱۸۵. در شکلهای a ، b ، c ، به‌ترتیب جواب مسأله‌های ۱، ۲و۳ داده شده است.

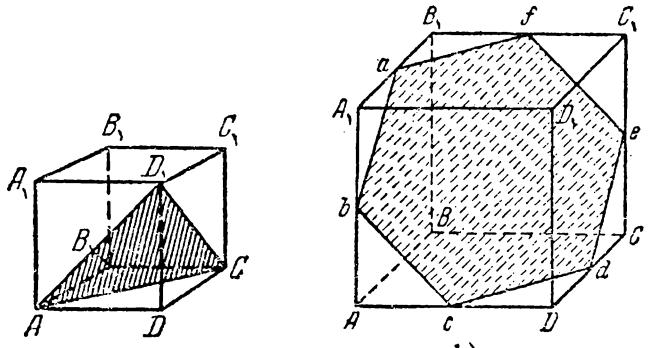


مربوط به مسألهٔ ۱۸۵

۱۸۶. ۱) از مقطع‌مکعب، نمی‌توان یك‌پنج‌ضلعی منتظم بدست‌آورد. در واقع، برای بدست‌آوردن یك‌پنج‌ضلعی منتظم، باید صفحهٔ قاطع، پنج‌وجه از شش وجه مکعب را قطع کند. ولی وجه‌های یك مکعب، دو به دو متوازی‌اند و بنابراین، در مقطع باید شکلی بدست آید که ضلعهای موازی هم داشته باشد (اگر دوصفحهٔ متوازی را به وسیلهٔ یك صفحه قطع‌کنیم، خطهای فصل مشترك باهم موازی می‌شوند)، که درپنج ضلعی منتظم‌وجود ندارد .

۲) اگر از سه‌رأس مکعب، مثل رأسهای D_1 ، A و C ، صفحه‌ای عبور دهیم (شکل a صفحهٔ بعد) ، روشن است که مثلث متساوی الاضلاع AD_1C بدست‌می‌آید، زیرا ضلعهای‌آن،قطرهای AD_1، AC و D_1C از مربعهای مساوی هستند.

مثلث متساوی‌الاضلاع، تنها، درمقطع AD_1C بدست نمی‌آید،بلکه از مقطع موازی‌آن A_1BC_1 هم یك‌مثلث متساوی‌الاضلاع حاصل می‌شود؛ همچنین از هرمقطع موازی آنها، به‌شرطی‌که بین‌آنها واقع نباشد.

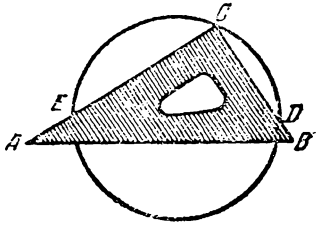


مربوط به مسألهٔ ۱۸۶

خودتان روشن کنیدکه اگر مقطع مکعب را، با صفحه‌ای‌که با دو صفحهٔ AD_1C و A_1BC_1 متوازی و بین‌آنها قرار دارد، بدست آوریم،چه شکلی می‌شود؟

برای اینکه در مقطع مکعب، یك شش‌ضلعی منتظم بدست‌آوریم،باید صفحه‌ای از نقطه‌های a ، b ، c ، d ، e و f ، وسط یالهای A_1B_1 ، AA_1 ، AD ، DC ، CC_1 و B_1C_1 بگذرانیم (شکل b). با استفاده از وسط یالهای دیگر، می‌توان شش ضلعیهای منتظم دیگری بدست‌آورد (رویهم ۴ تا)، ولی همهٔ آنها با هم برابرند.

۳) صفحهٔ قاطع، هر یال مکعب را دربیش از یك‌نقطه نمی‌تواند قطع کند، و مکعب هم رویهم دارای ۶ یال است. بنابراین در مقطع مکعب به وسیلهٔ یك صفحه، نمی‌توان چند ضلعی بدست‌آوردکه بیش از ۶ ضلع داشته باشد.



مربوط به مسألهٔ ۱۸۷

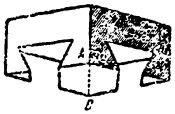
۱۸۷. گونیا را روی دایره‌قرار می‌دهیم، به‌نحوی‌که‌رأس C از زاویهٔ قائمهٔ آن ، در نقطه‌ای از محیط دایره قرارگیرد ، سپس نقطه‌های D و E ،

محل برخورد ضلعهای زاویهٔ C با دایره را علامت می‌گذاریم. پاره خط DE ، یکی از قطرهای دایره است (شکل را ببینید).

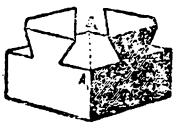
به‌همین‌ترتیب، قطر دیگری ازدایره را بدست‌می‌آوریم. محل‌برخورد این دوقطر، مرکز دایره خواهد بود.

۱۸۸. چون هردوجعبه به‌شکل مکعب هستند، دریکی از جعبه‌ها در هرردیف، سه‌گلوله و در دیگری، چهار ردیف‌گلوله وجود دارد. جعبه‌ها یالهای مساوی دارند و بنابراین قطر هرگلولهٔ بزرگتر $\frac{۴}{۳}$ قطر هرگلولهٔ کوچکتر است، و در نتیجه‌حجم و وزن آن $\frac{۶۴}{۲۷}$ حجم یا وزن گلولهٔ‌کوچکتر (زیرا حجم یا وزن گلوله، متناسب با مکعب قطرآنست).

به این ترتیب، وزن هرگلولهٔ بزرگتر $\frac{۶۴}{۲۷}$ وزن هرگلولهٔ‌کوچکتراست در حالیکه تعداد گلوله‌های بزرگتر $\frac{۲۷}{۶۴}$ تعدادگلوله‌های‌کوچکتراست. و از اینجا نتیجه می‌شود که وزن دو جعبه باهم برابر است.

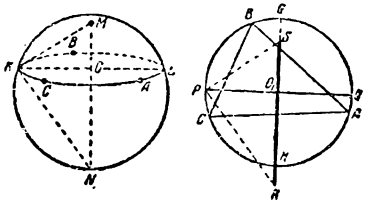


۱۸۹. دو قسمت مکعب، به صورتی‌که در شکل نشان داده شده است، می‌باشد. زاویه‌های A و $A_۱$ و همچنین زاویه‌های B و $B_۱$ قائمه‌اند. قسمتهای مکعب، تنها با حرکت ازگوشه به‌گوشه روی خط AB، از هم جدا می‌شود.



مربوط به مسألهٔ ۱۸۹

۱۹۰. نوك‌پرگار را درنقطهٔ دلخواهی ازکره، مثل M، قرارمی‌دهیم و به شعاع دلخواه، روی سطح‌کره، دایره‌ای رسم می‌کنیم؛ سپس روی این دایره سه‌نقطهٔ دلخواه A،B وC را انتخاب‌می‌کنیم (شکل را ببینید). فاصلهٔ بین این نقطه‌ها را به کمك پرگار معین می‌کنیم ومثلث ABC را روی صفحهٔ کاغذ رسم می‌کنیم



a) b)

مربوط به مسألهٔ ۱۹۰

(شکل b) .

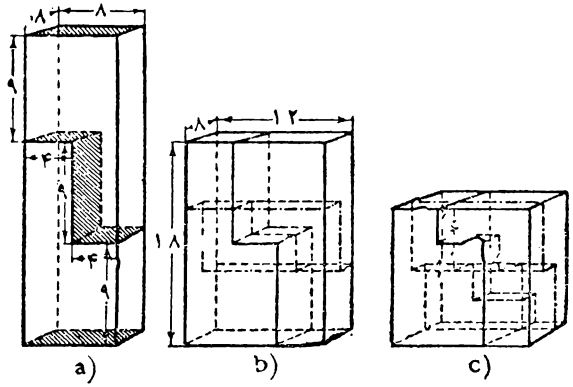
دایـرهٔ محیطی مثلث ABC و دوقطر عمود برهم PQ و GH از این دایره را رسم می‌کنیم:

این دایره، برابراست با دایره‌ای‌که ما روی‌کره رسم‌کردیم وبنابراین $PQ=KL$.

فرض‌کنیدنقطهٔ P روی این‌دایره، متناظربانقطهٔ K از سطح‌کره‌باشد. بـه کمك پرگار، فاصلهٔ KM را معین ، و از نقطهٔ P بـه شعاع مساوی KM، روی GH، نقطهٔ S را علامت می‌گذاریم. از P ، عمودی بر PS رسم می‌کنیم تا امتداد GH را در R قطع‌کند. پاره خط SR ، مساوی‌با قطرکره است.

در واقع، اگـر نقطهٔ K را بـه دوسر قطـر MN وصـل‌کنیم، مثلث قائم‌الزاویهٔ MKN، که به‌این ترتیب بدست می‌آید، با مثلث قائم‌الزاویهٔ SPR برابر است، زیرا داریم: $KM=PS$ و $KO=PO_1$.

۱۹۱. مکعب مستطیل را، آنطورکه درشکل a دیده می‌شود، به‌دو قسمت مساوی‌پله‌ای تقسیم می‌کنیم،ضمناً ارتفاع پله را ۹ سانتیمتر وعرض آنرا ۴ سانتیمتر می‌گیریم.



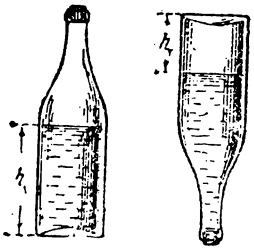
مربوط به مسألهٔ ۱۹۱

قسمت بالایی‌مکعب مستطیل‌را روی پلهٔ‌پایین قرارمی‌دهیم، مکعب‌مستطیل

تازه‌ای‌بدست می‌آیدکه یالهای‌آن به‌ترتیب مساوی۱۲ سانتیمتر، ۸سانتیمتر و ۱۸ سانتیمتر می‌شود (شکل b).

مکعب مستطیلی راکه به‌این ترتیب پیدا می‌شود، دوباره به‌همان ترتیب به دوقسمت پله‌ای‌تقسیم می‌کنیم، ولی این‌بار درجهت عمودبرقسمت قبلی. ارتفاع پله۶ سانتیمتر وعرض‌آن ۴ سانتیمتر می‌شود. بنابراین‌هرقسمت پله‌ای دوباره به دوقسمت، و رویهم تمام مکعب مستطیل به ۴ قسمت، تقسیم می‌شود.

دوقسمت بالایی را جابه‌جا می‌کنیم و روی پلهٔ پایین قرار می‌دهیم، مکعب بدست می‌آید (شکل c).



مربوط به مسألهٔ ۱۹۲

۱۹۲. چون بنابرفرض، کف بطری به‌شکل دایره، مربع یامستطیل است، به‌سادگی می‌توان مساحت آنرا به‌کمك خط‌کش مدرج پیدا کرد. مساحت‌کف بطری را s فرض‌کنیم.

h_1، ارتفاع‌آب‌بطری را اندازه می‌گیریم، دراینصورت، حجم قسمتی ازبطری که آب دارد، مساوی sh_1 می‌شود (شکل را ببینید).

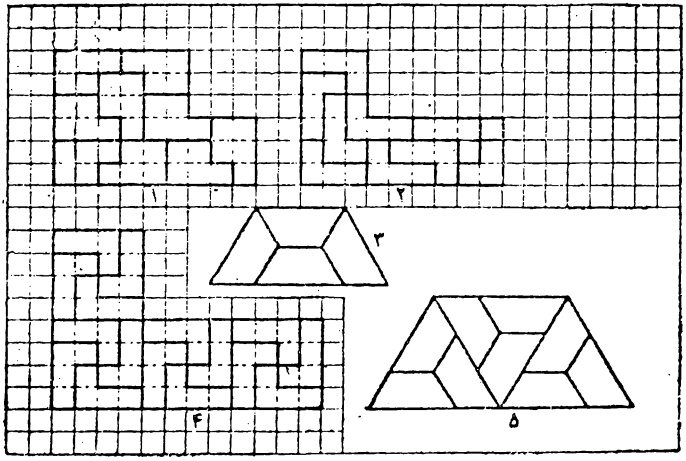
بطری را برمی‌گردانیم، طوری‌که‌کف‌آن به‌طرف بالا قرارگیرد. سپس ارتفاع h_2، از سطح آب تا کف بطری را اندازه می‌گیریم. حجم این‌قسمت بطری هم مساوی sh_2 می‌شود. آن قسمت بطری‌که دراین حالت پرازآب است، همان حجم sh_1 را دارد. بنابراین حجم تمام بطری چنین می‌شود:

$$sh_1+sh_2=s(h_1+h_2)$$

۱۹۳. جوابها درشکل صفحهٔ ۶۱۰ داده شده است.

۱۹۴. ۱. ۳۶.

۱۹۴. ۲. بعضی ازنمونه‌ها، در دوشکل‌اولیه، دراینجا داده شده‌است. برای اینکه، چندضلعی اولیهٔ P را ازمستطیل بدست آوریم، باید مستطیلی بسازیم‌که شامل تعداد زوجی مربع واحد باشد ($ab=2n$)، سپس ازمرکز این مستطیل، دوخط شکسته با دوره‌های شبیه‌هم طوری رسم‌کنیم‌که باهم



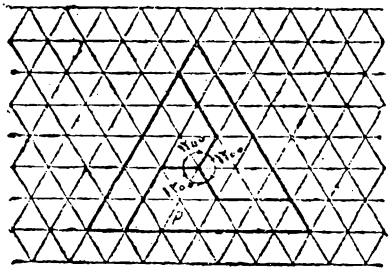
مربوط به مسألهٔ ۱۹۳

زاویهٔ ۱۸۰ درجه تشکیل دهند (شکل d صفحهٔ ۶۱۱). این دوخط شکسته را می‌توان یك خط شکسته به‌حساب‌آورد که نسبت به‌مرکز مستطیل، متقارن باشد. این خط، مستطیل را به دوشکل P تقسیم می‌کند، که درهر کدام ازآنها به اندازهٔ $n=\frac{ab}{۲}$ مربع واحد وجود دارد.

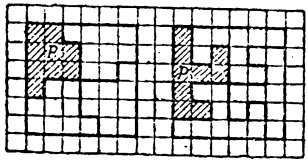
سپس، از مستطیلهای مساوی، به‌سادگی مربع بزرگ، واز مربعهای بزرگ، شکل P' بدست می‌آید.

اگر تعداد مربعهای واحدی راکه درطول یکی‌از ضلعهای مستطیل است، مساوی a ، و تعداد مربعهای واحد درطول ضلع دیگرآنرا، b فرض کنیم، به‌سادگی می‌توان فهمیدکه برای تشکیل یك‌مربع ازاین مستطیلها، لازم وکافی است‌که به‌تعداد $\frac{ab}{m^۲}$ مستطیل انتخاب کنیم ، که درآن m عبارتست از بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دو عدد a و b.

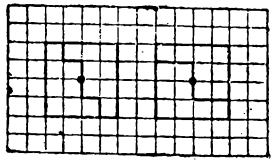
درهرمربع ، به اندازهٔ $\frac{۲ab}{m^۲}$ شکل مساوی P وجود دارد، و درتمام



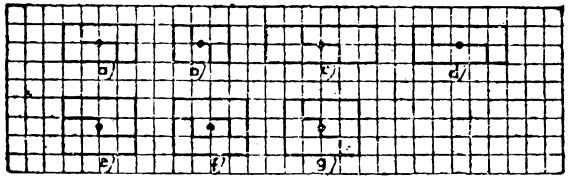
a)



b)



c)



d)

مربوط به مسألهٔ ۱۹۴

شکل P' ، به اندازهٔ $\frac{۲abn}{m^۲}$ از شکل P مصرف‌می‌شود، و اگر به‌جای $۲n$ مساویش ab را قراردهیم، معلوم می‌شودکه برای ساختن‌چندضلعی P' ، به تعداد $\frac{a^۲b^۲}{m^۲}$، از شکل P مصرف می‌شود.

مثلاً، برای ساختن شکل P' ، متشابه با چندضلعی متناظر P، باید:

۱۶ شکل P از a (شکلd) را مصرف‌کنیم،

۳۶ » » » cوb » » » » ،

۱۰۰ » » » d » » » » ،

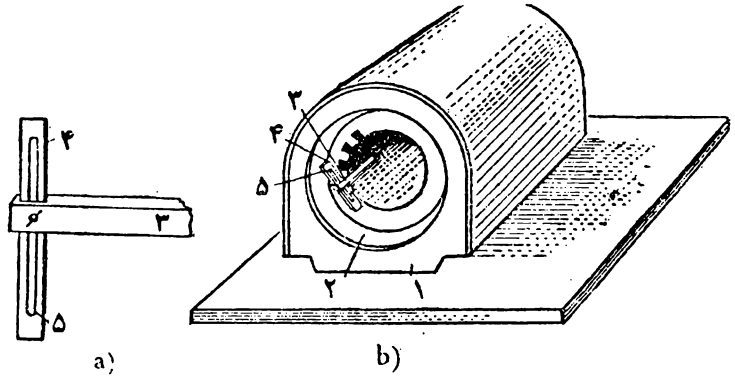
۱۴۴ » » » gوf،e » » » » ،

البته، درهـریك ازاین حالتها، بـرای ساختن شکل P' ، ممکن است بتوان باتعدادکمتری شکل P ، عمل‌کرد، ولی مابه‌این مطلب‌نمی‌پردازیم. شما می‌توانید، به‌عنوان یك سرگرمی جالب، خـودتان با روش آزمایشی، در مورد این مطلب تحقیق کنید.

برای تقسیم مـربع به شکلهای P، می‌توان به‌جای روشی‌کـه درمتن آوردیم، از روشی که برای تقسیم مستطیل دراینجا ذکـرکـردیم، استفاده کنیم، یعنی‌آنرا با یك خط شکسته، که نسبت به مرکز مربع متقارن است، به دوقسمت تقسیم‌کنیم (شکل c صفحهٔ ۶۱۱ را ببینید).

۱۹۵. می‌دانیم‌کـه مقدار یك زاویهٔ داخلـی نه‌ضلعی مساوی ۱۴۰ درجه و مقدار یك زاویهٔ داخلی ده‌ضلعی مساوی ۱۴۴ درجه است؛ بنابراین اگر به‌کمك وسیله‌ای‌که درمتن ذکرکرده‌ایم ، دو زاویه مساوی زاویه‌های داخلی نه‌ضلعی وده‌ضلعی‌طوری رسم‌کنیم‌که‌دریك‌ضلع و راس مشترك‌باشند، زاویه‌ای مساوی ۴ درجه بدست می‌آید. حالا اگـر ایـن‌زاویه‌را ، بـه‌کمك پرگار وخط‌کش. دوبار نصف‌کنیم، زاویه‌ای مساوی یك‌درجه بدست‌می‌آید.

۱۹۶. ایـن یك پیش‌آمـد واقعی است‌کـه درکارخانهٔ «نیروی بـرق» لنینگراد اتفاق افتاده است. نشانه‌گـذار این کارخانـه ، میخائیل پوددویچ بویتسوف، این مسألـهٔ هندسی عملی را به‌سادگی و بـا دقت حل کـرد. او وسیله‌ای به‌شکل T (شکل a) آماده‌کرد. میلهٔ (۳) را دریکـی از شیارهـا قرارداد (آنطورکه درشکل b می‌بینید)، وبا استفاده ازخط‌کش (۴)، نقطه‌ای درلبهٔ قسمت ثابت ، نشانه‌گـذاشت . میخائیل پوددویچ توجه کرد که تعداد شیارها، مضربی است از ۴، بنابراین میلهٔ (۳) را درهر $\frac{۱}{۴}$ تعداد همهٔ شیارها قرارداد وهربار به‌کمك خط‌کش (۴)، نقطه‌ای‌را مشخص‌کرد؛ به این‌ترتیب



مربوط به مسألهٔ ۱۹۶

روی لبه، دو زوج نقطهٔ متقاطر بدست آورد. سپس روی سوراخ، یك‌صفحهٔ چوبی قرارداد وبا وصل‌هردو نقطهٔ‌متقابل‌به‌هم، نقطه‌ای درمحل‌برخوردشان پیدا کرد. این نقطه برمحور سوراخ استوانه‌ای داخلی قراردارد و میخائیل سوزن پرگار را روی‌آن قرارداد و دایره‌ای روی لبه رسم‌کرد. سپس روی محیط این دایره، به تعدادی‌که لازم بود، سوراخهایی روی لبه به وجود آورد تا بتواند به‌کمك‌آنها، سپر را محکم‌کند.

میخائیل پودوویچ بویتسرف، بیش از ۴۰سال به‌عنوان کارگر نشانه‌گذار درکارخانهٔ «نیروی برق» کار می‌کرد و دراین مدت مسأله‌های بسیار زیادی راکه به‌کاربرد ریاضیات درصنعت مربوط می‌شد، حل کرد.

بخش ششم

۱۹۷. چون در ۲۸ سنگ دومینو، هرعدد از ۰ تا ۶، هشت‌بار (یعنی به‌تعداد زوج) تکرار می‌شود، و در داخل زنجیر، هرمربعی درکنار مربع دیگری‌که به‌همان تعداد خال دارد، قرار می‌گیرد، بنابراین، زنجیری‌که با ۵ خال شروع می‌شود، ناچار باید به زوج همان مربع، یعنی مربعی‌که ۵ خال‌دارد، ختم می‌شود.

۱۹۸. **تردستی اول.** از حل مسألهٔ قبل معلوم می‌شودکه همهٔ ۲۸

سنگ دومینو را می‌توان به‌صورت یك‌دایره، بارعایت قاعدهٔ‌بازی دومینو، درآورد. حالا، اگر مثلاً سنگ ۵-۳ را از این دایره جدا کنیم، روشن‌است که یك زنجیر با ۲۷ سنگ باقی‌می‌ماندکه یکطرف آن بـه ۵ خال و طـرف دیگرش به ۳ خال ختم می‌شود.

تردستی دوم. علت را می‌توان به‌سادگی فهمید. تعداد خالهای‌سیزده سنگ دومینو، که درابتدا ازچپ بـه‌راست چیده‌اید، به‌ترتیب مساوی ۱۲، ۱۱، ۱۰، ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ و ۰ است، سپس درسمت راست آنها ۱۲ سنگ را به‌ترتیب دلخواهی گذاشته‌اید، که تعدادی ازآنها (که از ۱۲ تابیشترنیست)، به‌سمت چپ سنگ ۶ — ۶ منتقل شده‌اید. قبل از جابه‌جایی، سنگی که در وسط قرارگرفته است سفید است، یعنی ۰ — ۰ .

حالا فرض کنیدکه درغیبت شما، یکی از سنگها را از سمت راست‌به سمت چپ منتقل کرده باشند. دراین حالت، کدام سنگ در وسط قرارخواهد گرفت؟ روشن است‌که ۱-۰، واین به‌شما خبر می‌دهدکه‌تنها یك سنگ جا‌به‌جا شده است. و اگر دوسنگ جا بـه جا شود، سنگ وسط شامـل دو خال خواهد بود وغیره. به‌طور خلاصه، تعداد خالهای‌سنگ وسط، تعداد جا به‌جایی را به شما می‌دهد.

۱۹۹. سنگهایی که مورد استفاده قرار نگرفته‌اند: ۲ — ۰، ۲ — ۱، ۵ — ۲ و ۲ — ۶ و سنگهایی که‌روی میز گذاشته شده‌اند و مورد بازی قرار گرفته‌اند: ۴ — ۲، ۴ — ۳، ۲ — ۳ و ۲ — ۲ هستند.

بین B ، C و D ممکن است سنگهای دومینو به‌ایـن ترتیب تقسیم شده باشد: برای B : ۱ — ۰، ۳ — ۰، ۶ — ۰، ۵ — ۰، ۶ — ۳، ۵ — ۳، برای C : ۰ — ۰، ۱ — ۱، ۲ — ۲، ۳ — ۳، ۴ — ۴، ۴ — ۳، برای D: ۶ — ۶، ۵ — ۵، ۵ — ۶، ۴ — ۶، ۴ — ۵، ۱ — ۶.

۲۰۰. مسألهٔ اول. ضلع بالا، ازچپ به راست:

۰ — ۶, ۶ — ۴, ۴ — ۱, ۱ — ۱, ۱ — ۳, ۳ — ۳, ۳ — ۴

ضلع طرف راست، از بالا به پایین:

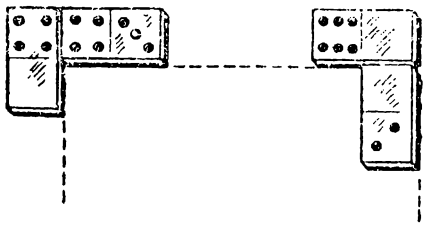
۲ — ۱، ۱ — ۵، ۵ — ۵، ۴ — ۵، ۳ — ۴، ۲ — ۴، ۰ — ۲

ضلع پایین، از راست به چپ:

۲ — ۲، ۲ — ۶، ۶ — ۳، ۳ — ۰، ۵ — ۰، ۳ — ۵، ۲ — ۳

ضلع طرف چپ، از پایین به بالا:

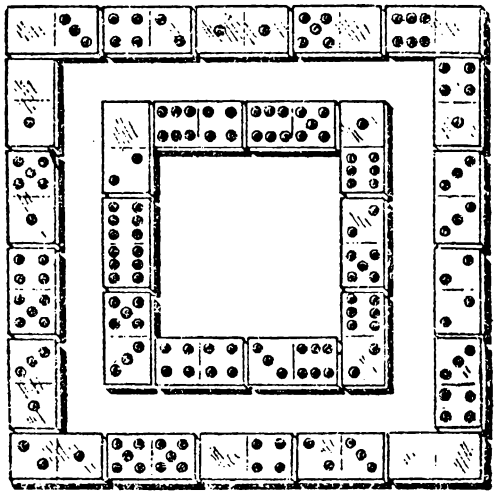
۴ — ۰، ۰ — ۰، ۱ — ۰، ۶ — ۱، ۶ — ۶، ۶ — ۶، ۵ — ۲



مربوط به مسألهٔ اول ۲۰۰

دوگوشهٔ بالای این قاب مربعی، درشکل داده شده است.

۲۰۰. مسألهٔ دوم. این مسأله، جوابهای مختلفی دارد. اگر در رأسهای زاویه‌ها، مربع سفید (بدون‌خال) را قراردهید، می‌توانید این دوقاب داخل هم را طوری بسازیدکه درهریك از ۸ ضلع، ۲۱ خال وجود داشته باشد.



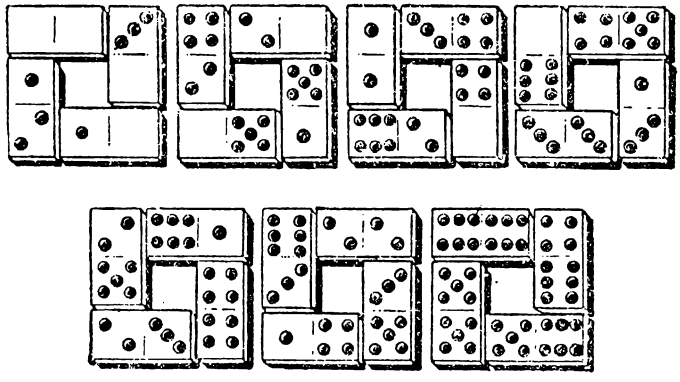
مربوط به مسألهٔ دوم ۲۰۰

اگر مجموع خالهایی‌که در ۸ رأس قرارگرفته‌اند، مساوی ۸ باشد ،

همانطورکه در شکل دیده می‌شود، مجموع خالها در طول هرضلع؛ مساوی ۲۲ خواهد شد. برای اینکه مجموع‌خالهای هرضلع مساوی ۲۳ بشود،باید مجموع خالهای همهٔ ۸ رأس مساوی ۱۶ باشد؛ برای اینکه مجموع‌خالهای هرضلع مساوی ۲۵ باشد، باید مجموع‌خالهای تمام هشت رأس مساوی ۳۲ بود و بالاخره، برای اینکه مجموع خالهای هرضلع مساوی ۲۶ بشود،باید مجموع خالهای هشت رأس دومربع مساوی ۴۰ باشد.

ساختن دوقاب داخل هم باسنگهای دومینو، به‌نحوی‌که مجموع‌خالها درهریك ازهشت ضلع‌آن مساوی ۲۷ باشد، ممکن نیست، زیرا دراینصورت باید مجموع خالهای هشت‌رأس مساوی ۴۸ شود، درحالیکه این مجموع نمی‌تواند بیش از ۴۷ خال باشد. در واقع اگر درهفت رأس، مربع شش‌خال را قرار دهیم، برای رأس هشتم می‌توان حداکثر ازپنج خال استفاده‌کنیم، و دراینصورت مجموع خالهای هشت‌رأس ۵+۷×۶، یعنی ۴۷ خواهد شد.

۲۰۱. جواب مسأله در شکل زیر داده شده است.

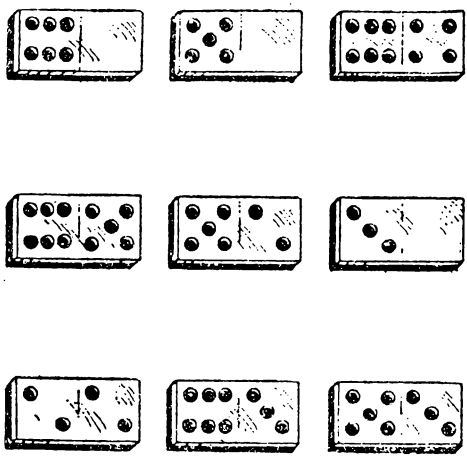


مربوط به مسألهٔ ۲۰۱

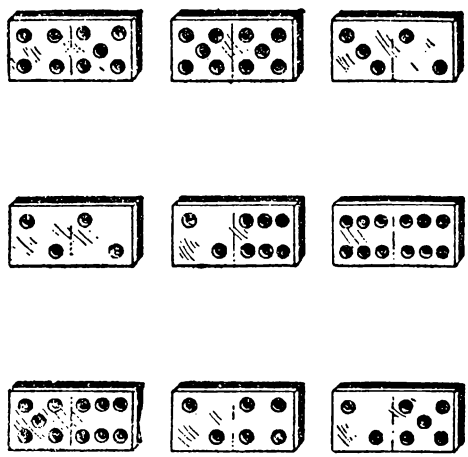
۱.۲۰۲. جواب درشکل صفحهٔ ۶۱۷ داده شده است.

۲.۲۰۲. جواب درشکل صفحهٔ ۶۱۷ داده شده است. مجموع ثابت مربع وفقی مساوی ۲۴ است.

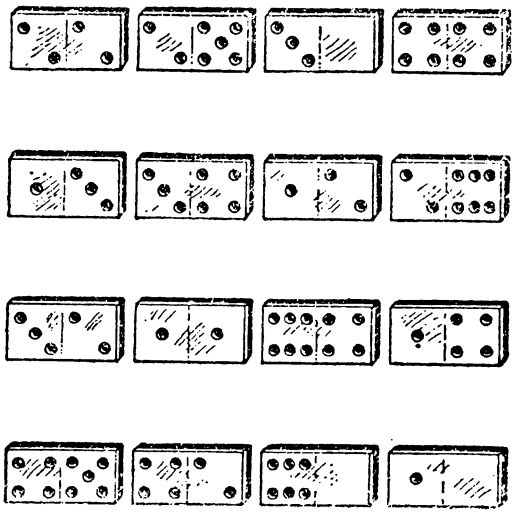
۳.۲۰۲. یکی از جوابهای ممکن در شکل صفحهٔ ۶۱۸ داده شده است.



مربوط به مسألهٔ ۱.۲۰۲



مربوط به مسألهٔ ۲.۲۰۲



مربوط به مسألهٔ ۳.۲۰۲

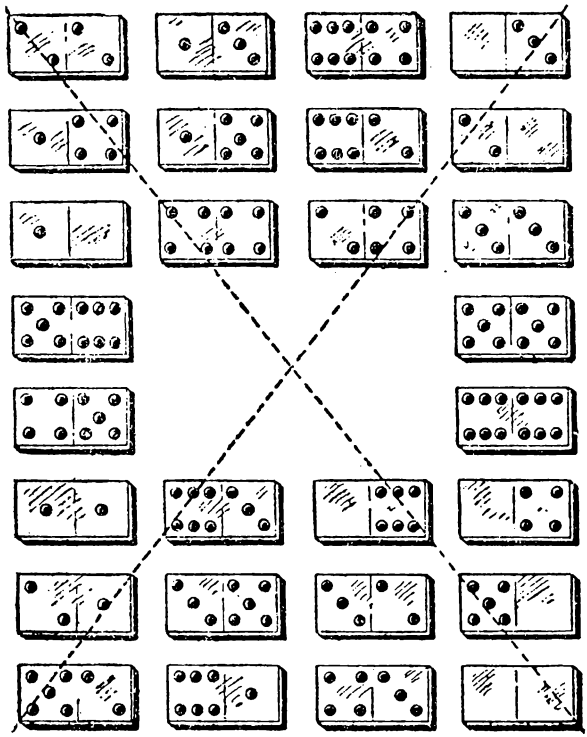
۴.۲۰۲. جواب درطرح زیر داده شده است:

۵—۳	۰—۳	۰—۶	۲—۲	۱—۵
۱—۱	۳—۲	۱—۶	۴—۵	۰—۴
۶—۲	۴—۶	۰—۰	۱—۲	۲—۴
۰—۱	۱—۳	۲—۵	۳—۶	۳—۳
۴—۴	۱—۴	۳—۴	۰—۲	۰—۵

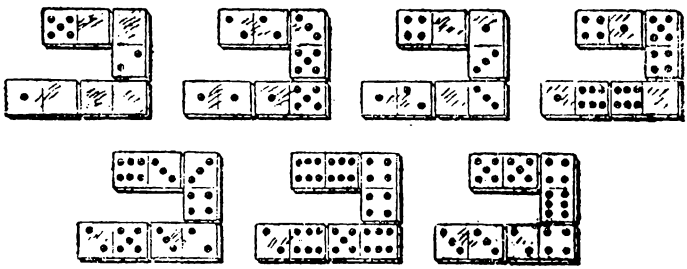
با تغییر جای سطرها یا ستونها، شبیه آنچه‌که درمورد مربع وفقی با ۱۶ سنگ در متن (صفحهٔ ۱۸۰) بحث‌کردیم، می‌توان مربعهای وفقی جدیدی بدست آورد.

۲۰۳. جواب در شکل صفحهٔ ۶۱۹ داده شده است.

۲۰۴. جواب در شکل صفحهٔ ۶۱۹ داده شده است.



مربوط به مسألهٔ ۲۰۳



مربوط به مسألهٔ ۲۰۴

۲۰۵. سنگی راکه درنظر گرفته شده است $x-y$ فرض‌می‌کنیم وآن نیمه راکه شامل x است ، انتخاب می‌کنیم . عملها را انجام می‌دهیم: ۱) $2x$ ؛ ۲) $2x+m$ ، ۳) $5(2x+m)=10x+5m$ ، ۴) $10x+5m+y$. اگر $5m$ راکم کنیم، بدست می‌آید $10x+y$ ، و این یك‌عدد دو رقمی‌است‌که رقمهای‌آن عبارتست از x و y ، یعنی همان تعدادخالهایی که روی دونیمهٔ سنگ است.

۲۰۶. از شرطهای مسأله معلوم می‌شودکه مجموع خالهای مورد نظر برابر است با مجموع خالهای وجه‌های بالایی تاسها، در وضع آخر به‌اضافهٔ مجموع خالهای دو وجه‌روبرو در یك تاس. و می‌دانیم‌که مجموع خالهای دو وجه روبرو درهر تاس برابر است با ۷.

۲۰۷. پیداکردن مجموع مورد نظر، به‌کمك‌تعداد خالهای وجه‌بالایی ستون. مجموع خالهای وجه‌هایی از تاسهاکه رویهم قرارگرفته‌اند و وجهی پایینی، برابر است با ۲۱ منهای تعداد خالهای وجه بالایی ستون.

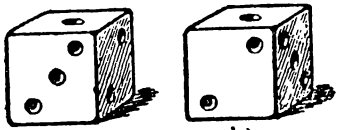
در واقع، اگر بخواهیم مجموع تمام وجه‌های افقی را پیدا کنیم، به معنای آنست‌که مجموع خالهای سه زوج وجه روبرو را بدست‌آوریم که مساوی 3×7، یعنی ۲۱ می‌شود. ولی بنا به‌شرط مسأله، باید تعداد خالهای وجه بالای ستون را ازآنها بیرون بپریم.

پیدا کردن مجموع مورد نظر، به‌کمك دو وجه‌کناری ستون. با رعایت «قانون هفت» تنها به‌دوترتیب می‌توان خالها را روی وجه‌های تاس‌بازی قراردارد. یکی ازاین دوترتیب، قرینهٔ‌آینه‌ای ترتیب دیگری است. تاس‌را روی‌میز بگذارید، به‌نحوی‌که تکخال‌آن بالاباشد. دراین صورت، ۲ دریکی از وجه‌های‌کناری، و ۳ در وجه مجاورآن، یا درطرف راست و یا درطرف چپ خال۲، قراردارد. به‌عبارت دیگر با نگاه‌کردن‌ازبالا، برای رفتن‌از۲خال به سه‌خال یا باید درجهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت‌کرد (شکل a در صفحهٔ بعد) ویا در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (شکل b) .

وقتی‌که جای خالهای ۱، ۲ و ۳ معلوم باشد، با استفاده از قاعدهٔ هفت، تعداد خالهای سه وجه‌دیگر به‌سادگی بدست می‌آید.

بنابراین، اگر از قبل ردیف قرارگرفتن خالها را بدانیم و با درنظر

گرفتن قاعدهٔ هفت، می‌توان با دیدن خالهای دو وجه مجاور، خالهای چهار وجه دیگر را پیدا کرد.



مربوط به مسألهٔ ۲۰۷

مثلاً، اگر ردیف‌خالهای ۱ و ۲ و ۳را در وضع b بدانیم، به‌سادگی معلوم می‌شودکه در تاس پایین خال ۱ بالا و خال ۶ پایین است، همچنین در تاس وسط حال ۲ بالا و خال ۵ پایین است.

البته، دراین روش، که ضمناً تعداد خالهای بالا یا پایین هرتاس به طور جداگانه هم معین می‌شود، باید تمرین زیاد داشت تا با نگاه‌کردن به خالهای دو وجه مجاور بتوان با سرعت خالهای بالا و پایین را معین‌کرد.

۲۰۸. چون مجموع خالهای هردو وجه روبرو مساوی ۷ است، اگر عدد سه رقمی اصلی را A فرض‌کنیم، عدد سه‌رقمی که سمت راست‌آن نوشته می‌شود، برابر است با $A-۷۷۷$ و بنابراین عدد شش رقمی‌مساوی $(A-۷۷۷)+۱۰۰۰A$ یا $۹۹۹A+۷۷۷$ یا $۱۱۱(۹A+۷)$ می‌شود که اگر این عدد را بر ۱۱۱ تقسیم‌کنیم، $۹A+۷$ بدست می‌آید. حالادیگر روشن است‌که اگر ۷ را ازآن بیرون برویم و حاصل را بر ۹ تقسیم کنیم، همان عدد A بدست می‌آید.

بخش هفتم

۱.۲۰۹. باقیماندهٔ تقسیم یک‌عدد بر ۹، برابر است با باقیماندهٔ‌تقسیم مجموع رقمهای آن عدد بر ۹. اگر، با حذف رقمی از یک عدد، مجموع رقمهای آن‌کوچک شود، باقیماندهٔ تقسیم‌آن بر۹ هم، به همان اندازه‌کوچک

می‌شود. ضمناً روشن است که اگر رقمهای ۹ یا صفر را حذف کنیم، در باقیماندهٔ تقسیم، تغییری حاصل نمی‌شود.

۲.۲۰۹. روشن است که تفاضل دوعدد مورد نظر باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد، مجموع رقمهای این تفاضل، مضربی است از ۹، و اگر عددی که به شما می‌گویند بر ۹ بخش‌پذیر نیست، به خاطر آنست که یکی از رقمهای آنرا حذف کرده‌اند، و روشن است که برای پیدا کردن آن باید عددی را که به شما می‌دهند از نزدیکترین مضرب ۹ به آن، کم کنید. درحالتی که خود این عدد داده‌شده هم به ۹ بخش‌پذیر باشد، رقم حذف‌شده مساوی ۹ است.

۳.۲۰۹. باید مجموع رقمهای تفاضلی را که بدست می‌آید حساب کرد (۲۳ = ۸ + ۹ + ۶). سپس این مجموع را، از نزدیکترین عدد مضرب ۹ به آن کم کرد تا رقم حذف شده پیدا شود. در مثال ما ۴ = ۲۳ − ۲۷، و بنابراین رقم حذف شده، مساوی ۴ است. قاعده، ازخاصیت عدد ۹، نتیجه می‌شود.

۴.۲۰۹. برای هرعدد که شما نوشته‌اید، من عددی می‌نویسم که مجموع هر دورقم متناظر آنها مساوی ۹ شود، دراینصورت، مجموع همهٔ عددها، مضربی از ۹ خواهد شد. اگرشما رقم ۹ را حذف کرده باشید، بازهم مجموع، مضربی از ۹ باقی می‌ماند، ولی اگر عددی که حذف کرده‌اید غیراز ۹ باشد، دیگر مجموع مضربی از ۹ نخواهد بود و برای پیداکردن این رقم حذف شده، باید اختلاف این مجموع را تا نخستین عدد مضرب ۹، که بزرگتر ازآنست، بدست آورد.

۵.۲۰۹. عددی را باید اضافه کنیم که مجموع هررقم آن بارقمهای متناظرش در عددهای دیگر، مضربی از ۹ شود. در اینصورت، رقم حذف شده بنابرهمان قاعدهٔ معلوم بدست می‌آید.

۶.۲۰۹. مجموع رقمهای هرعدد را محاسبه می‌کنیم و تفاوت آنرا تا نزدیکترین عدد مضرب ۹، کنارش می‌نویسیم. به‌جای همهٔ این رقمها، می‌شد تنها باقیماندهٔ تقسیم مجموع آنها را بر ۹، نوشت. مثلاً درنمونهٔ ما، مجموع

رقمهایی راکه اضافه کرده‌ایم ۱۹ = ۵+۴+۴+۶ (۹ را لازم نیست به حساب بیاوریم)، باقیماندهٔ تقسیم ۱۹ بر ۹ مساوی ۱ است، بنابراین شما می‌توانستید تنها عدد ۱ را در جایی (پهلو یا بین یا زیر عددهای اصلی) قرار دهید.

۲۱۰. دوست شما مثلاً از عدد ۱۳۱۳، عدد ۴۸ را کم می‌کند، ۱۲۶۵ بدست می‌آید. مثلاً رقم ۶ را از آن حذف می‌کند و ۱۲۵ و ۱۴۸ را کنار هم می‌نویسد ۱۲۵۱۴۸ . اگرشما مجموع رقمهای این عدد را پیدا کنید: ۲۱ = ۸+۴+۱+۵+۲+۱، و اختلاف آنرا تانزدیکترین عدد مضرب ۹، بدست آورید، همان رقم حذف شده، پیدا می‌شود.

علت این مطلب، چیز ساده‌ای است. می‌دانیم که اگر دوعدد را باهم جمع کنیم، «مانده‌ها» باهم جمع می‌شوند و اگر دوعدد را ازهم کم کنیم، «مانده‌ها» ازهم کم می‌شوند (خاصیت ۳—a ، صفحهٔ ۱۹۱).

دراینجا ما همان عددی را که از ۱۳۱۳ کم کرده‌ایم با ۱۰۰ واحد اضافی پهلوی‌آن نوشته‌ایم، بنابراین «مانده» این نتیجه (قبل ازحذف رقم) یك واحد بیشتر از «ماندهٔ» ۱۳۱۳ است. چون مجموع رقمهای عدد ۱۳۱۳ مساوی۸ است، بنابراین «ماندهٔ» عددی‌که بعد ازپایان عملها بدست‌می‌آید، مساوی ۱+۸، یعنی ۹ می‌شود. بنابراین وقتی یك رقم حذف شده است، برای پیداکردن آن باید تفاوت مجموع رقمهای عدد آخر را تا نزدیکترین مضرب ۹ به‌آن ، پیدا کنیم.

روشن است که‌به‌جای عدد ۱۳۱۳می‌توان هرعدد دیگری که درتقسیم بر۹ به‌باقیماندهٔ ۸ می‌رسد، انتخاب کرد.

برای تنوع می‌توان از اضافه‌کردن عدد ۱۰۰ صرفنظرکرد، منتهی‌در این حالت باید ابتدا به مجموع رقمهای عدد آخر، یك واحد اضافه‌کنیم و سپس تفاوت‌آنرا بانزدیکترین مضرب ۹، پیدا کنیم.

برای عدد اولیه هم «ماندهٔ» ۸ ضروری نیست، مثلاً اگر با عددی که ماندهٔ مساوی۵ دارد، شروع‌کنیم، باید به‌مجموع رقمهای عددآخر ابتدا

۴ واحد اضافه‌کنیم و سپس تفاوت‌آنرا با نزدیکترین مضرب ۹ پیدا کنیم (دراین حالت می‌شود ضمن عملها، به‌جای ۱۰۰ واحد مسأله، ۴۰۰ واحد اضافه شود).

۱۰.۲۱۱. باید مجموع رقمهای عددهایی راکه روی «خط حاصلجمع» قرار دارند، بدست آوریم و آنرا از نخستین مضرب ۹ بزرگتر از خودش کم‌کنیم تا عدد موردنظر بدست آید.

مطلب برسراینست که مجموع همهٔ عددهای از ۱ تا ۹، مضربی‌است از۹. در واقع، روشن است که مجموع

$$(۱+۸)+(۲+۷)+(۳+۶)+(۴+۵)$$

بر۹ بخش پذیر است. هرکدام ازعددهایی‌که روی خط حاصلجمع قرار دارد، ازمجموع چندتا ازاین عددها به‌وجود آمده‌است. اگر دراین مجموعها، همهٔ عددهای از ۱ تا ۹ شرکت داشته باشند ، دراینصورت مجموع عددهای خط حاصلجمع، یا مجموع رقمهای این مجموع، مضربی از ۹ خواهد بود. ولی چون یکی از عددها دراین مجموع دخالت نداشته است، بنابراین مجموع رقمها در خط حاصلجمع، به‌اندازهٔ همان عدد کنارگذاشته شده، با مضرب ۹ اختلاف دارد. درحالت خاص مربوط به‌شکل صفحهٔ ۱۹۶، مجموع‌رقمهای خط حاصلجمع مساوی ۱۳ می‌شود و بنابراین عدد مورد نظر مساوی ۱۳ — ۱۸ ، یعنی ۵ است.

۲.۲۱۱. عدد مورد نظر برابر است با ۳. مجموع رقمهایی‌که درخط حاصلجمع‌صفحهٔ ۱۹۷ قراردارد،مساوی ۲۴ است وتا ۲۷، نزدیکترین‌مضرب ۹ به‌آن، ۳ واحد فاصله دارد.

دلیل این راه حل، کاملاً شبیه مسألهٔ قبل است.

۳.۲۱۱. شبیه دو مسألهٔ قبل، دراینجا هم، برای پیدا کردن عدد مورد نظر، بایدمجموع رقمها را از نزدیکترین مضرب۹ به‌آن، کم‌کرد.

۲۱۲. همهٔ حاصلضربهای ممکن را درنظر می‌گیریم : (جدول صفحهٔ بعد را ببینید) .

این خاصیتها را برای این حاصلضربها می‌بینیم:

۱. همیشه مجموع دو رقم اول و سوم، همچنین مجموع دو رقم دوم

۱۱×۹۹=	۱	۰	۸	۹
۲۲×۹۹=	۲	۱	۷	۸
۳۳×۹۹=	۳	۲	۶	۷
۴۴×۹۹=	۴	۳	۵	۶
۵۵×۹۹=	۵	۴	۴	۵
۶۶×۹۹=	۶	۵	۳	۴
۷۷×۹۹=	۷	۶	۲	۳
۸۸×۹۹=	۸	۷	۱	۲
۹۹×۹۹=	۹	۸	۰	۱

و چهارم حاصلضرب برابر است با ۹؛

۲. رقم دوم همیشه یك واحد از رقم اول کمتر است؛

۳. هرکدام از رقمهای عددی که در ۹۹ ضرب کرده‌ایم، مساوی رقم اول حاصلضرب است.

با آگاهی براین سه خاصیت می‌توانیم، بدون اینکه به‌جدول مراجعه کنیم، تمام حاصلضرب را با دردست‌داشتن یکی از رقمهای آن، پیدا کنیم.

طبق‌شرط مسأله، رقم سوم حاصلضرب مساوی ۵ است، بنابراین رقم اول مساوی ۴ (خاصیت۱) ، رقم دوم مساوی ۳ (خاصیت ۲) و رقم چهارم مساوی ۶ (خاصیت ۱) و بـه این ترتیب تمـام حاصلضرب مساوی ۴۳۵۶ است.

خاصیت ۳، امکان می‌دهد معلوم‌کنیم چـه عـددی در ۹۹ ضرب شده است. در مسألهٔ ما، این عدد مساوی ۴۴ است.

۲۱۳. رقم وسط تفاضل همیشه برابر است با ۹، دو رقم اول وآخر هم مجموعی مساوی ۹ دارند.

درواقع، اگرعدد سه‌رقمی را $\overline{ABC}$ بگیریم(C یکان،B دهگان وA سدگان‌این عدد است)، مقلوب آن $\overline{CBA}$ می‌شود. فرض می‌کنیم $A > C$ باشد دراینصورت :

$$\overline{ABC} > \overline{CAB}$$

تفاضل را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{array}{l}\overline{ABC}-\\ \overline{CBA}\end{array}$$

آخرین رقم تفاضل (یکان)، مساوی $A-C+۱۰$ می‌شود (زیرا $C < A$ وبرای اینکه‌تفریق ممکن باشدباید ۱۰ واحد ازعدد دهگان B به C اضافه کنیم) . رقم وسط تفاصل مساوی $B-(B-۱)+۱۰$ ، یعنی مساوی ۹ می‌شود. به‌این ترتیب رقم وسط تفاضل همیشه برابر است با ۹.

رقم اول تفاضل (سدگان)،مساوی $C-(A-۱)$ می‌شود ومجموع دو رقم اول و آخر

$$(۱۰+C-A)+(A-۱-C)=۹$$

۲۱۴. همیشه تفاضل هر دوعددی که رقمهای یکی، ازجابه‌جا کردن رقمهای دیگری بدست‌آمده است، برابر است با ۹، یا مضربی از ۹. به سادگی می‌توان تحقیق کردکه درحالت مسألهٔ ما، این تفاضل تنها می‌تواند مساوی ۹ باشد. دراینصورت سن C، که مساوی نصف این تفاضل است، $۴\frac{۱}{۲}$ سال، و سن B (که ۱۰ برابر سن C است) ۴۵ سال، درنتیجه سن A ۵۴ سال می‌شود.

۲۱۵. روش آشنای من‌این بودکه رقم وسط را به دلخواه‌می‌نوشت. و بقیهٔ رقمها را طوری انتخاب می‌کرد که مجموع‌آنها مضربی از ۹ باشد. حالا باید ثابت‌کردکه اگر عددی به‌این ترتیب نوشته شود، دارای‌خاصیت مورد نظر است.

به خاطر می‌آوریم که اگر عددی مانند S بر ۹ بخش‌پذیر باشد ،

مجموع رقمهای آن، عددی مانند S_1 می‌شود، که بازهم بر ۹ بخش‌پذیر است، و اگر S_1 عددی چندرقمی‌باشد، باز از مجموع رقمهای آن، عددی مانند S_2 بدست می‌آید که بر۹ بخش‌پذیر است وغیره. با ادامهٔ این عمل به عددی یك رقمی می‌رسیم که بر ۹ بخش پذیر است و تنها عدد یك رقمی که بر۹ بخش‌پذیر است، همان عدد ۹ می‌باشد.

حالا عددی مثل $\overline{\ldots cbaxmnp\ldots}$ را درنظر می‌گیریم که مجموع همهٔ رقمهای آن، به‌جز رقم وسط، یعنی

$$S=\ldots+c+b+a+m+n+p+\ldots$$

مضربی از ۹ باشد. اگر S، عددی یك‌رقمی باشد، مساوی ۹ است و اگر یك‌رقمی نباشد، عددی‌که از مجموع رقمهای آن، و یا از مجموع رقمهای عددهای بعدی، بدست می‌آید، مساوی ۹ است. بنابراین با انجام عملهای متوالی در مورد عدد... $\overline{cbaxmnp}\ldots$ (یعنی جمع رقمها درهرعددی که بدست می‌آید)، بالاخره به عدد $x+9$ می‌رسیم، که x همان رقم‌وسط عدد اصلی است. و سرآخر با جمع رقمها درعدد $x+9$، به عدد x می‌رسیم، زیرا عدد $x+9$ را می‌توان‌به‌صورت $(x-1)+10$ نوشت واین عددی دو رقمی است‌که یکان آن $x-1$ و دهگان ۱ است و بنابراین مجموع رقمهای آن برابر $(x-1)+1$، یعنی x می‌شود.

بخش هشتم

۲۱۶. بهترین‌روش اینست‌که مسأله را از آخر حل کنیم. مرکزسوم به هریك از دومرکز دیگر، به‌تعدادی‌که خودشان داشته‌اند، ماشین‌زراعتی داده است، دراین موقع هرکدام از سه مرکز دارای ۲۴ ماشین می‌شوند. بنابراین قبل ازآن، تعداد ماشینهای سه مرکز چنین بوده است: مرکز اول ۱۲ماشین، مرکز دوم ۱۲ ماشین، مرکزسوم ۴۸ ماشین. این تعدادماشینها مربوط به وقتی است‌که مرکز دوم، تعداد ماشینهای مرکزهای اول و سوم را دوبرابرکرده بود. بنابراین قبل از این عمل، تعداد ماشینها درسه مرکز چنین‌بوده است: مرکز اول ۶ماشین، مرکزسوم۲۴ ماشین‌وچون مرکزدوم،

۳۰ ماشین به دو مرکز دیگر داده است، قبل از آن ۳۰+۱۲ ، یعنی ۴۲ ماشین داشته است. این تعداد ماشینها مربوط به وقتی است که مرکز اول، تعداد ماشینهای دو مرکز دیگر را دوبرابر کرده است . بنابراین مرکزهای دوم و سوم درابتدا به‌ترتیب ۲۱ و ۱۲ ماشین ومرکز اول ۳۳+۶، یعنی ۳۹ماشین، داشته است.

۲۱۷. حل این مسأله را هم بهتر است ازآخر انجام دهیم. مردطمع‌کار، بعدازآنکه برای‌سومین‌بار ازپل عبور می‌کند و پولش دوبرابرمی‌شود، ۲۴ تومان داشته است که با پرداخت آن به عنوان دستمزد، چیزی برایش باقی نمی‌ماند. بنابراین قبل از دوبرابر کردن، ۱۲ تومان موجودی داشته است. ولی این مبلغ بعد ازآنست‌که ۲۴ تومان دستمزد مرتبهٔ دوم را به کلاهبردار پرداخته بود، یعنی قبل ازاین پرداخت ۳۶ تومان داشته‌است؛ و این دوبرابر پولی است‌که قبل ازعبور ازپل‌برای مرتبهٔ دوم دراختیارداشته است. به‌این ترتیب، درپایان عبور اول ازپل ۱۸ تومان و قبل از پرداخت اولین دستمزد ۴۲ تومان موجودی او بوده است. واین ۴۲ تومان دوبرابر پول اصلی اوست . یعنی مرد طمع‌کار ما ، درابتدا ۲۱ تومان داشته است و به خاطر طمع خود، همهٔ‌آنها را از دست می‌دهد.

۲۱۸. درپایان رد و بدل‌کردنها، هرکدام دارای ۸ سیب شدند . بنابراین، قبل ازآنکه بردار بزرگتر، نصف سیبهای خود را تقسیم‌کند، ۱۶ سیب وهرکدام از دوبرادر کوچکترش ، ۴ سیب داشته‌اند. به‌همین ترتیب، قبل ازآنکه برادر متوسط نصف سیبهای خود را تقسیم‌کند ۸ سیب، برادر بزرگترش۱۴ سیب وبرادرکوچکترش ۲ سیب داشته‌اند. قبل ازآنکه برادر کوچکتر، نیمی از سیبهای خود را تقسیم‌کند (یعنی درابتدای‌کار)، خودش ۴ سیب، برادر متوسط ۷ سیب و برادر بزرگتر ۱۳ سیب داشته‌اند.

چون هرکدام به تعداد سالهای سه‌سال قبل خود، سیب‌گرفته بودند، حالا برادر کوچکتر ۷ سال، برادر متوسط ۱۰ سال و برادر بزرگتر ۱۶سال دارد .

۲۱۹. بعد ازتقسیم فشنگها ، سه شکارچی رویهم ۱۲ فشنگ مصرف کرده‌اند. بعد ازاین تیراندازی، رویهم‌آنقدر فشنگ باقی مانده است،که هر

کدام به‌تنهایی بعدازتقسیم داشته‌اند، یعنی تعدادکل فشنگهایی‌که باقیمانده است، یك‌سوم تمام فشنگهایی است که تقسیم شده است. بـه‌عبارت دیگر، شکارچیها،دوسوم فشنگها را مصرف‌کرده‌اند و یك‌سوم‌آنها باقی‌مانده است. به این ترتیب، قبل از تقسیم، ۱۸ فشنگ موجود بوده است.

۲۲۰. درلحظهٔ ملاقات لکوموتیورانها، فاصلهٔ‌بین راهنمایان‌واگنهای آخر، ۲۵۰ × ۲، یعنی ۵۰۰ متر است. چون هرکدام ازقطارها، بـاسرعت ۴۵کیلومتر درساعت حرکت می‌کنند، راهنمایان بـا سرعت ۴۵ × ۲، یعنی ۹۰ کیلومتر درساعت، یـا ۲۵ متر درثانیه بـه‌هم نزدیك می‌شوند. زمان مجهول برابراست با ۲۵ : ۵۰۰، یعنی ۲۰ ثانیه.

۲۲۱. سادگی وکوتاهی راه حل هر مسأله، بستگی به انتخاب‌درست حلقهٔ اول استدلال، و یا به زبان جبر، بستگی به انتخاب مجهول دارد.

فرض می‌کنیم کـه توکا، نیمهٔ دوم دستنویس را درn روز ماشین کند. دراینصورت، نیمهٔ اول دستنویس را در ۳n روز، و هرروزی ۱۰ صفحـه، ماشین می‌کند. به‌این‌ترتیب، نیمهٔ اول دستنویس به اندازهٔ ۱۰ × ۳n،یعنی ۳۰n صفحه، و تمام دستنویس رویهم ۶۰n صفحه دارد. تمام دستنویس را، توکا در n+۳n، یعنی ۴n روز ماشین می‌کند. بنابراین، تعداد صفحه‌های دستنویس هرچه باشد، به‌طور متوسط روزی ۴n : ۶۰n، یعنی ۱۵ صفحـه را ماشین می‌کند. حـق بـا شروین بود. حالا خودتان، بـا انتخاب مجهول دیگری همین مسأله را حل‌کنید.

۲۲۲. فرض می‌کنیم، تعداد قارچهـای هریك از پسرها، وقتی‌که بـه اردو رسیدند، مساوی x باشد. ازآنچه‌که در مسألـه گفته شده است، نتیجه می‌شودکـه ماروسیا، قارچهای خـود را اینطور تقسیم‌کـرده بود: بـه‌کلیا x−۲ عدد، به وانیا x+۲ عدد، به آندریوشا $\frac{x}{۲}$ عدد و به پتیا ۲x عدد و رویهم:

$$(x-۲)+(x+۲)+\frac{x}{۲}+۲x=۴\frac{۱}{۲}x$$

و بنابر فرض باید داشته باشیم:

$$۴\frac{۱}{۲}x=۴۵$$

و ازآنجا $x = ۱۰$ بدست می‌آید.

کلیا ۸ قارچ از ماروسیا گرفته بود، وانیا ۱۲ قارچ، آندریوشا ۵ قارچ و پتیا ۲۰ قارچ. و وقتی‌که به اردو رسیده‌اند، هرکدام ۱۰ قارچ داشته‌اند.

۲۲۳. کم نیستند کسانی که جواب‌می‌دهند: «هردو باهم برمی‌گردند». استدلال آنها اینست که وقتی قایق‌ران در جهت جریان آب رودخانه‌می‌رود، برای مدتی از دوست خود جلو می‌افتد، و وقتی‌که درخلاف جهت حرکت آب می‌آید، همین زمان را از دست می‌دهد.

ولی، این استدلال درست نیست. درواقع، وقتی قایق درجهت جریان آب حرکت می‌کند، جریان آب زمان حرکت را کوتاهتر می‌کند و درحالت عکس، وقتی‌که قایق در خلاف جهت جریان‌آب حرکت می‌کند، جریان آب زمان حرکت‌را درازتر می‌کند. دریك حالت، رودخانه به‌حرکت‌کمك می‌کند و درحالت دیگر مانعی دربرابر حرکت است. ولی کمك در زمانی‌کوتاهتراز زمان مقاومت، انجام می‌گیرد؛ یعنی ورزشکاری که روی رودخانه‌حرکت می‌کند، دیرتر از ورزشکاری‌که روی آب ساکن قایق می‌راند، به‌جای اول خود می‌رسد.

درحالت حدی هم، همین نتیجه بدست می‌آید. فرض کنید سرعت اختصاصی قایق (یعنی سرعت آن درآب ساکن)، برابر با سرعت جریان‌آب باشد، دراینصورت، قایق‌رانی‌که روی‌آب رودخانه و در جهت جریان آب حرکت می‌کند، با دوبرابر سرعت قایق‌ران دوم، به‌نقطهٔ برگشت می‌رسد. ولی، وقتی‌که قایق‌ران اول برمی‌گردد، جریان آب، حرکت‌او را به‌کلی متوقف می‌کند و در نتیجه هرگز نمی‌تواند به‌جای اول خود برگردد.

به حالت‌کلی مسأله برمی‌گردیم. سرعت‌جریان آب را مساوی x، و سرعت اختصاصی قایق را مساوی v می‌گیریم. دراینصورت، مسافت s در آب ساکن در مدت $\frac{s}{v}$ واحد زمان و همین مسافت درجهت جریان آب در مدت $\frac{s}{v+x}$ واحد زمان طی می‌شود. صرفه‌جویی وقت، برای قایقی‌که در

رودخانه‌حرکت می‌کند، مساوی $\frac{S}{v}-\frac{S}{v+x}$ می‌شود، که اگر به‌یك‌مخرج تبدیل کنیم ، می‌شود:

$$\frac{S}{v}-\frac{S}{v+x}=\frac{Sx}{v(v+x)} \quad \text{(واحد زمان)}$$

از طرف دیگر، قایق درخلاف جهت جریان آب، همین مسافت را ، در مدت $\frac{S}{v-x}$ واحد زمان طی‌می‌کند و در مقایسه با قایقی که درآب آرام حرکت می‌کند به اندازهٔ

$$\frac{S}{v-x}-\frac{S}{v}=\frac{Sx}{v(v-x)} \quad \text{(واحد زمان)}$$

از دست می‌دهد. از مقایسهٔ دوکسر $\frac{Sx}{v(v+x)}$ (زمـان صرفه‌جویی) و $\frac{Sx}{v(v-x)}$ (زمان تأخیر)، برای قایقی‌که درآب رودخانه حرکت‌می‌کند، معلوم می‌شودکه کسراول، کوچکترازکسر دوم است. بنابراین، زمان‌تأخیر قایق درخلاف جهت حرکت آب، بیشتر از زمان صرفه‌جویی، درحالت عکس است .

بنابراین، از دو قایق‌ران، آنکه روی‌آب ساکن حرکت می‌کند، زودتر به محل اصلی برمی‌گردد.

حالا خودتان به‌این پرسش جواب بدهید: تغییر مقدار سرعت جـریان آب، چه تأثیری‌برزمان تأخیر قایقی‌که درآب‌رودخانه حرکت می‌کند،دارد؟

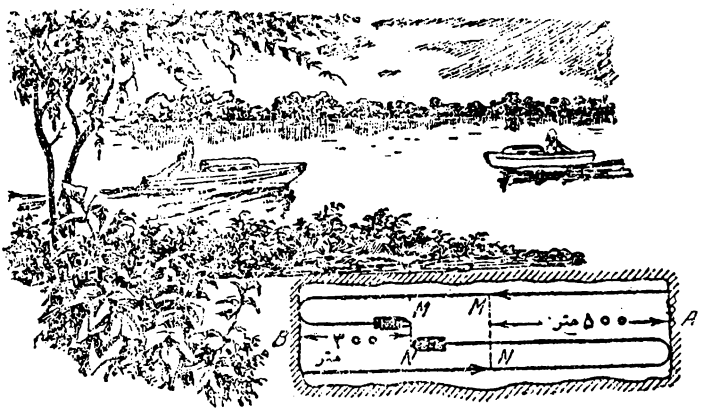
۲۲۴. با استدلالی‌که در متن مسأله‌کردیم، معلوم می‌شود زمانی‌که شناگر در خلاف جهت آب رودخانه، ازلحظه‌ای‌که خود را بـه‌آب انداخته است (کنارپل اول)، تا لحظهٔ برگشت صرف کرده‌است، برابر است با زمان از لحظهٔ برگشت تا زمانی که‌کلاه را از آب گرفته‌است (در زیر پل دوم). از اینجا معلوم می‌شود کـه شناگر؛ و همراه آن کـلاه، ۲۰ دقیقه روی آب بوده‌اند. کلاه دراین ۲۰ دقیقه، همراه باجریان آب، از پل اول تا پل‌دوم، یعنی ۱۰۰۰ متر را طی‌کرده‌است. بنابراین سرعت جریان آب ۲۰ : ۱۰۰۰ یعنی ۵۰ متر در دقیقه می‌شود.

راه حل دیگری از همین مسأله را می‌آوریم که براساس دیگری قرار دارد، ولی با استدلال بسیار جالبی انجام می‌گیرد. مسأله را «از نقطه نظر کلاه» مورد بررسی قرار می‌دهیم.

به‌جای اینکه، کلاه به وسیلهٔ آب ازپل اول تاپل‌دوم برده شود، فرض می‌کنیم که آب ساکن باشد و بنابراین، کلاه درهمان نقطه‌ای که به‌آب می‌افتد، باقی بماند، ولی‌پل دوم، با سرعت جریان‌آب، به طرف پل بیحرکت اول‌جلو بیاید. روشن است که این فرض‌هیچ تغییری‌درمسأله نمی‌دهد. اینطورنیست؟ خوب، با این فرض، وضع‌شناگر چه می‌شود؟ شناگر، درآب ساکن، تا ۱۰ دقیقه درجهتی شنا می‌کند، سپس همین مدت را برای برگشتن به‌جای اول صرف می‌کند (زیرا آب ساکن است). شناگر، بعد از ۲۰ دقیقه شنا، به‌جای خود برمی‌گردد، و درآنجا به‌کلاه برخورد می‌کند. درهمین موقع، پل‌دوم، که با سرعت جریان آب به‌طرف پل اول می‌آمده است، به‌شناگر وکلاه می‌رسد (در فرض مسأله، گفته شده است که‌شناگر کلاه را در زیر پل دوم، ازآب گرفته است). به این‌ترتیب، پل‌دوم با سرعت ۲۰ : ۱۰۰۰، یعنی ۵۰ متر دردقیقه‌حرکت کرده است و این همان سرعت جریان آب است. سرعت شناگر، در این ماجرا اثری ندارد.

۲۲۵. دوکشتی باهم به‌کمربند نجات می‌رسند. اگر از اسکله‌حرکتها را مشاهده کنیم، معلوم می‌شود کشتی که به‌طرف پایین می‌رود، به‌سرعتش به اندازهٔ سرعت جریان‌آب اضافه می‌شود، درحالیکه از سرعت کشتی که به طرف بالا حرکت می‌کند؛ به‌همین اندازه‌کم‌می‌شود. ولی اگر ازدیدگاه‌کسی که همراه‌کمربند نجات است، نگاه‌کنیم، چون‌این‌کمربند با جریان آب‌حرکت می‌کند، مثل اینست که ازسرعت آن‌کشتی که به‌طرف پایین می‌رود، سرعت جریان آب حذف می‌شود و درعوض به سرعت‌کشتی دوم‌که به‌طرف بالا می‌رود، اضافه می‌شود. به عبارت دیگر اگرآب را ساکن بگیریم (یعنی مثل اینکه از دیده‌گاه کمربند نجات به کشتیها نگاه‌کنیم)، کمربند نجات درجای خود باقی می‌ماند و دریك ساعت، دوکشتی به‌یك اندازه ازآن‌دور می‌شوند (زیرا سرعت اختصاصی دوکشتی را مساوی فرض‌کرده‌ایم) و بنابراین در برگشتن هم برای هردوکشتی یك ساعت طول می‌کشد تا به‌کمربند نجات برسند، یعنی باهم.

۲۲۶. قایق M ، ساحل A را ترك می‌کند و بعد از رفتن ۵۰۰متر، به‌قایق N برخورد می‌کند. دراین مدت، هردو رویهم به‌اندازهٔ طول‌دریاچه را طی‌کرده‌اند (شکل را ببینید). با ادامهٔ حرکت، قایق M به ساحل B



مربوط به مسألهٔ ۲۲۶

می‌رسد، برمی‌گردد و درفاصلهٔ ۳۰۰ متری این ساحل، دوباره با قایق N ملاقات می‌کند. تا این‌لحظه، دوقایق رویهم به اندازهٔ سه‌برابر طول دریاچه را طی کرده‌اند(طرح زیر شکل‌را نگاه‌کنید). به‌این‌ترتیب، معلوم می‌شود، زمان از ابتدای حرکت تا لحظهٔ ملاقات دوم، ۳ برابرزمان از ابتدای‌حرکت تا لحظهٔ ملاقات اول است.

چون قایق M تالحظهٔ ملاقات اول ۵۰۰ متر رفته است، بنابراین تا لحظهٔ ملاقات دوم به‌اندازهٔ ۳ × ۵۰۰، یعنی ۱۵۰۰ متر راه طی‌کرده است. طول دریاچه به اندازهٔ ۳۰۰ مترکمتر از فاصله‌ای است که قایق M از ابتدای حرکت تا لحظهٔ ملاقات دوم پیموده است، یعنی برابر است با

$$۱۵۰۰ - ۳۰۰ = ۱۲۰۰ \quad \text{(متر)}$$

از شروع حرکت‌قایق M و ازشروع حرکت قایق N تا لحظهٔ‌ملاقات اول‌آنها، برای هردو یك‌زمان گذشته است، بنابراین نسبت سرعتهای‌آنها، برابر است با نسبت فاصله‌هایی که دراین مدت طی‌کرده‌اند، یعنی:

$$\frac{v_۱}{v_۲} = \frac{۵۰۰}{۱۲۰۰ - ۵۰۰} = \frac{۵}{۷}$$

۲۲۷. فرض کنید تمام گروه x درخت کاشته باشد. دستهٔ کریوشا قبول کرده بود، به اندازهٔ همهٔ دسته‌های دیگر، درخت بکارد، یعنی پیش‌آهنگان دستهٔ او باید نصف تمام درختهای گروه را بکارند، یعنی $\frac{x}{2}$.

ویتیا قول داده بود که دستهٔ او به اندازهٔ نصف همهٔ دیگر دسته‌ها، کارکند. بنابراین اگردستهٔ ویتیا، یك قسمت کار را انجام دهد، بقیه‌دوقسمت کار را انجام داده‌اند. به‌این ترتیب، دستهٔ ویتیا یك‌سوم تمام‌درختها را باید بکارند، یعنی $\frac{x}{3}$ درخت.

تعداد درختهایی که کریوشا و ویتیا رویهم باید بکارند، چنین‌می‌شود:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5x}{6}$$

بقیهٔ درختها را، بقیهٔ دسته‌ها کاشته‌اند. چون تعداد بقیهٔ درختها مساوی $\frac{x}{6}$ وطبق فرض مسأله، مساوی ۴۰ می‌باشد، بنابراین داریم: $\frac{x}{6}=۴۰$ وازآنجا $x=۲۴۰$. ازاین ۲۴۰ درخت، دستهٔ کریوشا ۱۲۰ درخت و دستهٔ ویتیا ۸۰ درخت را باید بکارند.

۲۲۸. نصف‌عدد کوچکتر را باحرف m نشان می‌دهیم، دراینصورت وقتی که‌آنرا از عدد کوچکتر کم‌کنیم همان m بدست می‌آید، و اگر آنرا از عدد بزرگتر کم‌کنیم باید ۳m بماند (زیرا طبق فرض مسأله، باقیماندهٔ عدد بزرگتر، سه‌برابر باقیماندهٔ عدد کوچکتر است). ازاینجا به‌روشنی‌معلوم می‌شودکه عددکوچکتر مساوی ۲m وعدد بزرگترمساوی ۴m است، یعنی عدد بزرگتر،دوبرابر عددکوچکتراست.

۲۲۹. حل جبری. سرعت کشتی را x می‌گیریم، سرعت هواپیما مساوی۱۰x می‌شود. فرض‌کنید، هواپیما در s میلی ساحل به‌کشتی برسد، در مدتی‌که هواپیما در راه است، کشتی به اندازهٔ $s-۱۸۰$ میل جلو می‌رود، بنابراین داریم:

$$\frac{s}{10x}=\frac{s-180}{x}$$

دوطرف تساوی را در ۱۰x ضرب می‌کنیم ($x\neq 0$) ، $s=۲۰۰$ بدست می‌آید. یعنی هواپیما در ۲۰۰ میلی ساحل به‌کشتی می‌رسد.

حل حسابی. درهمان‌زمانی‌که هواپیما ۱۰ میل پروازمی‌کند، کشتی‌یك میل به‌جلو می‌رود. بنابراین، در مدتی‌که هواپیما، ۱۸۰ میل اولیه راطی می‌کند، کشتی ۱۸ میل دیگر جلو می‌رود. وقتی‌که هواپیما ۱۰ میل بعدی رابرود، کشتی بازهم یك میل‌جلو می‌رود وفاصله‌اش باهواپیما، ۹میل‌می‌شود و روشن است‌که اگرهواپیما ۱۰ میل‌دیگر جلوبرود به‌کشتی‌خواهد رسید و به‌این ترتیب، هواپیما رویهم ۲۰۰ میل‌باید پروازکند تا به‌کشتی برسد.

۲۳۰. با توجه به سرعت دوچرخه سوارها، معلوم می‌شودکه آنهابه ترتیب واحدطول را در $\frac{۱}{۶}$ ، $\frac{۱}{۹}$ ، $\frac{۱}{۱۲}$ ، $\frac{۱}{۱۵}$ ساعت طی‌می‌کنند وچون‌محیط هر دایره، مساوی $\frac{۱}{۳}$ واحد طول است، برای اینکه هرکدام در مسیر خود ، یك دورکامل بزنند، باید به‌ترتیب $\frac{۱}{۱۸}$ ، $\frac{۱}{۲۷}$ ، $\frac{۱}{۳۶}$ و $\frac{۱}{۴۵}$ ساعت وقت صرف‌کنند. بنابراین درهر ساعت به ترتیب ۱۸ ، ۲۷ ، ۳۶ و ۴۵ دور و در ۲۰ دقیقه به‌ترتیب ۶، و ۹، ۱۲ و ۱۵ دور می‌زنند، همهٔ اینهاعددهایی صحیح‌اند و بنابراین بعد از ۲۰ دقیقه، هردوچرخه سوار، درنقطهٔ شروع حرکت خود خواهد بود. به‌طورکلی، درهرلحظه‌ای‌که تعداد دورهای‌هرچهار دوچرخه سوار، عددی صحیح باشد (ولواینکه این چهارعدد، یکی نباشد)، همهٔ آنها درنقطهٔ شروع حرکت خواهند بود. تعدادکل دفعه‌هایی‌که چهار دوچرخه‌سوار با هم در نقطهٔ اولیهٔ خود هستند، برابر است با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك سه‌عدد ۶، ۹، ۱۲ و ۱۵. بزرگترین مقسوم علیه‌مشترك این چهار عدد برابر است با ۳ و بنابراین درجریان ۲۰ دقیقه، این‌دوچرخه سوارها، ۳ بار در وضع اولیهٔ خود هستند: هر $۶\frac{۲}{۳}$ دقیقه یکبار.

۲۳۱. بین سرعت کار دستگاه، و مدتی‌که طول می‌کشد تاکار تمام شود، نسبت معکوس برقرار است. یعنی اگرکار با سرعت $v_۱$ در مدت $t_۱$ تمام شود و با سرعت $v_۲$ درمدت $t_۲$ ، باید داشته باشیم:

$$\frac{t_۲}{t_۱}=\frac{v_۱}{v_۲}$$

بنا بر شرط مسأله $t_۲ = ۲\frac{۱}{۲}$ برای سرعت $v_۲$ متر در دقیقه، و $t_۱ = ۳۵$، برای سرعت $v_۱ = v_۲ - ۱۶۹۰$ متر در ثانیه. بنابراین تناسب زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{۲\frac{۱}{۲}}{۳۵} = \frac{v_۲ - ۱۶۹۰}{v_۲}$$

که با حل آن $v_۲ = ۱۸۲۰$ متر در دقیقه بدست می‌آید.

۲۳۲. فاصله‌ای را که جك‌لندن طی کرده است، مساوی $۱۳۳\frac{۱}{۳}$ میل است.

در فرض مسأله گفته شده است که اگر جك‌لندن، ۵۰ میل دیگر را با همان سرعت اولیه طی می‌کرد، تنها با یك روز تأخیر، به اردو می‌رسید. بنابراین اگر ۱۰۰ میل را، بعد از روز اول، باهمان سرعت اولیه می‌رفت بدون تأخیر به اردو می‌رسید. ازاینجا معلوم می‌شود که درپایان روز اول، در ۱۰۰ میلی اردو بوده است. ولی اگر جك‌لندن، مرتباً باهمان سرعت اولیه، جلو می‌رفت، به‌جای ۱۰۰ میل به اندازهٔ $۱۰۰ \times \frac{۵}{۳}$، یعنی $۱۱۶\frac{۲}{۳}$ میل راه را طی می‌کرد. $۶۶\frac{۲}{۳}$ میل اضافی، ۲ روز راه را صرفه‌جویی می‌کرد؛ ازاینجا معلوم می‌شود که سرعت کاملی که جك‌لندن درنظر گرفته بود $۳۳\frac{۱}{۳}$ میل در روز بود.

با اضافه کردن این $۳۳\frac{۱}{۳}$ میل (که در روز اول رفته است)، به ۱۰۰ میل بقیه، معلوم می‌شود که تمام فاصله، مساوی $۱۳۳\frac{۱}{۳}$ میل است.

۱.۲۳۳. اگر درآمد ماهیانه ۳۰٪ اضافه شود، قدرت خرید هم ۳۰٪ بالا می‌رود.

۲.۲۳۳. اگر درآمد ماهیانه ثابت باشد، ولی قیمتها ۳۰٪ پایین بیاید، همانطورکه احتمالا بسیاری متوجه می‌شوند، قدرت خرید بیش از ۳۰٪ بالا می‌رود. اگر قبل از پایین آمدن قیمتها با ۱۰۰ ریال می‌شد یك شیء را خرید، حالا آن شیء ۷۰ ریال قیمت دارد و بنابراین با ۱۰۰ ریال می‌شود

$\frac{۱۰۰}{۷۰}$ یا $\frac{۱۰}{۷}$ آن شیء را خریداری کرد، یعنی $\frac{۳}{۷}$ شیء بیشتر، و $\frac{۳}{۷}$ یعنی قریب ۴۳٪.

۳.۲۳۳. نتیجه‌گیری ازروی‌قیاس، دراینجاهم منجر به‌اشتباه می‌شود، یعنی اگر کتابفروشی کتابهای خود را بدون تخفیف می‌فروخت، سود او ۸+۱۰، یعنی ۱۸٪ نمی‌شد. این سود در واقع مساوی ۲۰٪ است.

وقتی‌که کتابفروش، کتابهای خود را با ۱۰٪ تخفیف می‌فروشد، ۸٪ خرید سود می‌برد، یعنی ۹۰٪ قیمت روی جلد برابر با ۱۰۸٪ قیمت خرید است. حالادیگر به‌سادگی می‌توان حساب کرد که تمام قیمت روی جلد، چند درصد قیمت خرید است. برای این‌منظور باید تناسب زیر را تشکیل دهیم:

$$\frac{۹۰}{۱۰۰}=\frac{۱۰۸}{x}$$

که ازآنجا $x=$٪۱۲۰ بدست‌می‌آید. یعنی، اگرکتابها بدون تخفیف‌فروخته می‌شد، سود کتابفروشی مساوی ۲۰٪ قیمت خرید بود.

۴.۲۳۳. خیلیها گمان می‌کنند، به هر درصدی که زمان تولیدکم شود، میزان محصول هم همان‌درصد، اضافه می‌شود. ولی به‌سادگی‌می‌توان ثابت‌کرد، این تصور اشتباه است.

فرض‌کنید برای تولید یك‌شیء، یکساعت وقت لازم باشد. اگر زمان تولید این‌محصول را P٪ کم‌کنیم، $\frac{P}{۱۰۰}$ ساعت زودتر، یعنی در $۱-\frac{P}{۱۰۰}$ ساعت تهیه می‌شود. بنابراین دیگر در یك ساعت، به جای یك شیء $(۱-\frac{P}{۱۰۰}):۱$، یعنی $\frac{۱۰۰}{۱۰۰-P}$ شیء تولید می‌شود، یعنی به اندازهٔ $۱-\frac{۱۰۰}{۱۰۰-P}$، یعنی $\frac{P}{۱۰۰-P}$ شیء بیشتر. و اگر این تولید اضافی را با درصد نشان دهیم، به‌صورت $\frac{۱۰۰P}{۱۰۰-P}$٪، بدست می‌آید. مثلاً، اگر زمان تولید محصول را ۵۰٪ کم کنیم $(P=۵۰)$، دراینصورت، محصول کار به‌جای ۵۰٪، به اندازهٔ ۱۰۰٪ اضافه می‌شود، یعنی محصول دوبرابر می‌شود.

۲۳۴. وصیت را به طریقه‌های مختلفی می‌توان تفسیر کرد. می‌توان به‌این ترتیب استدلال کرد که بنا بروصیت‌نامه باید دختر نصف مادر و پسر دو برادر مادرسهم ببرد. یعنی باید دارایی را به ۷ قسمت تقسیم کرد که از آن ۲ قسمت سهم مادر، ۴ قسمت سهم پسر و یك قسمت سهم دختر باشد. سالویان ژولیان هم به‌همین ترتیب قضاوت کرد.

ولی، این راه حل به‌نفع مادر نیست. در واقع، وصیت‌نامه‌را می‌توان به‌این‌ترتیب هم تفسیر کرد که وصیت‌کننده می‌خواسته است که مادر، لااقل صاحب $\frac{۱}{۳}$ دارایی باشد، در حالیکه در راه حل قاضی رومی، تنها $\frac{۲}{۷}$ دارایی به او رسیده است. به‌این ترتیب، اگر بخواهیم جانب مادر را بگیریم، باید $\frac{۱}{۳}$ دارایی را به او بدهیم و بقیه را به‌نسبت ۱ : ۴ ، بین پسر و دختر تقسیم کنیم، که ازآنجا $\frac{۸}{۱۵}$ سهم پسر و $\frac{۲}{۱۵}$ سهم دختر می‌شود.

در همین حالت دوم، می‌شد، بعد ازآنکه $\frac{۱}{۳}$ دارایی به مادر داده شد، استدلال کرد که وصیت‌کننده می‌خواسته است درحالتی که فرزند دختر دارد، نصف حالتی که فرزند پسر دارد، به‌فرزندش ارث برسد، که با این‌تفسیر باید $\frac{۲}{۳}$ دارایی را به نسبت ۱ : ۲ بین پسر و دختر تقسیم کرد که $\frac{۴}{۹}$ دارایی سهم پسر و $\frac{۲}{۹}$ دارایی سهم‌دختر می‌شود.

حالتهای‌دیگر تفسیر وصیتنامه‌هم اینست که‌اول‌سهم‌پسر راجدا کنیم ($\frac{۲}{۳}$ دارایی)وبقیه را به‌نسبت۱:۲ بین مادر ودخترتقسیم کنیم، یا اینکه اول‌سهم دختر را جدا کنیم ($\frac{۱}{۳}$ دارایی) و سپس بقیه را به نسبت ۱ : ۲ بین پسر و مادر تقسیم کنیم .

۲۳۵. در خانوادهٔ A ، یکی ازاین سه حالت وجود دارد:

فرزند بزرگتر	دختر	دختر	پسر
فرزندکوچکتر	دختر	پسر	دختر

و بنابراین احتمال مورد نظر مساوی $\frac{۱}{۳}$ است.

ولی در خانوادهٔ B یکی ازاین دو حالت وجود دارد.

فرزند بزرگتر	پسر	پسر
فرزندکوچکتر	پسر	دختر

و بنابراین احتمال مورد نظر مساوی $\frac{۱}{۲}$ است.

۲۳۶. راه حل اول. فاصلهٔ بین ده تا شهر را x کیلو مترمی‌گیریم. اگر مرد میانه سال y کیلومتر برود، $(x-y)$ کیلومتر باقی می‌ماند واگر $۳y$ کیلومتر برود، $(x-۳y)$ کیلومتر باقی می‌ماند. بنابر فرض مسأله، باید فاصلهٔ $x-۳y$ مساوی نصف فاصلهٔ $x-y$ باشد:

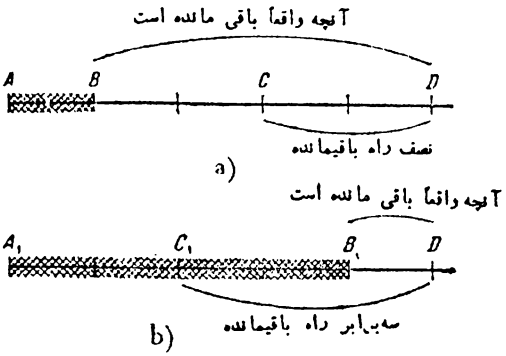
$$x-y=۲(x-۳y) \Rightarrow x-y=۲x-۶y \Rightarrow y=\frac{۱}{۵}x$$

حالافرض می‌کنیم که مرد جوان در ابتدا z کیلومتر رفته باشد، دراینصورت $(x-z)$ کیلومتر باقی مانده بود، اگر $\frac{z}{۲}$ کیلومتر رفته‌باشد، $(x-\frac{z}{۲})$ کیلومتر باقی می‌ماند و بنابر شرط

$$۳(x-z)=x-\frac{z}{۲} \Rightarrow z=\frac{۴}{۵}x$$

روشن‌است که $\frac{۴}{۵}x$ از $\frac{۱}{۵}x$ بزرگتر است، یعنی $z>y$ و بنابراین راه اولیهٔ مرد جوان بیشتر از مردمیانه سال است: جوان با اتومبیل و میانه سال با اسب رفته است.

راه حل دوم. می‌توان به‌جای تشکیل معادله، دربارهٔ شرطهای مسأله فکر کنیم و با استفاده از شکل آنرا حل کنیم.



مربوط به مسألهٔ ۲۳۶

روی یك خط، پاره خط AB را به دلخواه جدا می‌کنیم، این پاره‌خط را نمایندهٔ فاصله‌ای می‌گیریم که درواقع، مرد میانه سال رفته است. به‌دنبال AB، دوپاره خط دیگر مساوی آن، جدا می‌کنیم (شکل a).

اگر مرد میانه‌سال، سه برابر آنچه‌که پیموده است، می‌پیمود، به اندازهٔ AC جلو می‌رفت، دراینصورت فاصلهٔ BC باید مساوی نصف راه باقیمانده باشد، زیرا در فرض مسأله گفته شده است که اگر سه‌برابر راه رفته را برود، راه باقیمانده، نصف می‌شود. بنابراین، اگر دوپاره‌خط دیگر مساوی AB و به دنبال AC رسم کنیم، فاصلهٔ ده تا شهر بدست می‌آید (پاره خط AD ، که از ۵ قسمت مساوی تشکیل شده است).

حالا، به طرح حرکت مرد جوان می‌پردازیم.

پاره خط دلخواه A_1B_1 را، نمایندهٔ فاصله‌ای که در واقع مردجوان پیموده است، رسم می‌کنیم (شکل b) : اگر این پاره‌خط را نصف کنیم، A_1C_1 ، نمایندهٔ طول راه پیموده شده است، به‌شرطی که مرد جوان نصف راه رفته را، می‌رفت، که دراینصورت باید راه باقیماندهٔ اول سه برابر شود. بنابراین، اگر به دنبال A_1B_1، پاره خط B_1D_1 را مساوی نصف C_1B_1 جدا کنیم، تمام فاصلهٔ از ده تا شهر بدست می‌آید (پاره خط A_1D_1، که از

۵ قسمت مساوی تشکیل شده است).

اگر واحدها را مناسب اختیار کرده باشیم ، باید داشته باشیم : $AD=A_1D_1$ ، یعنی هریك از ۵ قسمت این پاره‌خطها هم باید بایکدیگر برابر باشند. ولی روشن است‌که A_1B_1 بزرگتر است از AB (۴ برابر آنست)، بنابراین، مرد جوان با اتومبیل و مرد میانه‌سال با اسب حرکت کرده است.

۲۳۷. فرض می‌کنیم:

موتور سوار اول x ساعت در حرکت و $\frac{y}{3}$ ساعت در استراحت بوده است .

موتورسوار دوم $\frac{x}{2}$ ساعت در استراحت و y ساعت در حرکت بوده است.

از آنجاکه دوموتور سوار باهم‌حرکت کرده‌اند و با هم به منزل رسیده‌اند، باید داشته باشیم:

$$x+\frac{y}{3}=\frac{x}{2}+y \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{2y}{3}$$

و از آنجا $x=\frac{4}{3}y$ ، یعنی $y<x$.

موتورسوار دوم، سریع‌تر از موتور سوار اول حرکت می‌کرده‌است.

۲۳۸. اگر هواپیمای مورد نظر در ردیف nام ، از چپ به‌راست، باشد، درسمت راست آن $n-9$ هواپیما ودرسمت چپ آن $n-1$ هواپیما وجود خواهد داشت‌که حاصلضرب آنها $(n-1)(n-9)$ می‌شود، اگر هواپیما را به‌جای هواپیمای سوم در سمت راست خودش قرار دهیم،آنوقت در سمت‌راست‌آن $n-6$ هواپیما و درسمت چپ آن $n+2$ هواپیما خواهد بود و بنابر فرض باید داشته باشیم:

$$(6-n)(n+2)-(9-n)(n-1)=3$$

و از آنجا $n=3$ بدست می‌آید.

هواپیمای پدر والودیا، در ردیف سوم از چپ به‌راست بوده است.

۲۳۹. کافی است به این نکته توجه‌کنیم‌که اگر دو معادلهٔ را باهم

جمع کنیم و سپس یکبار هم آنها را ازهم کم کنیم، برای ضریبهای x و y و مقدار ثابت درحالت اول عددهای ۱۰، ۱۰ و ۵۰ و درحالت دوم عددهای ۲/۵۰۲، ۲/۵۰۲ — و ۲/۵۰۲ بدست‌می‌آید. بنابراین به‌سادگی می‌توان به‌جای دستگاه مفروض، دستگاه زیر را درنظر گرفت :

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$$

وپیدا کردن جوابهای این معادله هم کار مشکلی نیست.

۲۴۰. طول شمع درازتر را x وطول شمع کوتاهتر را y می‌گیریم. شمع اول در یکساعت بـه اندازهٔ $3\frac{1}{2} : x$ ، یعنی $\frac{2}{7}x$ ، و شمـع دوم در یکساعت به انـدازهٔ $5 : y$ ، یعنی $\frac{1}{5}y$ می‌سوزد. بعد از۲ساعت، به‌ترتیب $\frac{4}{7}x$ و$\frac{2}{5}y$ از شمعها می‌سوزد و از اولی $\frac{3}{7}x$ و از دومی $\frac{3}{5}y$ باقی می‌مانـد طبق فرض باید داشته باشیم: $\frac{3}{5}y=\frac{3}{7}x$ وازآنجا: $\frac{x}{y}=\frac{7}{5}$.

۲۴۱. همهٔ رمز کار در اینست‌که وقتی مجموعی به این ترتیب بدست آید، مضربی از ۱۱ است. اگر عددی که درنظرگرفته شده است ، $\overline{abcd}$ فرض کنیم، می‌توان آنرا چنین نوشت:

$$1000a+100b+10c+d$$

و بعد ازآنکه رقم اول را به انتهای عدد ببریم، چنین می‌شود.

$$1000b+100c+10d+a$$

که مجموع آنها به صورت زیر در می‌آید :

$$1001a+1100b+110c+11d$$

وبه سادگی‌دیده می‌شودکه همهٔ جمله‌های‌آن بر۱۱ بخش‌پذیر است.

از عددهایی که به حسابدار ارائه شده بود ، تنها عدد نفر سوم بر۱۱ بخش‌پذیر است ، به‌همین مناسبت،جواب او درست و بقیهٔ جوابها نادرست است .

۲۴۲. دربرخورد اول، ممکن‌است به‌نظر برسدکه‌عقب‌ماندگی‌ساعت دیواری را جلورفتن ساعت رومیزی، کاملاً جبران می‌کند. همچنین، عقب ماندگی ساعت زنگ‌دار هم به نوبهٔ خود با جلو رفتن ساعت مچی جبران می‌شود، به نحوی که ساعت مچی باید وقت دقیق را نشان دهد. ولی، در واقع اینطور نیست.

در حقیقت، در برابر هریك ساعت وقت درست، ساعت دیواری ۵۸ دقیقه کار می‌کند. دربرابر هر ۶۰دقیقه‌کارساعت دیواری، ساعت رومیزی ۶۲دقیقه کارمی‌کند. بنابراین، ساعت رومیزی، دربرابر هردقیقه‌کار ساعت دیواری، $\frac{۶۲}{۶۰}$ دقیقه و برای ۵۸ دقیقه کار ساعت دیواری (یعنی یك ساعت وقت دقیق)، $\frac{۵۸\times۶۲}{۶۰}$ دقیقه‌کار می‌کند.

ساعت زنگ‌دار، دربرابر هر ۶۰ دقیقه‌کار ساعت دیواری، ۵۸ دقیقه کار می‌کند، بنابراین ساعت زنگ‌دار دربرابر هردقیقه‌کار ساعت رومیزی $\frac{۵۸}{۶۰}$ دقیقه و در برابر $\frac{۵۸\times۶۲}{۶۰}$ دقیقه‌کار ساعت رومیزی (یعنی یکساعت واقعی) به اندازهٔ $\frac{۵۸}{۶۰}\times\frac{۵۸\times۶۲}{۶۰}$ دقیقه کار می‌کند.

به‌همین ترتیب، دربرابر هردقیقه‌کار ساعت زنگ‌دار، ساعت مچی $\frac{۶۲}{۶۰}$ دقیقه و در برابر $\frac{۵۸\times۶۲\times۵۸}{۶۰\times۶۰}$ دقیقه کارآن (یعنی یك ساعت واقعی) به به اندازهٔ $\frac{۶۲}{۶۰}\times\frac{۵۸\times۶۲\times۵۸}{۶۰\times۶۰}$ دقیقه کار می‌کند، که اگر آنرا محاسبه کنیم، عدد تقریبی ۵۹/۸۶ بدست می‌آید.

به این ترتیب، ساعت مچی، دربرابر هریك ساعت دقیق، ۰/۱۴ دقیقه عقب می‌رود. بنابراین در ۷ ساعت (از ساعت ۱۲ تا ساعت۱۹) به اندازهٔ $۰/۱۴\times۷$ یا ۰/۹۸ و یا تقریباً یك دقیقه عقب می‌ماند.

درساعت ۱۹، روی‌ساعت‌مچی، وقت‌را ۱۸ و ۵۹ دقیقه نشان‌می‌دهد.

۲۴۳. فرض‌کنیم بعد از x ساعت، هردو ساعت، یك وقت را نشان

دهند. این وضع به شرطی پیش می‌آید که مقداری که ساعت من جلو می‌رود، به‌اضافهٔ مقداری که ساعت دوستم عقب می‌رود، رویهم ۱۲ ساعت (۴۳۲۰۰ ثانیه) بشود. ساعت من، در x ساعت، x ثانیه جلو می‌رود و ساعت دوستم، در x ساعت، $\frac{۳}{۲}x$ ثانیه عقب کار می‌کند. به این معادله می‌رسیم:

$$x+\frac{۳}{۲}x=۴۳۲۰۰$$

ازآنجا $x=۱۷۲۸۰$ و یا ۷۲۰ روز.

باید قریب ۲ سال انتظار کشید تا دوباره ساعت من و دوستم، یك وقت را نشان دهند.

برای اینکه هردو ساعت، یکبار دیگر وقت صحیح را نشان دهند، باید بازهم بیشتر انتظار کشید.

در واقع، ساعت من در ۴۳۲۰۰ ساعت (۱۸۰۰ روز)، ۱۲ ساعت جلو می‌رود و ساعت دوستم در ۱۲۰۰ روز ($\frac{۳}{۲}$: ۱۸۰۰) ، ۱۲ ساعت عقب می‌ماند. برای اینکه ببینیم بعد از چند روز هردو ساعت به اندازهٔ مضربی از ۱۲ ساعت، اختلاف پیدا کرده‌اند، باید کوچکترین مضرب مشترك ۱۸۰۰ و ۱۲۰۰ را پیدا کنیم. این کوچکترین مضرب مشترك مساوی ۳۶۰۰ روز است. تقریباً بعد از ۱۰ سال.

۱.۲۴۴. در مدت غیبت استادکار، عقربه‌های ساعت رویهم به اندازهٔ یك دور کامل صفحهٔ ساعت حرکت کرده‌اند. چون عقربهٔ دقیقه‌شمار باسرعتی ۱۲ برابر سرعت عقربهٔ ساعت شمار حرکت می‌کند ، بنابراین فاصله‌هایی‌را که آنها طی کرده‌اند، به ترتیب مساوی $\frac{۱۲}{۱۳}$ و $\frac{۱}{۱۳}$ تمام دایره است. از اینجا معلوم می‌شود که استادکار به اندازهٔ $۶۰\times\frac{۱۲}{۱۳}$ ، یعنی $۵۵\frac{۵}{۱۳}$ دقیقه درکارگاه نبوده است. اگر راهی‌راکه عقربه‌ها طی می‌کنند با زمان دقیقه‌ای نشان دهیم و فرض کنیم که استادکار، وقتی ازکارگاه خارج شده است، عقربهٔ دقیقه شمار به‌اندازهٔ x دقیقه ازساعت ۱۲ (وقتی که دوعقربه روی‌یکدیگرند) حرکت کرده باشد، دراینصورت عقربهٔ ساعت شمار، در این x دقیقه، تنها

$\frac{۱}{۱۲}x$ جلورفته است. بنابراین در لحظه‌ای‌که استاد کاراز کارگاه خارج‌می‌شده است، «فاصلهٔ» بین دو عقربه به اندازهٔ $x-\frac{۱}{۱۲}x$ ، یعنی $\frac{۱۱}{۱۲}x$ دقیقه بوده است. این معادله بدست می‌آید:

$$\frac{۱۱}{۱۲}x=\frac{۱}{۱۳}\times ۶۰$$

و از آنجا $x=۵\frac{۵}{۱۴۳}$ (دقیقه)

بنابراین، استاد کار در $۵\frac{۵}{۱۴۳}$ دقیقهٔ بعدازظهر، از کارگاه‌خارج می‌شود $۵۵\frac{۵}{۱۳}$ دقیقه برای‌صرف نهارمی‌گذرد و $۵\frac{۵}{۱۴۳}+۵۵\frac{۵}{۱۳}$، یعنی $۶۰\frac{۶۰}{۱۴۳}$ دقیقه بعدازظهر یاساعت، ۱ و $\frac{۶۰}{۱۴۳}$ دقیقه به‌کارگاه برمی‌گردد .

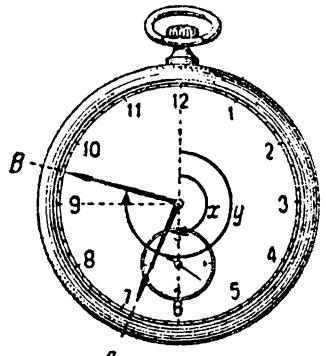
۲.۲۴۴. بعد ازآنکه من ۲ ساعت بیرون از منزل بوده‌ام، عقربهٔ دقیقه‌شمار ساعت به همان جای اول خود آمده است و عقربهٔ ساعت شمار $\frac{۲}{۱۲}$ تمام دایره را طی‌کرده‌است .

برای‌اینکه جای‌عقربه‌ها درست‌باهم عوض شوند، باید بعداز۲ساعت، دو عقربه رویهم به اندازهٔ $\frac{۱۰}{۱۲}$ تمام دایره حرکت‌کنند، یعنی ۵۰ دقیقه. سرعت عقربهٔ دقیقه شمار ۱۲ برابر سرعت عقربهٔ ساعت‌شمار است، یعنی راهی‌راکه‌عقربهٔ دقیقه‌شمار می‌رود،مساوی $۵۰\times\frac{۱۲}{۱۳}$ ، یعنی $۴۶\frac{۲}{۱۳}$ دقیقه است‌به. این ترتیب،من۲ ساعت‌و $۴۶\frac{۲}{۱۳}$ دقیقه بیرون از منزل بوده‌ام .

۳.۲۴۴. دو عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار، بین ساعتهای ۴ و ۵ ، درست $\frac{۱۱}{۱۲}$: ۲۰، یعنی $۲۱\frac{۹}{۱۱}$ دقیقه بعد از ۴، برهم منطبق می‌شوند. عقربهٔ دقیقه‌شمار، بعداز $\frac{۱۱}{۱۲}$: ۵۰ ، یعنی $۵۴\frac{۶}{۱۱}$ دقیقه بعد از ساعت ۴ ، درامتداد عقربهٔ ساعت‌شمار قرار می‌گیرد. بنابراین، دانش‌آموز، مسألهٔ‌خود

را در $\frac{۹}{۱۱}$ ۲۱ — $\frac{۶}{۱۱}$ ۵۴، یعنی $\frac{۸}{۱۱}$ ۳۲ دقیقه حل‌کرده است. او حل مسأله را در ساعت ۴ و $\frac{۶}{۱۱}$ ۵۴ دقیقه تمام کرده است.

۲۴۵. از فرضهای مسأله معلوم می‌شودکه وقتی کار جلسه شروع شده است، عقربهٔ ساعت شمار بین عددهای ۶ و ۷ صفحهٔ ساعت وعقربهٔ دقیقه‌شمار، بین عددهای ۹ و ۱۰ صفحهٔ ساعت قرارگرفته است (شکل را ببینید).



مربوط به مسألهٔ ۲۴۵

واحدراه زاویه‌ای را، مقداری که عقربهٔ ساعت‌شمار در یك ساعت‌طی می‌کند،می‌گیریم (یعنی، راهی‌مساوی پنج دقیقهٔ تقسیم). اگر ساعت شروع جلسه را، x بگیریم، به این معناست که فاصلهٔ زاویه‌ای‌از۱۲ تا وضع عقربهٔساعت‌شمار، در شروع جلسه،مساوی x است.

اگر پایان جلسه را در ساعت y بگیریم، بازهم به معنای آنست که فاصلهٔ زاویه‌ای عقربهٔ ساعت از عدد ۱۲ صفحهٔ ساعت، مساوی y است. مقدار فاصلهٔزاویه‌ای عقربهٔ دقیقه‌شمار هم، در فاصلهٔ زمانی ساعت ۶ (وقتی که عقربهٔ دقیقه‌شمار روی ۱۲ است) تالحظهٔ شروع جلسه، مساوی‌همینy است. در همین فاصلهٔ زمانی، عقربهٔ ساعت‌شمار (که سرعتش یك دوازدهم عقربهٔ دقیقه‌شمار است)، از عدد ۶ صفحهٔ ساعت، فاصلهٔ زاویه‌ای مساوی $\frac{y}{۱۲}$ را طی می‌کند. داریم:

$$x = ۶ + \frac{y}{۱۲}$$

درلحظهٔ پایان جلسه، عقربه‌ها جایشان را با هم عوض‌کرده‌اند، با استدلالی شبیه استدلال‌بالا، بدست می‌آید:

$$y = ۹ + \frac{x}{۱۲}$$

با حل دستگاهی که از این دو معادلهٔ دو مجهولی بدست می‌آید، می‌توان x و y را حساب کرد:

$$x = ۶ \frac{۱۱۴}{۱۴۳} \text{ (ساعت)} = ۶ \text{ (ساعت)} \; ۴۷ \text{ (دقیقه)} \; ۴۹ \frac{۱۳۳}{۱۴۳} \text{ (ثانیه)}$$

که وقت شروع جلسه است و

$$y = ۹ \frac{۸۱}{۱۴۳} \text{ (ساعت)} = ۹ \text{ (ساعت)} \; ۳۳ \text{ (دقیقه)} \; ۵۹ \frac{۲۳}{۱۴۳} \text{ (ثانیه)}$$

که وقت پایان جلسه است.

۲۴۶. چون گشتی اول نیمی از وقت خود را باسرعت بیشتر (از دو سرعت متفاوت) رفته است؛ بنابراین روشن است که با سرعت بیشتر، بیشتر از نصف راه را پیموده است، در حالیکه گشتی دوم با این سرعت بیشتر، تنها نصف راه را طی کرده است.

برای روشن بودن وضع، فرض می‌کنیم که سرعت اول گشتیها، بیشتر از سرعت تغییر یافتهٔ آنها باشد. دراینصورت، هردو گشتی، نیم اول راه را در یك زمان طی کرده‌اند، ولی نیم دوم راه را، گشتی اول در زمانی کمتر از گشتی دوم پیموده است، زیرا گشتی دوم، تمام نیمهٔ دوم راه را با سرعت کمتر طی کرده است، در حالیکه گشتی اول تنها قسمتی از همین نیمهٔ دوم را با این سرعت کمتر رفته است. و این به معنای آنست که گشتی اول، تمام راه را زودتر از گشتی دوم پیموده است. این تمام مسأله است، ساده وروشن.

به کمك جبر هم می‌توان به سادگی روشن کرد که گشتی اول، قسمت بیشتری از راه را با سرعت بیشتر طی کرده است. سرعت گشتیها را m و n ($m > n$)، نیم وقتی را که گشتی اول صرف کرده است t، فاصله‌ای را که همین گشتی اول با سرعت m طی کرده است s و فاصله‌ای را که با سرعت n طی کرده است s_1 می‌گیریم.

با شرط $m > n$ داریم:

$$\frac{s}{t} > \frac{s_1}{t} \quad \Rightarrow \quad s > s_1$$

دنبالهٔ حل را به زبان جبر، می‌توان به این ترتیب ادامه داد:

تمام راه : $mt+nt$

نیم راه : $\frac{mt+nt}{2}=\frac{(m+n)t}{2}$

تمام وقتی که اولی صرف کرده است: $x=2t$

تمام وقتی که دومی صرف کرده است:

$$y=\frac{(m+n)t}{2m}+\frac{(m+n)t}{2n}$$

تفاضل $y-x$ را محاسبه می‌کنیم :

$$y-x=\frac{(m+n)t}{2m}+\frac{(m+n)t}{2n}-2t=$$

$$=\frac{(mn+n^2+m^2+mn-4mn)t}{2mn}=\frac{(m-n)^2t}{2mn}$$

و ازآنجا که همهٔ عاملهای این نتیجه، مثبت‌اند، بنابراین $y-x>0$ یا $y>x$. گشتی دوم برای پیمودن فاصلهٔ مورد نظر، وقت بیشتری صرف می‌کند.

۲۴۷. x را طول قطار و y را سرعت آن می‌گیریم. چون قطار از کنار ناظر در t_1 ثانیه می‌گذرد، یعنی فاصله‌ای به اندازهٔ طول خود را در t_1 ثانیه طی می‌کند، داریم: $y=\frac{x}{t_1}$. در t_2 ثانیه از روی پلی به‌طول a متر عبور می‌کند، یعنی دراین مدت ، فاصله‌ای مساوی مجموع طول پل و طول قطار را طی می‌کند، بنابراین $y=\frac{x+a}{t_2}$. از اینجا به سادگی بدست می‌آید :

$$x=\frac{at_1}{t_2-t_1}\ ,\ y=\frac{a}{t_2-t_1}$$

۲۴۸. فرض می‌کنیم که این خط راه‌آهن، x ایستگاه داشته است و y ایستگاه هم‌به‌آن اضافه شده است. برای هر ایستگاه جدید $(x+y-1)$ بلیت جدید و برای y ایستگاه $y(x+y-1)$ بلیت جدید لازم است، برای x ایستگاه قدیم هم xy بلیت اضافی باید چاپ شود. بنابراین داریم:

$$y(x+y-1)+xy=46$$

و یا $$y(2x+y-1)=46$$

هر دو عامل سمت‌چپ تساوی، عددهایی مثبت و صحیح‌اند. ازطرف دیگر داریم $46\times1=46$ یا $23\times2=46$. ولی از صورت مسأله پیداست‌که بیش از یك ایستگاه افتتاح شده است، بنابراین $y=2$ و ازآنجا $x=11$ بدست می‌آید. در این خط، ۱۱ ایستگاه بوده است و ۲ ایستگاه جدید هم ساخته‌اند.

۲۴۹. دو تساوی فرض را درهم ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$a^3d=b^3cd \Rightarrow a^3=b^3c$$

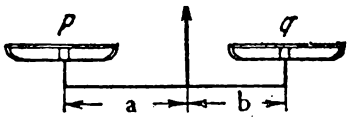
از اینجا نتیجه می‌شودکه c باید مکعب یك عدد صحیح باشد. بین‌عددهای ۲ تا ۱۵، تنها یك عدد مکعب کامل داریم وآن ۸ است، بنابراین $c=8$. ازآنجا بدست می‌آید $a^3=8b^3$ یا $a=2b$.

چون طبق فرض $a^2=bd$، بدست می‌آید $4b^2=bd$ یا $d=4b$. ولی b نمی‌تواندمساوی ۲ باشد، زیرا دراینصورت $d=8$ می‌شود، ولی c هم مساوی ۸ بود و طبق‌فرض مسأله باید عددها مختلف باشند. b بزرگتر از ۳ هم نمی‌تواند باشد، زیرا دراینصورت d از ۱۵ بزرگتر می‌شود. بنابراین $b=3$. ازآنجا $a=6$ و $d=12$ بدست می‌آید.

جواب: $a=6$، $b=3$، $c=8$ و $d=12$.

۲۵۰. استدلال خوار وبارفروش، درست نیست، وزن قندی‌که به‌این ترتیب فروخته شود، از ۲ کیلوگرم بیشتر است.

محاسبه‌را انجام می‌دهیم. اگر، ترازو درتعادل‌باشد، چه‌برای‌بازوهای



مربوط به مسألهٔ ۲۵۰

مساوی و چه برای بازوهای نامساوی، تساوی زیر برقرار است:

$$a(P+m)=b(Q+m)$$

که درآن a و b ، طول بازوهای چپ و راست ، P و Q وزن بارهایی که درکفه‌های‌چپ و راست قرار دارند، و m وزن‌هرکفه است (شکل‌رابینید).

بنابر فرض $a\neq b$ است، فرض می‌کنیم سنگ یك‌کیلوگرم بار اول‌با x کیلوگرم قند وبار دوم با y کیلوگرم قند، تعادل برقرارکند، دراینصورت داریم :

$$a(۱+m)=b(x+m), \qquad b(۱+m)=a(y+m)$$

و از آنجا

$$x=\frac{a+am-bm}{b}\ ,\ y=\frac{b+bm-am}{a}$$

و وزن کل قند، چنین می‌شود:

$$x+y=\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)m-۲m\right] \quad \text{(کیلوگرم)}$$

اگر a و b دوعدد مثبت و مخالف‌هم باشند $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ بـزرگتر از ۲ می‌شود، زیرا اولاً این رابطه واضح است.

$$(a-b)^۲>۰$$

و یا

$$a^۲-۲ab+b^۲>۰$$

که اگر دوطرف نامساوی را برعدد مثبت ab تقسیم‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\frac{a}{b}-۲+\frac{b}{a}>۰ \ \Rightarrow\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}>۲$$

از اینجا معلوم‌می‌شودکه $(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})m > ۲m$ و بنابراین

$$x+y=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+c$$

که در آن داریم:

$$c=(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})m-۲m>۰$$

و بنابراین به سادگی روشن می‌شودکه :

$$x+y>۲$$

یعنی، اگر با یك ترازوی نادرست (که بازوهای نامساوی دارد)، به ترتیبی‌که فروشنده پیشنهـاد می‌کند، وزن‌کنیم، همیشه، کالا، بـا بیشتر از وزن واقعی عرضه خواهد شد.

«روش وزن کردن دقیق»، به کمك ترازوی با بازوهای نامساوی. کـالا را در یك کفه قرار می‌دهیم و درکفهٔ دیگر چیزی (ومثلاً ساچمه یا هرچیز دیگر) می‌ریزیم تاتعادل‌ترازو برقرار شود، سپس‌کالا را برمی‌داریم وبه‌جای آن سنگ ترازو می‌گذاریم تا دوباره، تعادل برقرار شود؛ این سنگها، وزن کالا را با دقت معین می‌کنند.

۲۵۱. وقتی‌که از دوطرف تساوی

$$(x-v)^۲=(y-v)^۲$$

جذر می‌گیریم، دوجواب ممکن بدست می‌آید:

$$x-v=y-v \quad \text{یا} \quad x-v=v-y$$

ودر اینجا تنهاتساوی $x-v=v-y$ می‌تواند به عنوان جواب‌قبول‌شود که ازآن بدست می‌آید:

$$x+y=۲v$$

علت‌اینکه تساوی دیگرنادرست است دراینجاست‌که اگر $x>v$باشد، $y<v$ می‌شود واگر $x<v$ باشد، $y>v$ می‌شود و بنابراین در هرحال‌از دوعبارت $x-v$ و $y-v$، یکی مثبت و دیگری منفی است و عـدد مثبت

نمی‌تواند مساوی عدد منفی شود. ولی تساوی $x-v=v-y$، منجر به این اشکال نمی‌شود، زیرا یا هردوطرف تساوی مثبت و یا هردوی آنها منفی است. به‌این ترتیب، عملهای جبری که انجام دادیم، منجر به‌همان تساوی اولیهٔ $x+y=۲v$ می‌شود، نه تساوی نادرست $x=y$.

۲۵۲. روشن است که وقتی رقم ۱ را به‌جلو عدد پنج‌رقمی اضافه می‌کنیم، مثل اینست که به عدد خود، به‌اندازهٔ ۱۰۰۰۰۰ اضافه کرده‌باشیم، یعنی

$$\overline{۱A}=A+۱۰۰۰۰۰$$

وقتی که رقم ۱ را در سمت راست عدد پنج رقمی خود قرار می‌دهیم، مثل اینست که عدد خود را ۱۰ برابر کنیم و سپس یك واحد به آن اضافه کنیم:

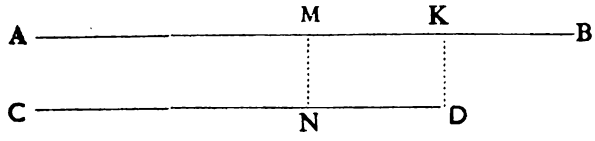
$$\overline{A۱}=A\times ۱۰+۱$$

از فرض مسأله معلوم می‌شود که

$$\frac{۱۰A+۱}{A+۱۰۰۰۰۰}=۳$$

که ازآنجا به تساوی $۷A=۲۹۹۹۹۹$ و یا $A=۴۲۸۵۷$ می‌رسیم.

۲۵۳. اگر سن مرا با پاره خط AB و سن شما را با پاره‌خط CD نشان دهیم، پاره‌خط KB نشان می‌دهد که چند سال قبل، سن من برابر سن حالای شما بود (شکل را ببینید). ولی اینقدر سال قبل، شما هم به اندازهٔ $ND=KB$ کم سال‌تر بودید و سن‌شما مساوی CN بود، که بایدمساوی نصف پاره خط AB باشد. ازاینجا معلوم می‌شودکه پاره خط MB شامل‌دو پاره‌خط مساوی KB، پاره‌خطAB شامل ۴ پاره‌خط‌مساوی KB، وبالاخره پاره‌خط CD شامل سه پاره خط مساوی KB است.



مربوط به مسألهٔ ۲۵۳

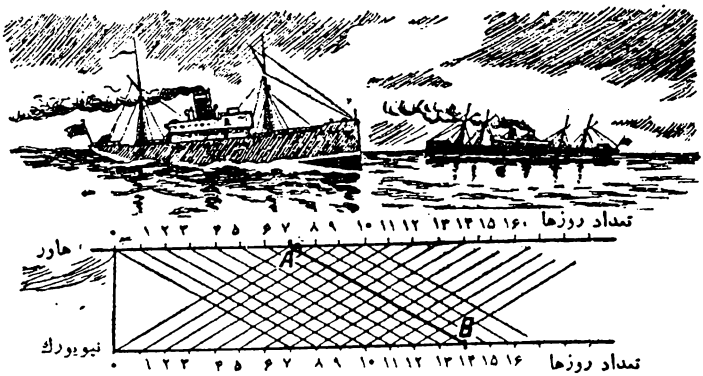
وقتی‌که شما به سن حالای من برسید، سن شما برابر پاره خط AB می‌شود که مساوی ۴ برابر پاره خط KB است. ولی دراین موقع، سن منهم به اندازهٔ KB بزرگ، و مساوی ۵ برابر پاره خط KB می‌شود.

بنا برفرض مسأله، باید داشته باشیم:

$$۴KB+۵KB=۶۳$$

یعنی KB، نمایندهٔ ۷ سال است. به این ترتیب، سن‌کنونی شما ۲۱ سال و سن‌کنونی من ۲۸ است.

۲۵۴. اغلب، به این مسأله پاسخ نادرستی می‌دهند، مثلاً ۷. کسانی‌که این جواب را می‌دهند، فراموش می‌کنند، که علاوه برکشتیهایی که باید هنوز ازطرف دیگر حرکت‌کنند، تعدادی از کشتیها هم قبلاً حرکت کرده‌اند و هم‌اکنون در راه هستند. ساده‌ترین راه، برای پیداکردن جواب این مسأله، اینست‌که حرکت‌هرکشتی را به‌کمك رسم یك‌پاره خط نشان‌دهیم (شکل را ببینید).



مربوط به مسألهٔ ۲۵۴

روی شکل دیده می‌شودکه اگر یك‌کشتی از هاور به طرف‌نیویورك حرکت‌کند (ما مسیر این‌کشتی را با AB نشان داده‌ایم)، در دریا با ۱۳ کشتی ملاقات می‌کند، یك‌کشتی‌هم در موقع حرکت از هاور می‌بینید (که درهمان لحظه از نیویورك رسیده است) و یك‌کشتی هم درموقع رسیدن به

نیویورك (که می‌خواهد همان لحظه به‌طرف هاور حرکت کند)، یعنی رویهم ۱۵ کشتی. همین شکل نشان می‌دهد که ملاقات کشتیها در نیمروز ونیمه شب است.

حالا به حل حسابی مسأله می‌پردازیم.

راه از هاور تا نیویورك را به ۱، نشان می‌دهیم. کشتی راکه از هاورحرکت می‌کند، H می‌نامیم. چون‌سرعت‌کشتیها یکی وضمناً یکنواخت است، کشتی H ، که از هاور حرکت می‌کند، باکشتی‌که درهمان لحظه از نیویورك حرکت می‌کند، درست درنیمه راه به‌هم می‌رسند.

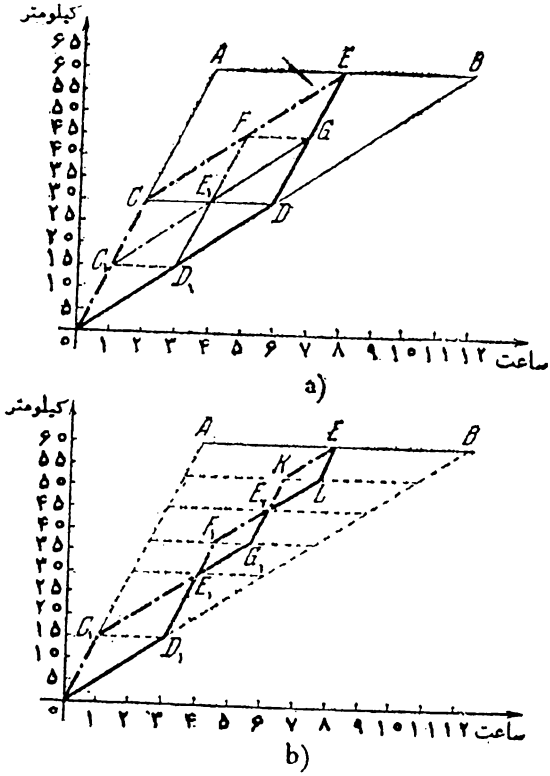
کشتی‌که روز قبل از نیویورك حرکت‌کرده است، درلحظهٔ حرکت کشتی H، $\frac{۱}{۷}$ راه را طی‌کرده است وبنابراین درفاصلهٔ $(\frac{۱}{۷}-۱)\frac{۱}{۲}$ ، یعنی $\frac{۶}{۱۴}$ از هاور ، به H می‌رسد؛ کشتی‌که دو روز قبل، از نیویورك حرکت‌کرده است، در فاصلهٔ $(\frac{۲}{۷}-۱)\frac{۱}{۲}$، یعنی $\frac{۵}{۱۴}$ ازهاور، به H می‌رسد،... وبالاخره کشتی‌که شش روز قبل، از نیویورك حرکت کرده است، به H در فاصلهٔ $(\frac{۶}{۷}-۱)\frac{۱}{۲}$ ، یعنی $\frac{۱}{۱۴}$ از هاور، می‌رسد.

کشتیهایی‌هم‌که در روزهای بعداز حرکت H ، از نیویورك حرکت کرده‌اند، در همین فاصله‌ها، منتهی از نیویورك، با H ملاقات می‌کنند.

به این ترتیب، درهر $\frac{۱}{۱۴}$ قسمت راه، کشتی H با یکی ازکشتیهایی که از نیویورك حرکت‌کرده است، برخورد می‌کند، علاوه براینها، کشتیH با یك‌کشتی درموقع‌خروج از هاور و بایك‌کشتی درموقع ورود به‌نیویورك، برخورد دارد، یعنی رویهم با ۱۵ کشتی.

۲۵۵. در اینجا هم،راه ترسیم، بهترین راه برای حل و تحلیل‌مسأله است. روی محور قائم، فاصله‌ها را (به‌کیلومتر) و روی محور افقی زمان‌را (به‌ساعت)نشان می‌دهیم. مقیاس‌را می‌توان به‌دلخواه انتخاب‌کرد (شکل‌a).

اگر تمام راه به وسیلهٔ دوچرخه پیموده شود (۱۵کیلومتر درساعت) همانطور که جای انتهای A ازپاره خط OA، نشان می‌دهد، ۴ ساعت‌وقت لازم است. و اگر تمام راه، با پیاده‌روی (۵کیلومتر درساعت) و بدون



مربوط به مسألهٔ ۲۵۵

توقف طی شود، همانطورکه جای نقطهٔ B از پاره خط OB نشان می‌دهد، ۱۲ ساعت وقت لازم است. ولی هـردو پسر جوان به‌نوبت پیاده و بـا دو- چرخه می‌روند و دریك زمان به‌مقصد می‌رسند، بنابراین، پاره‌خطهای‌نمایش حرکت‌آنها باید دارای تعداد معینی نقطهٔ مشترك باشد.

در مسأله، گفته نشده است‌که آنها چندبار روش حرکت خودراعوض کرده‌اند. فرض‌می‌کنیم، تنها یکبار، روش حرکت‌خود را عوض کرده‌باشند. دراین صورت نمایش حرکت‌آنها، یك متوازی‌الاضلاع را تشکیل می‌دهد.

در واقع، فرض‌کنید OC نمایش حرکت با دوچرخه باشد و ازآنجا به بعد، بقیهٔ‌راه‌را پیاده (روی CE) ادامه داده‌باشد، بنابراین CE بایدموازی

با OB باشد .

OD ، نمایش حرکت جوان دوم است که دوچرخه‌اش خراب شده و با پای پیاده تا نقطهٔ D آمده است. نقطهٔ D با C روی خطی موازی محور افقی قرار دارد، زیرا این جوان باید تاجایی پیاده برود که دوستش دوچرخه را برای او گذاشته است (یعنی باید همانقدر راهی را دوستش با دوچرخه رفته است، پیاده طی کند). جوان دوم ، بقیهٔ راه را با دوچرخه می‌رود و بنابراین، پاره خط DE نمایش حرکت او با دوچرخه، بایدموازی OA باشد.

به این ترتیب، چهارضلعی OCED و همچنین چهارضلعی CDBE متوازی‌الاضلاع است (DB ∥ CE و BE ∥ CD). در متوازی‌الاضلاع، ضلعهای‌روبرو باهم برابرند، بنابراین داریم: OD=CE و CE=DB و ازآنجا OD=DB .

بنابراین، نقطه‌های C و D ، هردو درست در نیمهٔ راه قرار دارند. دراین حالت، تعویض دوچرخه، تنها یکبار و در ۳۰کیلومتری مقصد انجام می‌گیرد. نقطهٔ E در وسط پاره خط AB قرار دارد و این نشان می‌دهدکه با روشی‌که دو پسرجوان، برای رفتن انتخاب کرده‌اند، درست ۸ ساعت وقت لازم دارند تابه‌مقصد برسند، درحالیکه، اگر بقیهٔ راه را (بعد ازخراب شدن دوچرخه)، هردونفر پیاده طی می‌کردند، ۱۲ ساعت طول می‌کشید.

ولی، تغییر روشهای حرکت را می‌توان بیش‌از یکبار انجام داد. در فرض مسأله، گفته شده است، جوانی‌که با دوچرخه می‌رود، بعدازآنکه به دوستش‌رسید، دوچرخه‌را به‌او وامی‌گذارد وخودپیاده راهش‌را ادامه‌می‌دهد. لحظه‌ای‌که یکی از جوانها، دوچرخهٔ خود را به دیگری می‌دهد، درتصویر به وسیلهٔ برخورد نمایش دوحرکت، نشان داده می‌شود. روشن است‌که این نقطهٔ برخورد می‌تواند شبیه نقطهٔ E ، در نقطهٔ E_1 وسط CD باشد.

با تکرار استدلالی، شبیه آنچه که در قبل‌کردیم، می‌توان تغییرات حرکت را برای اولی OC_1E_1PE و برای دومی OD_1E_1GE بدست آورد. دراینحالت، آخرین‌باری که دوجوان روش حرکت خود را تغییر

می‌دهند، در ۱۵ کیلومتری مقصد اتفاق می‌افتد (روی شکل a ، روی خط افقی FG) .

حالادیگر به سادگی معلوم می‌شود که نمایش حرکت دوجوان را می‌توان به طریقه‌های مختلف رسم کرد. مثلاً ، بعد ازآنکه دو جوان یکدیگر را در نقطهٔ E_1 ملاقات کردند (شکل b)، می‌توان نمایش حرکت اولی را به صورت $E_1F_1E_2KE$ و نمایش حرکت دومی را به صورت $E_1G_1E_2LE$ در نظر گرفت. دراینحالت آخرین تبدیل روش حرکت بازهم نزدیکتر به مقصد پیش می‌آید، یعنی در $7\frac{1}{2}$ کیلومتری آن (در شکل b ، روی خط افقی KL).

همانطورکه می‌بینید، با شرطهایی که مسأله داده است، بـه بینهایت نوع می‌توان نمایش حرکت دوپسرجـوان را رسم کرد، و ازاین نقطـه‌نظر، مسأله نامعین است. ولی یك‌جواب، همیشه معلوم است. این دوجـوان، هر چندبارکه دوچرخه را بین خود رد وبدل کنند، درهرحال، بعد از ۸ ساعت به مقصد می‌رسند.

۲۵۶. با انتخاب نمونه‌های مختلف، می‌توان درستی حکم را تحقیق کرد، ولی با مثال؛ مسأله درحالت کلی حل نمی‌شود. برای اثبات کلی حکم مسأله، باید به‌جای عدد ازحرف استفاده کنیم، تا درصورت لزوم بتوان به‌جای آنها هرعدد دلخواه قرار داد.

فرض کنید $\frac{a_1}{b_1}$ ، $\frac{a_2}{b_2}$ ، $\frac{a_3}{b_3}$ ،...، $\frac{a_n}{b_n}$، کسرهای مفروض باشند کـه صورت مخرج هرکدام ازآنها، عددهایی مثبت و دلخواهند. ضمناً فرض کنید که آنها را، به‌ترتیب مقدارشان منظم کرده باشیم، یعنی $\frac{a_1}{b_1}$ کـوچکترین و $\frac{a_n}{b_n}$ بزرگترین کسرها باشد. باید ثابت کنیم:

$$\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_1+b_3+\ldots+b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

به ترتیب داریم:

$$\frac{a_۲}{b_۲} > \frac{a_۱}{b_۱} \Rightarrow a_۲ > b_۲ \times \frac{a_۱}{b_۱}$$

$$\frac{a_۳}{b_۳} > \frac{a_۱}{b_۱} \Rightarrow a_۳ > b_۳ \times \frac{a_۱}{b_۱}$$

.....

$$\frac{a_n}{b_n} > \frac{a_۱}{b_۱} \Rightarrow a_n > b_n \times \frac{a_۱}{b_۱}$$

از آنجا بدست می‌آید:

$$a_۲+a_۳+\ldots+a_n > (b_۲+b_۳+\ldots+b_n) \times \frac{a_۱}{b_۱}$$

به سمت چپ نامساوی $a_۱$ و به سمت راست آن $b_۱ \times \frac{a_۱}{b_۱}$ رااضافه‌می‌کنیم:

$$a_۱+a_۲+a_۳+\ldots+a_n > (b_۱+b_۲+b_۳+\ldots+b_n) \times \frac{a_۱}{b_۱}$$

و از آنجا

$$\frac{a_۱+a_۲+a_۳+\ldots+a_n}{b_۱+b_۲+b_۳+\ldots+b_n} > \frac{a_۱}{b_۱}$$

به‌همین ترتیب می‌توان نامساوی دوم را هم ثابت‌کرد، یعنی

$$\frac{a_۱+a_۲+a_۳+\ldots+a_n}{b_۱+b_۲+b_۳+\ldots+b_n} < \frac{a_n}{b_n}$$

بخش نهم

۲۵۷. چهارلنگه کفش و سه‌لنگه جوراب. بین چهارلنگه‌کفش، لااقل دولنگه از یك‌نوع خواهد بود, همینطور بین سه‌لنگه جوراب، مسلماً دوتا از یك رنگ خواهد بود.

اگر تنها ۲ یا ۳ لنگه‌کفش انتخاب شود، ممکن است همهٔ آنها از

نوعهای مختلف باشند و یا اگر ۲ لنگه جوراب برداشته شود، ممکن است از دورنگ متفاوت باشند.

۲۵۸. ۱) چهار سیب، ۲) هفت سیب.

۲۵۹. نه! زیرا بعد از گذشت ۶۰ ساعت (دوشبانه روز و ۱۲ ساعت) دوباره شب فرا می‌رسد و درشب هم، انتظار آفتاب را نمی‌توان داشت (به شرطی که صحبت از نقطهٔ قطبی و روز قطبی نباشد).

۲۶۰. گروه B، ۵ درخت بیشتر از سهم خود، و بنابراین گروه A ۵ درخت کمتر از سهم خود کاشته است. به این ترتیب، گروه B، توانسته است ۱۰ درخت بیشتر از گروه A بکارد.

۱.۲۶۱. فامیل پیروز، جمشیدی نیست، زیرا با فرض ۳ تناقض دارد،

۲. مادر رحمانی، خواهر تنی یگانه است (فرض ۱)، بنابراین فامیل خانوادگی (ونه شوهری) مادر رحمانی، همان یگانه است. پدربزرگ پیروز، کاشانی است (فرض ۲)، یعنی کاشانی پدربزرگ مادری اوست، نه پدر بزرگ پدری، زیرا فامیل پدر پیروز یا رحمانی است و یا ساسانی (قسمت ۱ را در حل ببینید) و به این ترتیب مادر رحمانی و مادر پیروز، یکنفر نیست

از اینجا معلوم می‌شود که رحمانی همان پیروز نیست. ولی نام کوچك رحمانی، کاوس هم نیست زیرا این مطلب از صحبت اولیهٔ راهنماروشن می‌شود.

وقتی که نام کوچك رحمانی نه پیروز است و نه کاوس، به این معناست که نام کوچك رحمانی، همان مسعود است.

۳. وقتی که مسعود نام کوچك رحمانی است ، به این معناست که مسعود، نام کوچك جمشیدی نیست، ولی پیروزهم نام کوچك جمشیدی نیست (قسمت ۱ حل را ببینید)، بنابراین جمشیدی نام فامیل کاوس و ساسانی نام فامیل پیروز است.

۴. پیروز، امسال، برای نخستین بار، درس مجموعه‌ها را شروع کرده است. بنابراین در سال ششم تحصیل است، ولی او ۷ ساله به کلاس اول رفته است، بنابراین حالا، ۱۲ سال دارد.

۵. بنابرفرض، جمشیدی ومسعود، هرکدام یکسال از پیروزبزرگترند

(فرضهای ۳ و ۴)، یعنی جمشیدی و رحمانی ۱۳ ساله‌اند. و به‌این ترتیب

مسعود رحمانی ۱۳ ساله

کاوس جمشیدی ۱۳ ساله

پیروز ساسانی ۱۲ ساله

۲۶۲. ابتدا باید تعداد امتیازهای ۱۸ تیراندازی را نوشت، سپس‌آنها را به سه دسته (و در هر دسته ۶ عدد) تقسیم‌کرد، به نحوی‌که درهر دسته، ۷۱ امتیاز وجود داشته باشد.

تنها، به یك ترتیب می‌توان این دسته را تنظیم‌کرد، یعنی:

دستهٔ شمارهٔ ۱ : ۲۵، ۲۰، ۲۰، ۳، ۲، ۱ رویهم ۷۱ امتیاز،

دستهٔ شمارهٔ ۲ : ۲۵، ۲۰، ۱۰، ۱۰، ۵، ۱ رویهم ۷۱ امتیاز،

دستهٔ شمارهٔ ۳ : ۵۰، ۱۰، ۵، ۳، ۲، ۱ رویهم ۷۱ امتیاز.

چون شروین در دوتیراندازی اول ۲۲ امتیاز آورده است، بنابراین دستهٔ ۱ مربوط به اوست، زیرا تنها دراین دسته است‌که می‌توان دوعددبه مجموع ۲۲ پیدا کرد.

فرزاد در نخستین تیراندازی ، ۳ امتیاز آورده است و بنابراین دستهٔ ۳ متعلق به اوست، زیرا در دستهٔ دوم، حالت ۳ امتیازی وجود ندارد.

بنابراین، فرزاد تیر دایرهٔ مرکزی را انداخته است. دستهٔ شماره ۲ مربوط به سروش است.

۲۶۳. تعداد دفترچه‌هامساوی ۸، تعداد کاغذهای رنگی‌مساوی ۱۲، قیمت هرمداد گرانتر ۴ ریال و قیمت دومداد ارزانتر ۴ ریال است. می‌بینیم که همهٔ این عددها مضربی از ۴ هستند. بنابراین قیمت تمام‌آنها هم باید مضربی از ۴ باشد ، درحالیکه ۱۷۰ بر ۴ بخش‌پذیر نیست ، یعنی حساب فروشنده درست نبوده است.

۲۶۴. مساله‌هایی ازاین قبیل‌را باید باروش‌حذف حل‌کرد. توضیحاتی راکه در مسأله داده شده است، منظم می‌کنیم:

۱. A و تهرانی، پزشك‌اند.

۲. E و اصفهانی، معلم‌اند.

۳. C و تبریزی مهندس‌اند.

۴. B و F در جنگ شرکت داشته‌اند، درحالیکه تبریزی در ارتش خدمت نکرده است.

۵. رشتی از A بزرگتر است.

۶. اراکی از C بزرگتر است.

۷. B و تهرانی در یك ایستگاه بین راه پیاده شدند.

۸. C و رشتی در ایستگاه دیگری از بین راه پیاده شدند.

ازاین مفروضات، با نتیجه‌گیری منطقی، مقروضات مشخصی بدست می‌آوریم.

مثلاً، از فرض ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که A تهرانی نیست (۱) وA اصفهانی هم نیست (۲ — ۱)؛ E اصفهانی نیست(۲) وE تهرانی هم‌نیست (۲ — ۱) و غیره (آنجا که داخل‌پرانتز نوشته‌ایم (۲ — ۱)، یعنی‌نتیجه‌ای از دو فرض ۱ و ۲).

جدولی‌تشکیل می‌دهیم و باروش حذف، حالتهایی راکه ممکن‌نیست، با توجه به مفروضات، درخانه‌های آن یادداشت می‌کنیم، مثلاً وقتی‌که بنا برفرض (۱)، A تهرانی نیست، در ستون زیر A و در خانه‌ای‌که مقابل تهرانی قرارگرفته‌است، عدد ۱ را می‌نویسیم و این را به‌معنای‌آن‌می‌گیریم که تهرانی بودن را از A حذف‌کرده‌ایم. (جدول صفحهٔ بعد را ببینید).

از جدول بلافاصله نتیجه می‌شودکه C اهل‌کرمان است (زیر C در خانهٔ مقابل‌کرمانی، علامت ستاره می‌گذاریم). روشن‌است‌که بقیهٔ مسافرها کرمانی نیستند (درسطر مقابل‌کرمانی، در بقیه خانه‌ها، علامت منفی می‌گذاریم).

بلافاصله، محل سکونت A معلوم می‌شود. A اهل اراك است، در خانهٔ مربوط ستاره و در بقیهٔ خانه‌های آزاد دراین سطر ، علامت منفی می‌گذاریم.

	A	B	C	D	E	F
تهرانی	۱	۷	۸ — ۷ ۳ — ۱	—	۲ — ۱	*
اصفهانی	۲ — ۱	*	۳ — ۲	—	۲	—
تبریزی	۳ — ۱	۴	۳	*	۳ — ۲	۴
کرمانی	—	—	*	—	—	—
رشتی	۵	۸ — ۷	۸	—	*	—
اراکی	*	—	۶	—	—	—

با ادامه این روش، محل سکونت همهٔ مسافرها پیدا می‌شود:

A- اراکی؛ B- اصفهانی؛ C- کرمانی ؛ D- تبریزی؛ E- رشتی و F تهرانی است.

حالا دیگر به‌سادگی حرفهٔ هرکدام معلوم می‌شود: A و F — پزشك؛ B و E — معلم و C و D — مهندس‌اند.

بحث مربوط به یاد آوری. جدول نشان می‌دهد که رویهم ۱۷ فرض در مسأله وجود دارد. کافی بودن این شرطها، از اینجا نتیجه می‌شودکه مسأله به‌طورکامل حل شد و به تناقضی برنخورد. ولی آیا هر ۱۷ شرط برای حل مسأله، لازم بود؟ روشن است‌که نه، زیرا مثلاً دوشرط تاکید می‌کند که C تهرانی نیست.

پس چه تعداد شرط برای این مساله، لازم است؟

ازآنجاکه هرمسافر ساکن یکی از شش شهر است ، برای استفاده از روش حذف، درمورد مسافراول ۵ شرط لازم است تا معین‌کند که این مسافر درکدام ۵ شهر ساکن نیست.

سپس، برای مشخص‌کردن محل سکونت مسافردوم، لازم و کافی‌است که ۴ شرط از همان نوع داشته باشیم و غیره.

بنابراین، شرطلازم و کافی، برای تعیین محل‌سکونت شش‌مسافراینست که به اندازهٔ ۱+۲+۳+۴+۵ ، یعنی ۱۵ فرض داشته باشیم. و در مسألهٔ ما، دو شرط اضافی داده شده است.

۲۶۵. این مسأله را هم می‌توان به سادگی، و با روش مسألهٔ قبل حل‌کرد. فرضهای مسأله را ردیف می‌کنیم.

۱. در دور اول، سرتیپ با نمایندهٔ سواره نظام بازی کرد.

۲. در دور اول، نمایندهٔ نیروی هوایی شرکت نداشت.

۳. در دور دوم، نمایندهٔ پیاده نظام با سرجوخه بازی‌کرد.

۴. در دور دوم، سرهنگ با ستوان بازی‌کرد.

۵. پس از دور دوم، سرگرد از بازی خارج شد.

۶. به این مناسبت در دور سوم، گروهبان بی رقیب ماند.

۷. به‌این مناسبت، در دورچهارم بازی،نمایندهٔ نیروی دریایی بدون رقیب بود .

۸. به این مناسبت، در دور پنجم، سرهنگ بی‌رقیب بود.

۹. در دور سوم، سروان با نمایندهٔ پیاده نظام بازی‌کرد.

۱۰. در دور سوم، سرتیپ با نمایندهٔ توپخانه بازی‌کرد.

۱۱. در دور چهارم، نمایندهٔ استحکامات با سروان بازی‌کرد.

۱۲. در دور چهارم، ستوان با سرتیپ بازی‌کرد.

۱۳. دربازی‌آخر، نمایندهٔ سواره نظام با چترباز روبرو بود.

شبیه روشی‌که برای مسألهٔ قبل به‌کاربردیم، جدول لازم را برای‌قسمتها و درجه‌های شطرنج‌بازان پرمی‌کنیم(جدول صفحهٔ ۶۶۴ را ببینید).

علامتهای ستاره، قسمت هرکدام از شطرنج‌بازان را مشخص می‌کند. در جدول ۲۸ فرض وجود دارد و در واقع هم برای حل این مسأله،

	پیاده نظام	نیروی هوایی	نیروی دریایی	توپخانه	سواره‌نظام	چتربازان	استحکامات	ارتباطات
سرتیپ	۱ — ۹	۱ — ۲	۷ — ۱۲	۱۰	۱	۱ — ۱۳	۱۱ — ۱۲	*
سرهنگ	۳ — ۴	—	۷ — ۸	*	—	—	—	—
سرگرد	۵ — ۹	*	۵ — ۷	۵ — ۱۰	۵ — ۱۳	۵ — ۱۳	۵ — ۱۱	—
سروان	۹	—	۷ — ۱۱	۹ — ۱۰	*	—	۱۱	—
ستوان	۳ — ۴	—	۷ — ۱۲	۱۰ — ۱۲	۱ — ۱۲	*	۱۱ — ۱۲	—
گروهبان	۶ — ۹	—	۶ — ۷	۶ — ۱۰	—	—	*	—
سرجوخه	۳	—	*	—	—	—	—	—
سرباز	*	—	—	—	—	—	—	—

۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷، یعنی ۲۸ فرض‌لازم است. به این ترتیب، دراین مسأله، فرض اضافی وجود ندارد.

۲۶۶. وقتی‌چوبهای یك‌متری‌را به قطعه‌های نیم‌متری ببریم، تعداد قطعه‌های حاصل، مضربی از۲ می‌شود. با بریدن چوبهای یك ونیم‌متری، تعداد قطعه‌ها مضربی از ۳ و با بریدن چوبهای دومتری، تعداد قطعه‌ها مضربی از ۴ می‌شود.

جوهری و امامی، ۲۶ قطعه بدست آورده‌اند (مضرب۲).

بهشتی و اسفندیاری، ۲۷ قطعه بریده‌اند (مضرب۳).

پور جعفر وکمال ۲۸ قطعه چوب بریده تحویل داده‌اند (مضرب۴).

بنابراین بهشتی و اسفندیاری، چوبهای یك و نیم‌متری را بریده‌اند که بنابر فرض مسأله، همان احمد و نادر هستند. ولی اسفندیاری سردسته نیست و بنابراین نام کوچك او نادر است.

۲۶۷. می‌دانیم‌که بازرس قطار، درست وسط راه تهران و تبریز زندگی‌می‌کند (۲). یکی از مسافرها درتهران‌زندگی می‌کند (۱)، ودیگری در تبریز (۳)، بنابراین هیچکدام ازاین دو نفر را نمی‌توان مسافری دانست

که نسبت به دیگران، در محلی، که به محل زندگی بازرس نزدیکتر است، زندگی می‌کند (۴). بنابراین همسایه نزدیکتر بازرس، نه ابراهیمی (۱) است و نه محمدی(۵)، که‌درآمد ماهیانهٔ او باید مضربی از ۳ باشد (۴). این مسافر، افشار است. بنابراین‌فامیل بازرس قطار، افشار نیست (۳). کمك راننده هم نمی‌تواند افشار باشد (۶). به این ترتیب نام فامیل راننده‌همان افشار است.

حالا دیگر به‌سادگی می‌توان نام بقیهٔ کارکنان قطار را پیدا کرد. چون ابراهیمی مسافر، در تهران زندگی می‌کند، روشن می‌شودکه محل زندگی محمدی مسافر، در تبریز است (۳). یعنی فامیل بازرس قطار ، محمدی(۳) و نام فامیل کمك راننده، ابراهیمی است.

۲۶۸. استدلال را می‌توان، مثلاً به‌این ترتیب دنبال‌کرد: اگر(۳) درست باشد، درآنصورت (۱۰) و (۱۲) نادرست است‌که بنابر فرض ممکن نیست (یکنفر تنها یك جواب نادرست داده است). بنابراین (۳) نادرست است (یعنی تئو کیف را برنداشته است)، چون (۳) نادرست است،(۹) هم نادرست می‌شود. وقتی(۹) نادرست باشد، (۸)درست است.وقتی (۸)درست باشد، (۱۵) نادرست‌است. اگر (۱۵) نادرست‌باشد؛(۱۴)درست است. بنابر- این جودی کناهکار است .

۱.۲۶۹. عمل دوم نشان می‌دهدکه تعداد کل پاکتها برابر است با یك عدد دو رقمی که به ۷ ختم شده است. روشن است‌که رقم اول این‌عدد مساوی ۱ است، زیرا مجموع دوعدد یك رقمی از ۲۰ کوچکتر است. بنا- براین رویهم ۱۷ پاکت جمع‌آوری شده است.

۲. از عددهای یك رقمی، تنها دوعدد ۸ و ۹ به مجموع ۱۷ هستند، زیرا اگربه ۹ یك واحد اضافه‌کنیم، عددی دو رقمی‌می‌شود واگر به۸اضافه کنیم، عدد ۹ بدست می‌آید وباید ازدیگری یك واحدکم‌کنیم‌که دراینصورت مساوی۸ می‌شود، یعنی همان دو عدد نخست. به این ترتیب،گروه اول۹ پاکت وگروه دوم ۸ پاکت گیاه دارویی جمع کرده‌اند.

۳. عدد سه رقمی عمل دوم، که باید بر ۱۷ تقسیم شود، مجموع حاصلضربهای دو عمل سوم وچهارم است. چون در دوعمل سوم وچهارم ،

عددهای دورقمی بدست می‌آیدوحداکثرمجموع دوعدد دورقمی ۹۹+۹۹، یعنی ۱۹۸ است، بنابراین عدد سه رقمی مقسوم در عمل دوم، با رقم ۱ شروع می‌شود.

۴. اولین رقم خارج قسمت در عمل دوم، مساوی ۱ می‌باشد ، زیرا مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دوبا ۱ شروع می‌شوند؛ و عدد مقسوم علیه از عدد دو رقمی‌که از دو رقم اول مقسوم تشکیل شده است،کوچکتر است، والا در خارج قسمت، عدد دو رقمی بدست نمی‌آید. از اینجا نتیجه می‌شود که رقم دوم مقسوم از ۷ بزرگتر است.

۵. رقم دوم‌مقسوم در عمل دوم یا ۸ است و یا ۹، ولی ۹نمی‌تواند باشد؛ زیرا دراینصورت عدد دورقمی سطر سوم تقسیم با ۲ شروع می‌شود و هیچ عدد دو رقمی‌که با ۲ شروع شود به ۱۷ قابل قسمت نیست. یعنی رقم دوم مقسوم مساوی ۸ است. به‌این ترتیب، اولین رقم عدد دورقمی سطر سوم تقسیم‌مساوی ۱ می‌شود و به‌ناچار رقم دوم‌آن باید ۷ باشد تابر ۱۷ قابل قسمت باشد. به این ترتیب، خارج قسمت عمل دوم مساوی ۱۱ است.

جواب. گروه اول ۱۱×۹، یعنی ۹۹ ریال و گروه دوم ۱۱×۸ ، یعنی ۸۸ ریال پا داش گرفته اند.

۲۷۰. خارج‌قسمت ۵ رقمی است، ولی‌تنها سه‌حاصلضرب، زیرمقسوم نوشته‌شده است، بنابراین ۲ رقم از ۵رقم خارج قسمت، مساوی صفراست. بادقت روی حاصلضربها، معلوم می‌شودکه رقم اول و رقم آخر حاصلضرب مساوی صفر نیست، یعنی رقمهای‌دوم و چهارم خارج قسمت، که به‌وسیله فیلهای سفید و سیاه‌پوشیده شده است، مساوی صفر است. سپس می‌بینیم‌که وقتی عدد دو رقمی مقسوم علیه در ۸ ضرب می‌شود، حاصلضرب عددی‌دو رقمی بدست می‌آید؛ ولی وقتی‌که همین مقسوم‌علیه در عددی ضرب‌می‌شود که زیر رخ سفید پنهان است، حاصلضرب عددی سه رقمی می‌شود. بنابراین روشن است‌که عدد زیر رخ سفید باید بزرگتر از ۸، یعنی مساوی ۹ باشد. از حاصلضرب رقم آخر خارج قسمت درمقسوم علیه، بازهم عددی سه‌رقمی

بدست آمده است، بنابراین، رقم‌آخر خارج قسمت هم مساوی ۹ می‌باشد. به‌این ترتیب؛ عدد خارج قسمت به‌طورکامل پیدا شد: ۹۰۸۰۹.

حالا مقسوم علیه را پیدا می‌کنیم. حاصلضرب مقسوم علیه در ۸ ، عددی دو رقمی و در ۹، عددی سه رقمی می‌شود. تنها عدد دو رقمی که با این‌شرط‌هامی‌سازد، عدد۱۲ است، زیرا ۹۶ = ۸ × ۱۲ و ۱۰۸ = ۹ × ۱۲، به این ترتیب مقسوم علیه‌هم پیدا شد : ۱۲.

مقسوم علیه را درخارج قسمت ضرب می‌کنیم و حاصلضرب را با باقیماندهٔ ۱، جمع می‌کنیم، تا مقسوم پیدا شود. عدد مقسوم برابر است با: ۱۰۸۹۷۰۹.

۲۷۱. نمونهٔ اول. ابتدا حاصلضرب عدد ABC را در A درنظر می‌گیریم (سطرچهارم). رقم‌آخر این‌حاصلضرب مساوی A است، بنابراین، A نمی‌تواندمساوی ۱ باشد، زیرا دراینصورت باید C هم مساوی ۱ شود، در حالیکه طبق فرض، حرفهای مختلف، نمایندهٔ عددهای مختلف‌اند.

توجه می‌کنیم‌که A بزرگتر از ۳ هم نمی‌تواند باشد، زیرا درغیر اینصورت، باید این حاصلضرب (سطرچهارم)، بیشتر از سه‌رقم پیدا کند، درحالیکه صورت مسأله نشان می‌دهدکه سه رقمی است. بنابراین A یا مساوی ۲ و یا مساوی ۳ است . A = ۳ می‌گیریم. C چه عددی باشد تا حاصلضرب ۳ در Cبه رقم ۳ ختم شود؟ این شرط تنها برای حالت C = ۱ صدق می‌کند (۳ = ۱ × ۳). ولی C نمی‌تواند مساوی ۱ باشد، زیرا حاصلضرب ABC در C ، عددی چهار رقمی است (سطر سوم). یعنی A مساوی ۳ نیست و بنابراین A = ۲. حالا باید C را طوری انتخاب‌کنیم‌که حاصلضرب ۲ در C به رقم ۲ ختم شود. تنها عددی که برای C در این مورد صدق می‌کند، مساوی ۶ است.

حالا حاصلضرب ۶B۲ را در B بررسی می‌کنیم (سطرپنجم). آخرین رقم این حاصلضرب مساوی B است، که از حاصلضرب B در ۶ بدست‌آمده است. برای B می‌توان ۳ مقدار انتخاب کرد: ۴، ۶ و ۸. ولی ۴ × ۲۴۶ یعنی ۹۸۴، عددی سه رقمی است،درحالیکه این حاصلضرب باید چهاررقمی باشد . رقم ۶ را هم نمی‌توان انتخاب کرد ، زیرا C = ۶ بود . بنابراین

$C=۸ : ABC=۲۸۶$ و $BAC=۸۲۶$.

نمونهٔ دوم. ۱) چون ازضرب عدد سه رقمی در ۲، یك عدد چهاررقمی بدست آمده است (سطرچهارم)، ولی سطرهای سوم و پنجم، عددهایی سه رقمی هستند، هردورقم اول وآخر سطر دوم باید از۲کوچکتر، یعنی‌مساوی ۱ باشد.

به‌این ترتیب، یکی ازعاملهای‌ضرب (سطردوم) مساوی ۱۲۱ است.

۲) چون سطر سوم ازحاصلضرب عامل اول ضرب (سطراول) در ۱، بدست‌آمده است، معلوم می‌شودکه‌رقم‌دوم عامل‌اول ضرب‌مساوی ۸ است، وازآنجا رقم دوم سطر سوم هم مساوی ۸ می‌شود (سطر سوم از حاصلضرب عامل اول ضرب در ۱ بدست‌آمده است). به این ترتیب داریم:

```
  *۸*×
  ۱۲۱
 ------
  *۸*
 ****
  *۸*
 ------
 **۹*۲*
```

۳) رقم اول سطر اول از ۴ بزرگتر است، زیـرا در غیر اینصورت، سطر چهارم نمی‌تواند چهار رقمی بشود، ولی اگر رقم اول سطر اول، حتی مساوی ۹ هم باشد، رقم اول سطر چهارم‌از ۱ بزرگتر نمی‌شود. روشن‌است که رقم‌آخر همین سطر چهارم هم باید مساوی ۴ باشد (زیـرا از حاصلجمع آن با ۸، باید عددی بدست آیدکه به ۲ ختم شود؛ سطر ششم را ببینید).

۴) حالا روشن است‌که رقم اول سطر ششم نمی‌توانـد چیزی غیر از ۱باشد. همچنین رقم اول سطر پنجم (و بنابراین رقمهای اول سطر سوم و اول) ، یا۸ و یا۹ است، زیرا درغیراینصورت، سطرششم، عددی شش رقمی نمی‌شود (ضرب ابتدای صفحهٔ بعد را ببینید).

۵) چون آخرین رقم سطرچهارم مساوی۴ است،آخرین‌رقم سطرهای اول‌سوم و پنجم یا ۲ است و یا ۷.

۶) رقم سوم سطرچهارم یا ۶ است یا ۷، زیرا این رقـم عبارتست از

```
  *۸*×
   ۱۲۱
 ------
  *۸*
 ۱**۴
  *۸*
 ------
 ۱*۹*۲*
```

رقم آخر حاصلضرب ۸×۲، که‌حداکثر ممکن است یك واحد به آن اضافه شود. رقم دوم سطر چهارم، بسته به اینکه رقم اول سطر اول ۸ باشد یا ۹، یا ۷ است و یا ۹. اگررقم دوم سطر چهارم مساوی ۷ باشد، به ستونی که این رقم درآنست (۸+۷)، باید ۴ اضافه شود تا مجموع این ستون به ۹ ختم شود. ولی مجموع سه‌عدد ستون سوم (حتی اگرهرسهٔ‌آنها ۹ باشند) نمی‌تواند بیش از دو واحد به‌ستون بعد (ستون دوم) بدهد.

بنابراین دومین رقم سطر چهارم مساوی ۹ است.

۷) از شرطهای ۶ و ۴ نتیجه می‌شودکه اولین رقم سطر اول (یعنی ضمناً اولین رقم سطرهای سوم و پنجم)، تنها می‌تواند ۹ باشد:

```
  ۹۸*×
   ۱۲۱
 ------
  ۹۸*
 ۱۹*۴
  ۹۸*
 ------
 ۱*۹*۲*
```

۸) رقم سوم سطر اول یا ۲ است و یا ۷ (تا از حاصلضرب ۲ درآن به عددی با رقم آخر ۴ ـ درسطر چهارم برسیم) . ولی اگر رقم سوم سطر اول را ۲ بگیریم، از حاصلضرب ۹۸۲ در ۱۲۱ به عددی نمی‌رسیم که رقم سوم آن مساوی ۹ باشد (رقم سوم سطر ششم مساوی ۹ است).

به این ترتیب، همهٔ‌رقمهای دو عامل ضرب مغلوم شد:

$$۹۸۷ \times ۱۲۱ = ۱۱۹۴۲۷$$

نمونهٔ سوم. ۱۲۵ = ۲۵ : ۳۱۲۵

نمونهٔ چهارم. ۵۸۷۸۱ = ۱۲۵۴۷۳ : ۷۳۷۵۴۲۸۴۱۳

نمونهٔ پنجم. ۱۴۱۸ = ۹۴۳ : ۱۳۳۷۱۷۴

۱۴۱۸ = ۸۴۸ : ۱۲۰۲۴۶۴

۱۴۱۶ = ۹۴۹ : ۱۳۴۳۷۸۴

۱۴۱۹ = ۸۴۶ : ۱۲۰۰۴۷۴

نمونهٔ ششم. $\mathrm{DOREMIFASOL} = \begin{cases} ۳۴۵۶۹۰۷۲۱۴۸ \\ ۲۳۶۷۹۰۴۸۱۳۵ \end{cases}$

نمونهٔ هفتم. ۱۹۲+ ، ۲۷۳+ ، ۴۸۲+ ، ۵۹۱ ، وغیره.

۳۸۴	۵۴۶	۱۵۷	۲۷۳
۵۷۶	۸۱۹	۶۳۹	۸۶۴

نمونهٔ هشتم. ۹۰۹۹۰۸۰۹ = ۱۲ : ۱۰۹۱۸۸۹۷۰۸ .

نمونهٔ نهم. ۹۳۷۶ = ATOM . ثابت کنیدکه این تنها جواب ممکن است.

نمونهٔ دهم. ۲۵۵۷۵ = ۳۳ × ۷۷۵. ثابت کنیدکه جواب دیگری وجود ندارد.

۲۷۲. نمونهٔ اول. می‌دانیم که هرحرف نمایندهٔ یك رقم و حرفهای مختلف نمایندهٔ رقمهای مختلف است.

در عمل مربوط به ستون سمت چپ می‌بینیم‌که وقتی «ج» واحد را از «آ» واحد کم‌کنیم. بازهم همان «آ» واحد بدست می‌آید و این به معنای آنست‌که : ۰ = ج. حالا مجموع زیر را در نظر می‌گیریم :

و ی ب ب = ن ت ب + آ ی ت

مجموع دو عدد سه رقمی از ۱۹۹۸ تجاوز نمی‌کند و بنابراین : ۱ = ب. حالا داریم :

$$\begin{array}{r} + \text{آ ی ت} \\ \text{ن ت ا} \\ \hline \text{ر ی ا ا} \end{array}$$

می‌دانیم که: ۱۰ > ت، ضمناً مجموع دو رقم ستون دهگان نمی‌تواند بیش از یك واحد به ستون سدگان بدهد، بنابراین: ۹ = ت.

از تساوی: ت ر ر = و : و ی ب ب ، نتیجه می‌شود که حاصلضرب «ت» در «و» به «و» ختم می‌شود وچون ۹ = ت بود ، بنابراین «و» چیزی جز ۵ نمی‌تواندباشد: ۵ = و.

به ازای ۵ = و ، داریم

۹ ر ر = ۵ : ۵ ی ا ا

روشن است کـه از تقسیم ۱۱ سده بـه ۵، عدد ۲ بدست مـی‌آیـد، بنابراین: ۲ = ر ، و ازآنجا فوراً بدست می‌آید: ۴ = ی .

از تساوی

آ ۲۹ = ۵۰ ف − آ ۹۴

بلافاصله بدست می‌آید: ۶ = ف. و از تساوی

ن ۶ = ۰ د ا − ن ۱۹

معلوم می‌شودکه : ۳ = د. از تساوی

ت ر ر = ن ف − آ ت ر

نتیجه می‌شود:

۹ + ۲۰ + ۲۰۰ = ن − ۶۰ − آ + ۹۰ + ۲۰۰

از آنجا بدست می‌آید: ا = آ − ن، وچون تنها رقمهای ۷ و ۸ باقی مانده است، روشن است‌که : ۸ = ن، ۷ = آ.

آنچه راکه بدست آورده‌ایم در جدولی منظم می‌کنیم:

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
ت	ن	ا	ف	و	ی	د	ر	ب	ج

که دیگر کافی است آنرا بخوانیم: جبر دیوفانت.

نمونهٔ دوم. روش حل، شبیه نمونهٔ اول است. جواب چنین است :

۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
B	E	R	U	F	S	W	A	H	L

که کلمهٔ Berufswahl بدست می‌آید که در زبان آلمانی به‌معنای «انتخاب شغل» است.

۲۷۳. موتور سوار، ۲۰ دقیقه کمتر از حالتی صرف وقت کرده است که به‌طور کامل به فرودگاه می‌رفت و برمی‌گشت. صرفه‌جویی وقت به این مناسبت است که این دفعه تمام راه تا فرودگاه را نرفته است. این ۲۰ دقیقه برای رفتن از نقطهٔ برخورد با تاکسی‌بار تا فرودگاه و برعکس، صرف می‌شد. بنابراین اگر موتور سوار می‌خواست از نقطهٔ ملاقات با تاکسی بار را تا فرودگاه ادامه دهد، ۱۰ دقیقه طول می‌کشید. ولی ما می‌دانیم که موتور سوار وقتی به تاکسی‌بار رسیده است که نیم ساعت از ورود هواپیما گذشته است. وچون موتور سوار ازقسمت‌پست، سرموقع حرکت کرده بود، بنابراین اگر به این نیم‌ساعت، ۱۰ دقیقه راکه موتور سوار برای رسیدن به‌فرودگاه لازم دارد، اضافه‌کنیم، معلوم می‌شودکه هواپیما، ۴۰ دقیقه زودتر از موعد مقرر به فرودگاه رسیده است.

۲۷۴. استدلال شبیه مسألهٔ قبل است. اتومبیل به این مناسبت ۱۰ دقیقه زودتر از معمول به‌کارخانه رسیده است که تمام راه تا ایستگاه رانرفته است. این ۱۰ دقیقه، زمانی است که می‌بایست اتومبیل برای راه از نقطهٔ ملاقات با مهندس تا ایستگاه را برود و برگردد. بنابراین، اتومبیل فاصلهٔ بین نقطهٔ ملاقات با مهندس تا ایستگاه را در ۵ دقیقه طی می‌کند. همین راه را، مهندس با پای پیاده در ۸۵ دقیقه طی‌کرده است (۹۰ دقیقه‌ای که‌زودتر حرکت کرده است، منهای۵ دقیقه). یعنی وقتی‌که مهندس به اتومبیل‌رسیده است، ساعت ۸ و ۲۵ دقیقه بوده است،ضمناً روشن است که سرعت اتومبیل ۱۷ برابر سرعت پیاده است.

۲۷۵. مسألهٔ ۱.فرض می‌کنیم که هیچکدام از دوعامل، بزرگتر از ۸

نباشد. دراینصورت سه‌حالت پیش می‌آید: ۱) هرعامل مساوی ۸ است: b) یکی‌ازعاملها مساوی ۸ و دیگری‌کوچکتر از ۸ است ؛ c) هردوعامل از ۸ کوچکترند. به‌سادگی معلوم می‌شودکه درهرکدام ازاین حالتها، حاصلضرب از ۷۵ کوچکتر می‌شود، که متناقض با فرض است. بنابر این، لااقل یکی‌از عاملها، از ۸ بزرگتر است.

مسألهٔ ۲. فرض می‌کنیم که این رقم اول، غیراز واحد باشد. در اینصورت ، این رقم لااقل مساوی ۲ ، وخود عدد دو رقمی لااقل مساوی ۲۰می‌شود. ولی حاصلضرب ۲۰ در ۵ مساوی‌است‌با ۱۰۰، که یك عدد دو رقمی نیست. بنابراین رقم اول عدد مفروض دو رقمی، مساوی واحد است.

۲۷۶.۱. ۹ سکه را به ۳ گروه سه سکه‌ای تقسیم می‌کنیم. یك‌گروه راکنار می‌گذاریم و دوگروه دیگر را در دوکفهٔ ترازو قرار می‌دهیم (وزن کردن اول). دو حالت پیش می‌آید:

حالت اول. ترازو در تعادل است، یعنی سکهٔ تقلبی بین سکه‌های گروهی است‌که کنارگذاشته‌ایم. دوسکه، از سکه‌های کنارگذاشته را بر می‌داریم و هرکدام را دریکی ازکفه‌های ترازو قرار می‌دهیم (وزن‌کردن دوم). اگر یکی از سکه‌ها تقلبی باشد، کفه مربوط به‌آن بالاتر قرارمی‌گیرد (چون سکه تقلبی سبکتر است) و اگر ترازو در تعادل باشد، سکهٔ تقلبی، همان سکهٔ سوم است.

حالت دوم. ترازو درتعادل‌نیست، بنابراین سکهٔ‌تقلبی درگروهی‌است که سبکتراست. دراین صورت‌مثل‌حالت اول سکهٔ تقلبی را از بین این‌سه‌سکه جدا می‌کنیم .

۲۷۶.۲. این مسأله هم‌کاملا شبیه‌مسألهٔ قبل حل می‌شود. تنها در اینجا، وقتی‌که ۸ سکه را به سه‌گروه تقسیم می‌کنیم، در دوگروه اول،هر گروه سه‌سکه و در گروه سوم دوسکه قرار می‌دهیم. گروه‌های سه سکه‌ای را در دوکفه ترازو می‌گذاریم، اگر ترازو در تعادل باشد، سکهٔ تقلبی بین دو سکهٔ دیگر است‌که به سادگی و با قراردادن آنها دردوکفه ترازو، سکهٔ تقلبی جدا می‌شود. و اگر ترازو درحالت تعادل نباشد، کفهٔ سبکتر، شامل سکهٔ تقلبی است‌که بین‌آنها، شبیه مسألهٔ قبل ، می‌توان سکهٔ تقلبی را با یکبار وزن‌کردن، پیداکرد .

۳.۲۷۶. همهٔ اشکال کار دراینجاست که از قبل نمی‌دانیم سکهٔ تقلبی سبکتر است یا سنگین‌تر. ۱۲ سکه را به‌سه گروه تقسیم می‌کنیم، طوری‌که در هر گروه۴ سکه‌وجود داشته باشد. سکه‌هارا ازقبل شماره‌گذاری‌می‌کنیم. در یك کفهٔ ترازو گروه اول را قرار می‌دهیم، که مثلا شامل سکه‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ باشد، درکفهٔ دیگر، گروه دوم را، شامل سکه‌های ۵، ۶، ۷ و ۸ (اولین مقایسه). دوحالت پیش می‌آید:

حالت الف. ترازو در تعادل است. بنابراین سکهٔ تقلبی درگروه‌سوم به‌شماره‌های ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ قرار دارد. سه تا ازین سکه‌ها، و مثلا شماره‌های ۱۰، ۱۱ و۱۲ را با سه‌تا از سکه‌های گروه اول، ومثلا ۱،۲و۳، مقایسه‌می‌کنیم (وزن‌کردن‌دوم). اگر ترازو در تعادل باشد، معلوم‌می‌شود که سکهٔ ۱۲، تقلبی است وکافی است آنرا مثلاً با سکهٔ ۱، مقایسه کنیم (وزن‌کردن‌سوم) تا معلوم شودکه‌آیا این‌سکه‌تقلبی سبکتر است یاسنگین‌تر. اگر در مقایسهٔ دوم، ترازو در تعادل نباشد، به این معناست‌که یکی از سکه‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ تقلبی است، ضمناً از وضع قرارگرفتن ترازو در اینحالت معلوم می‌شود که آیا سکهٔ تقلبی سبکتر است یا سنگین‌تر. مثلاً اگرکفهٔ شامل سکه‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ پایین‌تر باشد، به این معناست‌که‌سکهٔ تقلبی سنگین‌تر است. حالا دیگر با یك مقایسه، شبیه مسألهٔ اول، می‌توان ازبین این سه سکه، نمونهٔ تقلبی را جدا کرد.

حالت ب. این علامتها را در نظر می‌گیریم:

○ ــ سکه،

◎ ــ سکه‌ای‌که در مقایسهٔ اول، درکفهٔ سنگین‌تر قرار دارد،

ⓞ ــ سکه‌ای‌که تقلبی نیست،

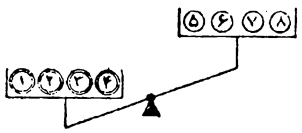
ⓞ یا ⓞ ــ سکه‌ای‌که مشکوب به تقلبی بودن است،

⟷ ــ علامت مقایسهٔ سکه‌ها

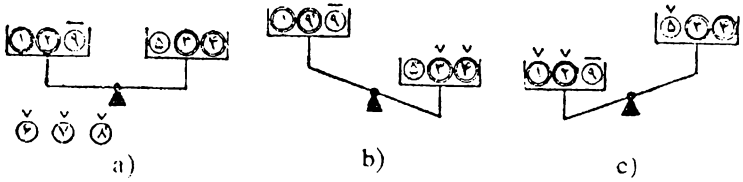
در اینصورت‌طرح حل مسأله چنین‌است (شکل‌صفحهٔ بعد را ببینید).

در مقایسهٔ اول، ترازو در تعادل نیست. فرض می‌کنیم، کفه‌ای که شامل سکه‌های ۱، ۲، ۳ و۴ است، سنگین‌ترباشد. بنابراین، اگرسکهٔتقلبی

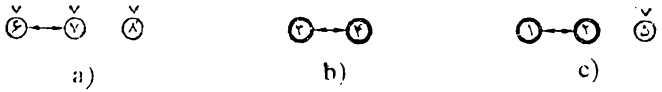
مقایسهٔ اول



مقایسهٔ دوم



مقایسهٔ سوم



بین ۱، ۲، ۳ و۴ (گروه اول) باشد، ازبقیه سنگین‌تراست واگر بین‌سکه‌های ۵، ۶، ۷ و ۸ باشد (گـروه دوم) ازبقیه سبکتراست. از اینجا ضمناًمعلوم می‌شودکه هرچهار سکهٔ گروه سوم (۹، ۱۰، ۱۱و۱۲)، سکه‌های حقیقی‌اند. برای عمل دوم، سکه‌های ۱ و ۲ و ۹ (دونکه ازگروه اول و یـك‌سکه‌از گروه سوم) را با سکه‌های ۳ و ۴ و۵ (دو سکهٔ دیگر ازگروه اول و یـك سکه از گروه دوم) ، مقایسه می‌کنیم. سکه‌های ۶ و ۷ و ۸ ازگروه دوم رافعلاً کنار می‌گذاریم. سه حالت پیش می‌آید:

۱. ترازو در تعادل‌است. دراینصورت سکهٔ تقلبی بین سکه‌های ۶، ۷ و ۸ است و ضمناً از سکـهٔ حقیقی ، سبکتـر است و دیگر به سادگـی می‌توانید با مقایسهٔ سوم سکهٔ تقلبی را ازبین آنها جدا کنید.

۲. گروه‌سکه‌های ۳ و ۴ و ۵، سنگین‌تر است. روشن است‌که‌سکهٔ تقلبی بین سکه‌های ۳ و ۴ است و بـا مقایسهٔ سومی‌کـه بین این دو سکه

انجام می‌گیرد، سکهٔ تقلبی سنگین‌تر جدا می‌شود.

۳. گروه سکه‌های ۱ و ۲ و ۹ سنگین‌ترند. مقایسهٔ سوم را بین سکه‌های ۱ و ۲ انجام می‌دهیم. اگراین دوسکه‌هم‌وزن باشند، سکهٔ تقلبی، سکهٔ شمارهٔ ۵ و از دیگران سبکتر است؛ اگرسکه‌های ۱ و ۲، هم‌وزن نباشند، سکهٔ سنگین‌تر، سکهٔ تقلبی است.

البته، این راه حل، منحصربه‌فرد نیست و برای‌مقایسهٔ دوم‌می‌توان، گروه سکه‌ها را تغییر داد.

۴.۲۷۶. راه حلهای مختلف مسأله، بعد از مقایسهٔ اول به وجود می‌آید، وقتی‌که توانسته‌ایم سکه‌ها را به سه‌گروه ۴ سکه‌ای تقسیم‌کنیم: گروه اول سنگین‌تر (گروه a) ، گروه دوم سبکتر (گروه b) و گروه سوم سکه‌های حقیقی (گروه c).

روشن است‌که برای مقایسهٔ سوم، باید چنان ترکیبی از سکه‌ها باقی بماندکه به‌شود ازبین‌آنها، سکهٔ تقلبی را جداکرد. بنابراین، بعد ازمقایسهٔ دوم می‌توانداولاً یك‌سکه ازگروه a یا ازگروه b ، ثانیاً دو سکه، هردو از گروه a یاهردو ازگروه b، یا یکی از a و دیگری از b، ثالثاً سه‌سکه، همه ازیك‌گروه، یادو سکه ازیك‌گروه ویك‌سکه ازگروه‌دیگر، وجود داشته‌باشد.

از چهارسکه‌نمی‌توان بایکبار مقایسه، سکهٔتقلبی را جداکرد وبه‌همین مناسبت، این حالت نمی‌تواند برای مقایسهٔ سوم باقی بماند. این نکته را هم باید به خاطر داشت‌که در مقایسهٔ سوم یا از سکه‌هایی‌که در مقایسهٔدوم به‌کارنرفته‌اند استفاده می‌شود (وقتی‌که ترازو درمقایسهٔ دوم درتعادل‌است) و یا از سکه‌هایی‌که درمقایسهٔ دوم به‌کار رفته‌اند (وقتی‌که در مقایسهٔ دوم، ترازو در تعادل نباشد).

ازاینجا نتیجه‌می‌شودکه درترکیبی از سکه‌ها، که در مقایسهٔ دوم‌وارد نمی‌شوند، نمی‌تواند تنها یك سکهٔ گروه a یا یك سکهٔ گروه b ، شرکت داشته باشد. زیرا دراینصورت برای مقایسهٔ دوم، ۴ سکه ازیك‌گروه و ۳ سکه ازگروه دیگرباقی می‌ماند، و اگر سکهٔ تقلبی دربین‌آنها باشد،نمی‌توان آنها را طوری باهم مقایسه‌کرد، که در مقایسهٔ سوم، سکهٔ تقلبی جداشود.

درجدول حالتهای ممکن ترکیبهایی ازسکه که درمقایسهٔ دوم می‌توانند انتخاب شوند، یا انتخاب نشوند، به نحوی که در مقایسهٔ سوم، امکان جدا کردن سکهٔ تقلبی وجود داشته باشد، داده شده است.

شمارهٔ حالتها	ترکیبها و تعداد سکه‌ها		
	سکه‌هایی که درمقایسهٔ دوم انتخاب نمی‌شود	سکه‌هایی که دو مقایسهٔ دوم انتخاب می‌شود	
۱و۲	۰a+۲b	۳a+۲b, ۱a+۴c	۲a+۱b, ۲a+۱b
۳	۱a+۱b	۲a+۲b, ۱a+۱b+۲c	
۴و۵	۰a+۳b	۳a+۱b, ۱a+۳c	۲a+۲b, ۲a+۱c
۶و۷	۱a+۲b	۲a+۲b, ۱a+۳c	۲a+۱b, ۱c+۱b+۱c

رویهم ۷ حالت برای مقایسهٔ دوم و بنابراین ۷ راه حل ممکن برای مسأله وجود دارد. برای هرکدام ازاین ترکیبها، یك ترکیب «متقارن»وجود دارد، مثلاً برای‌سکه‌هایی که انتخاب‌نمی‌شوند، می‌توان به‌جای ۰a+۲b از ۲a+۰b استفاده کرد، ولی به‌سادگی می‌توان فهمید که این دوترکیب «متقارن» جوابی نمی‌دهدکه اساساً با هفت‌جواب مذکور، متفاوت باشد.

هرکدام ازاین هفت حالت‌هم، منجر به‌حالتهای متفاوتی برای مقایسهٔ سوم می‌شود، ولی این حالتهای متفاوت هم، جوابهایی که اساساً تازه باشند، نمی‌دهند.

۲۷۷. A اینطور پیش خود استدلال می‌کند:

کاغذهای دوستان من‌سفید است. بنابراین کاغذ من ممکن است سفید

وممکن است سیاه باشد. فرض کنیم که کاغذ من سیاه باشد. دراینصورت B می‌توانست فوراً رنگ کاغذ خود را بگوید، زیرا پیش خود می‌گفت:

«من می‌بینم که کاغذ A سیاه و کاغذ C سفید است، بنابراین اگر کاغذ من سیاه بود، C بی‌درنگ می‌فهمید که کاغذ او سفید است (چون بیش از ۲ کاغذسیاه نداریم)؛ ولی C سکوت کرده است، بنابراین کاغذ من نمی‌تواند سیاه باشد و سفید است».

ولی B هم سکوت کرده است، بنابراین کاغذ من سیاه نیست، ولی اگر سیاه نباشد، حتماً سفید است.

البته استدلال A براین اساس است که به اندیشهٔ منطقی دوستان خود اعتماد داشته باشد. ولی، با توجه به اینکه هرسه‌نفر باهم، رنگ کاغذهای خود را گفته‌اند، به‌این معناست که دونفر دیگر هم دربارهٔ دوستان خودبه همین ترتیب قضاوت کرده‌اند. البته ممکن است به‌ترتیب دیگری هم‌استدلال کرده باشند: هرکدام فکر کنند که چون مسأله را برای مسابقه و انتخاب یکنفر از بین سه‌نفر درست کرده‌اند و هرکس که زودترجواب بدهد، برنده است، مسلماً مسأله را باشرایط‌مساوی برای هر سه‌نفر درست کرده‌اند، اگر مثلا یکی یا دوتا ازکاغذها سیاه باشد، درآنصورت، شرایط مساوی برای هرسه نفر وجود ندارد. و چون به بی‌نظری امتحان کننده اطمینان دارند، ناچار باید هرسه کاغذ را سفید انتخاب کرده باشند.

۲۷۸. دانشمند A اینطور استدلال می‌کند:

هرکدام از ما فکر می‌کنیم که پیشانی خودمان تمیز است و با نگاه کردن به پیشانی C می‌خندد. ولی اگر B می‌بیند که پیشانی من تمیزاست، باید از خندهٔ C تعجب کند، زیرا دراین حالت موردی برای خندهٔ C وجود ندارد. ولی در B هیچ نشانه تعجبی وجود ندارد و این به خاطرآنست که فکر می‌کند، C دارد به من می‌خندد. بنابراین صورت منهم کثیف است.

۱.۲۷۹. الف) «مجاور وتر» لازم نیست، ب) «مثلث‌قائم‌الزاویه» و و «حاده» لازم نیست.

۲.۲۷۹. الف) وتر. ب) مثلث. ج) قطر. د) مثلث متساوی‌الاضلاع.

ه) دایره‌های هم‌مرکز.

۳.۲۷۹. ارتفاع، میانه، نیمساز، محور تقارن، عمود منصف قاعده، مکان هندسی نقطه‌هایی که از دو انتهای پاره‌خط AC بیك فاصله باشند و...

۴.۲۷۹. شکل‌هندسی ← شکل مسطحه ← چند ضلعی ← چهار ضلعی محدب ← متوازی‌الاضلاع ← لوزی ← مربع.

۵.۲۷۹. مجموع زاویه‌های‌خارجی هرچندضلعی محدب برابر۴ قائمه است، بنابراین هیچ چندضلعی محدبی نمی‌تواند بیش از سه زاویهٔ منفرجهٔ خارجی داشته باشد، و ازاینجا معلوم می‌شودکه هیچ چندضلعی محدبی‌بیش از سه زاویهٔ حاده داخلی نمی‌تواند داشته باشد.

۱.۲۸۰. نتیجه گرفتیم‌که عدد مجهول زوج و مضربی از ۹ است، بنابراین‌مضربی است از۱۸. همچنین نتیجه‌گرفتیم‌که این عدد از ۲۵بزرگتر نیست. ازاینجا بلافاصله معلوم می‌شودکه عدد مورد نظر، همان ۱۸ است،

آزمایش: $۱۸ \times ۴\frac{۱}{۲} = ۸۱$.

۲.۲۸۰ a) بین این عددها، ۱۰ وجود ندارد، زیرا درغیر اینصورت حاصلضرب‌آنها به صفر ختم می‌شد؛ b) اگر همه عددها از ۱۰ بزرگتر باشد، باید حاصلضرب آنها از $۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰ \times ۱۰$، یعنی ۱۰۰۰۰، بزرگتر باشد، بنابراین بین عددها، عدد کوچکتر از ۱۰ وجود دارد؛

c) نتیجه گرفتیم‌که لااقل یکی ازعددها، از۱۰کوچکتراست،ولی‌چون متوالی‌اند، اگریکی یا دو تا یا سه تا از عددها از ۱۰ بزرگتر باشد،آنوقت یکی از عددها مساوی ۱۰ می‌شود. بنابراین هرچهار عدد از ۱۰ کوچکترو یك رقمی‌اند.

d) بین عددها، عدد ۵ وجود ندارد، زیرا حاصلضرب به ۵ یا صفر ختم نشده است؛

e) حالا دوگروه ممکن را درنظر می‌گیریم:

$e_۱$) ۱، ۲، ۳، ۴ ؛ $e_۲$) ۶، ۷، ۸، ۹

گروه اول جواب مسأله نیست، زیرا $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$ مساوی ۲۴

می‌شود، بنابراین عددهای مجهول ۶ و ۷ و ۸ و ۹ است.

آزمایش : $۶ \times ۷ \times ۸ \times ۹ = ۳۰۲۴$.

۲۸۱. سن بچه، نمی‌تواند از ۳ سال کمتر باشد (این از شرط مسأله نتیجه می‌شود) و از ۱۵ سال هم بیشتر نمی‌تواند باشد (بنابر مفهوم کلمهٔ «بچه»). بنابراین بعد از ۳ سال دیگر، سن این بچه بین ۶ سال و ۱۸ سال است. ولی بین دوعدد ۶ و ۱۸، تنها عددهای ۹ و ۱۶ مجذور کامل‌اند. باآزمایش معلوم می‌شود که ۱۶ در شرطهای مسأله صدق نمی‌کند، ولی برای ۹، سن فعلی بچه مساوی ۶ بدست می‌آید.

پاسخ پرسشهای اضافی

۱. دانشجو، این راه حلها را درنظر داشته است:

حسابی. فرض کنیم که بچه، در ۳ سال‌پیش a سال داشته باشد، در اینصورت، بنا برفرض‌مسأله، باید تفاوت این عدد و مجذورش، مساوی ۶ باشد:

$$a^۲ - a = ۶ \Rightarrow a(a-۱) = ۶$$

چون a عددی است صحیح، بنابراین باید دو عدد صحیح متوالی $(a-۱$ و $a)$ را طوری پیدا کنیم که حاصلضربشان‌مساوی ۶ شود و روشن است که تنها دو عدد ۲ و ۳ دراین شرط صدق می‌کند، یعنی $a = ۳$. و سن امروزی بچه مساوی ۶ سال می‌شود.

جبری. x را سن امروزی بچه می‌گیریم. سه سال قبل $x - ۳$ سال داشته است، و سه سال بعد $x + ۳$ سال خواهد داشت. بنابر شرط باید داشته باشیم :

$$x + ۳ = (x-۳)^۲$$

و از آنجا $$x^۲ - ۷x + ۶ = ۰$$

این معادله دو جواب دارد، $x_۱ = ۶$ و $x_۲ = ۱$. ولی بنابر مفهوم مسأله باید $x > ۳$ باشد و بنابراین تنها یك جواب داریم: $x = ۶$.

۲. سن را x می‌گیریم، بنابر فرض، باید داشته باشیم:

$$x+N=(x-N)^{۲}$$

از اینجا معلوم می‌شود که برای پیدا کردن عددهای صحیح و مثبت x و N باید مجذور کاملی انتخاب کرد و سپس دو عدد طوری انتخاب کرد که مجموعشان این مجذور کامل وتفاضلشان، جذر این مجذور کامل باشد. مثلاً اگر مجذور کامل را ۹ بگیریم، دوعددی که مجموعشان ۹ و تفاضلشان ۳ باشد ، ۶ و ۳ است وبنابراین $x=۶$ و $N=۳$. اگر عدد ۱۶ را انتخاب کنیم، $x=۱۰$ و $N=۶$ بدست‌می‌آید و اگر ۲۵ را انتخاب کنیم، $x=۱۵$ و $N=۱۰$ بدست می‌آید و غیره.

۳. فرض کنید که می‌خواهیم x را پیدا کنیم که برای عدد مفروض N ، در شرطهای مسأله صدق کند. نزدیکترین عدد مجذور کامل به $۲N$ و بزرگتر از $۲N$ را پیدا کنید و به جذر آن عدد N را اضافه کنید، x بدست می‌آید. اگرمثلاً $N=۳$ باشد، $۲N=۶$ ونزدیکترین مجذور کامل بزرگتر ازآن مساوی ۹ می‌شود، به‌جذر ۹، یعنی ۳، عدد $N=۳$ را اضافه‌می‌کنیم $x=۶$ بدست‌می‌آید. اگر $N=۱۵$ باشد، $۲N=۳۰$ و نزدیکترین‌مجذور کامل بزرگتر ازآن ۳۶ است. جذر ۳۶ مساوی ۶ و اگر $N=۱۵$ را به آن اضافهٔ کنیم $x=۲۱$ بدست می‌آید و غیره.

توضیح‌مترجم. ازمعادلهٔ $x+N=(x-N)^{۲}$ به‌معادلهٔ‌زیرمی‌رسیم:

$$x^{۲}-(۲N+۱)x+N^{۲}-N=۰ \qquad (۱)$$

چون x عددی‌است صحیح، بنابراین باید این‌معادله، ریشه‌های صحیح‌داشته باشد و برای این منظور باید مبین آن مجذورکامل شود:

$$\Delta=(۲N+۱)^{۲}-۴(N^{۲}-N)=۸N+۱$$

و باید داشته باشیم:

$$۸N+۱=K^{۲} \Rightarrow N=\frac{K^{۲}-۱}{۸}$$

روشن‌است که K باید عددی‌فرد باشد، $K=۲m+۱$ می‌گیریم، بدست‌می‌آید:

$$N=\frac{m(m+۱)}{۲}$$

و این رابطه مقادیر ممکن N را می‌دهد. به ازای هرمقدار مثبت و صحیح m ، مقداری برای N بدست می‌آید، که البته اگر در معادلهٔ (۱) قرار دهیم، مقدار x را معین می‌کند.

۲۸۲. بهترین راه برای پی بردن به عدد، اینست‌که با پرسش اول معلوم‌کنیم‌که درکدامیك از دونیمهٔ این فاصله است (بین ۱ تا ۵۰۰ یا بین ۵۰۰ و۱۰۰۰)، سپس برای فاصله‌ای‌که بدست‌می‌آید، بازهم به‌همین‌ترتیب عمل کنیم تا به نتیجه برسیم.

ولی چرا با ده پرسش می‌توان به نتیجه رسید؟

مطلب برسراینست‌که اگر فاصلهٔ بین۱و ۱۰۰۰ را ۹ بار نصف‌کنیم، به فاصله‌ای می‌رسیم‌که تنها شامل ۲ عدد است و یکی ازآنها، عدد مورد نظر. در واقع، اگر فاصله‌ای را انتخاب کنیم‌که تنها از دوعدد ۱ و ۲ تشکیل شده باشد، با دوبرابرکردن آن به فاصله‌اش شامل عددهای از ۱ تا ۴ می‌رسیم‌که دارای ۴ یا 2^2 عدد است؛ اگر این فاصله را دوباره دوبرابر کنیم، به فاصله‌ای می‌رسیم‌که شامل ۸ یا 2^3 عدد است و غیره، به‌نحوی‌که اگر کار دوبرابر کردن فاصله را ۹ بار ادامه دهیم به فاصله‌ای از عدد ۱ تاعدد 2^9 که مساوی۱۰۲۴است می‌رسیم‌ومی‌بینیم‌که از۱۰۰۰بزرگتراست.

چند مثال برای روشن شدن مطلب می‌آوریم.

مثال ۱. فرض‌کنید، عددی که دوستتان در نظرگرفته است، مساوی ۱ باشد. می‌پرسیم:

۱. آیا این عدد از ۵۱۲ بزرگتر است (۵۱۲ مساوی نصف ۱۰۲۴ است)؟

ـ نه !

۲. آیا از ۲۵۶ بزرگتراست (۲۵۶ مساوی نصف ۵۱۲ است)؟ـنهٔ!

۳. آیا از ۱۲۸ بزرگتر است، ـ نه!

۴. از ۶۴ چطور؟ ـ نه!

۵. از ۳۲ چطور ؟ نه !

۶. از ۱۶ ؟ ـ نه!

۷. از ۸ ؟ ـ نه !

۸. از ۴ ؟ ـ نه !

۹. از ۲ ؟ ـ نه !

۱۰. آیا این عدد از ۱ بزرگتر است؟ چون عدد مساوی ۱ است، بازهم دوست شما جواب منفی می‌دهد. و در اینصورت برای شما روشن می‌شودکه عدد مورد نظر همان ۱ است.

مثال ۲. فرض‌کنید، عددی راکه دوستتان درنظر گرفته است ۸۶۰ باشد .

۱. آیا از ۵۱۲ بزرگتر است؟ ـ بله

یعنی این عدد بین ۵۱۲ و ۱۰۰۰ است. ما برای سادگی، فاصلهٔ ۵۱۲ تا ۱۰۲۴ را در نظر می‌گیریم، نصف این فاصله مساوی ۲۵۶ است، آنرا به ۵۱۲ اضافه می‌کنیم و می‌پرسیم

۲ـ آیا از ۷۶۸ بزرگتر است؟ ـ بله!

بار هم نصف فاصلهٔ بین ۷۶۸ و ۱۰۲۴ را به ۷۶۸ اضافه می‌کنیم و می‌پرسیم:

۳ـ آیا از ۸۹۶ بزرگتر است؟ ـ نه !

معلوم می‌شود که عدد بین ۷۶۸ و۸۹۶ قرار دارد. به ۷۶۸، نصف این فاصله را اضافه می‌کنیم:

۴ـ آیا از۸۳۲ بزرگتر است؟ ـ بله!

پس عدد بین ۸۳۲ و ۸۹۶ است؛ نصف این فاصله، یعنی ۳۲ را به ۸۳۲ اضافه می‌کنیم و می‌پرسیم:

۵ـ آیا از ۸۶۴ بزرگتر است؟ ـ نه!

عدد مورد نظر بین ۸۳۲ و ۸۶۴ است؛ نصف این فاصله را به ۸۳۲ اضافه می‌کنیم:

۶ـ آیا از ۸۴۸ بزرگتر است؟ ـ بله !

حالا فاصلهٔ ما از ۸۴۸تا۸۶۴ است. این فاصله شامل ۱۶ عدد است،

نصف آن، یعنی ۸ را به ۸۴۸ اضافه می‌کنیم و می‌پرسیم:

۷ـ آیا از ۸۵۶ بزرگتر است؟ ـ بله!

عدد، بین ۸۵۶ و ۸۶۴ قراردارد، نصف این فاصله را به ۸۵۶ اضافه می‌کنیم :

۸ـ آیا از ۸۶۰ بزرگتر است؟ نه!

۹ـ آیا از ۸۵۸ بزرگتر است؟ بله!

حالامعلوم می‌شودکه‌عدد ما، بین یکی ازدو عدد ۸۵۹ و ۸۶۰ است. می‌پرسیم:

۱۰ـ از ۸۵۹ بزرگتر است؟ بله!

عدد مورد نظر مساوی ۸۶۰ است.

بخش دهم

۲۸۳. محاسبه را بهتر است ازآخر انجام بدهیم. بازیکن اول ، باید برای دورآخر، تنها یك شیء برای رقیبش باقی بگذارد . در دور قبل از آخر، چند شیء باید برای رقیبش نگه دارد؟ روشن است که ۵ عدد.

در واقع، اگر دراین حالت، نفردوم ۱، ۲ یا ۳ شیء بردارد، بازیکن اول به‌ترتیب ۳، ۲ یا ۱ شیء برخواهد داشت و در هرحال برای بازیکن دوم، تنها یك شیء باقی می‌ماند.

اگر همین استدلال را دنبال‌کنیم، معلوم می‌شودکه بازیکن اول، در دوربازی قبل ازآن، باید ۹ شیء برای‌رقیبش نگه داشته باشد، در اینصورت اگر بازیکن دوم ۱ ، ۲ یا ۳ شیء انتخاب کند، نفر اول متناظر با آن ۳، ۲یا۱ شیء انتخاب خواهد کرد، وبه‌هر حال ۵ شیء برای بازیکن دوم باقی می‌ماند.

تعداد کل اشیاء ۱۱ بود. بنابراین، کسی‌که بازی را شروع می‌کند، باید ۲ شیء بردارد تا برای رقیبش ۹ شیء باقی‌بماند. دراینصورت‌می‌تواند در دور دوم بازی ۵ شیء و در دور سوم بازی تنها یك شیء برای دوستش باقی بگذارد و بازی را ببرد. تعداد اشیایی‌که باید برای بازیکن دوم باقی

بماند (از آخر) عبارتند از ۱، ۵ و ۹ که تشکیل یك تصاعد عددی می‌دهند با جملهٔ اول ۱ و قدر نسبت ۴. اگر جمله‌های این تصاعد را ادامه دهیم، کلید پیروزی را برای حالتی که ۳۰ شیء داریم، پیدا می‌کنیم. این رشته عددها چنین می‌شود:

$$۱ ، ۵ ، ۹ ، ۱۳ ، ۱۷ ، ۲۱ ، ۲۵ ، ۲۹$$

بنابراین، اگر با ۳۰ شیء بازی را شروع کنیم، باید بار اول تنها یك‌شیء را برداریم تا برای رقیب ۲۹ شیء باقی بماند، در دورهای بعد به سادگی می‌توانیم ترتیبی بدهیم که برای رقیب‌ما به‌ترتیب ۲۵، ۲۱، ۱۷، ۱۳، ۹، ۵ و ۱ شیء باقی بماند و درنتیجه دربازی پیروز شویم.

حالت کلی. اگرشبیه حالت خاص بالا، استدلال کنیم، معلوم می‌شود که بازیکن اول به شرطی برنده است که بتواند برای رقیب خود به تعداد زیر از اشیاء باقی بگذارد (با درنظر گرفتن «ازآخر»):

$$۱ ، p+۲ ، ۲p+۳ ، ۳p+۴ ، \ldots$$

اگر این رشته را ادامه دهیم تا به نزدیکترین عدد کوچکتر از n برسیم، می‌فهمیم که بار اول چند شیء را بایدبرداریم. اگر مثلاً دراین رشته‌عددها، عدد N از همه به n نزدیکتر باشد (و البته کوچکتر از n)، باید برای بار اول به اندازهٔ $n-N$ شیء را از روی میز برداریم. البته درحالتی که $n-N=۰$ باشد، برای برنده شدن باید شروع بازی را به طرف مقابل واگذار کنیم.

۲۸۴. دراین حالت کسی برنده است که برای آخرین بار ۷ چوب‌کبریت برای رقیب خود باقی بگذارد. در اینصورت رقیب نمی‌تواند هر ۷ چوب کبریت را بردارد، او می‌تواند از ۱ تا ۶ چوب‌کبریت انتخاب کند و درهر حال نمی‌تواند آخرین فردی باشدکه‌چوب‌کبریتها را برداشته است. با همین روش می‌توان نتیجه گرفت که برای دور قبل ازآخر باید ۱۴ چوب‌کبریت، و در دوره‌های قبل ازآن به‌ترتیب ۲۱ و ۲۸ چوب‌کبریت برای رقیب باقی بماند.

۲۸۵. در این حالت هم، اگر بازی با روش درستی انجام شود، کسی

که بازی را شروع کرده، پیروز می‌شود. ولی پیدا کردن روش درست‌بازی، دراین موردکمی مشکلتر از حالتهای قبل است.

کسی که بازی را شروع می‌کند، می‌تواند باراول ۲ چوب‌کبریت بردارد و سپس، بسته به‌اینکه رقیبش چند چوب کبریت انتخاب می‌کند، از روش زیر استفاده کند.

اگر تعداد چوب کبریتهایی‌که رقیب دارد، زوج است، باید برای او یك واحد بیشتر از مضرب شش (۱۹، ۱۳، ۷) باقی‌گذاشت، و اگر تعداد چوب کبریتهای رقیب فرد است، باید برای او یك واحد کمتر از مضرب شش (۲۳، ۱۷، ۱۱، ۵) باقی‌گذاشت، و اگر فراهم‌کردن‌چنین وضعی‌ممکن نباشد، باید به تعدادی‌که مضرب شش باشد (۲۴، ۱۸، ۱۲، ۶)، برای‌او نگه داشت.

مثلاً، وقتی‌که شما ۲ چوب‌کبریت برداشته‌اید، رقیب شما ۴ یا ۲ چوب‌کبریت (به تعداد زوج) برمی‌دارد. ۲۱ یا ۲۳ چوب‌کبریت برای شما باقی می‌ماند. بنابرقاعده‌ای که‌گفتیم، شما باید ۲ یا ۴چوب کبریت‌بردارید تا ۱۹ چوب‌کبریت باقی بماند. ولی اگر رقیب شما، ۳ چوب کبریت انتخاب‌کرد (به تعداد فرد)، ۲۲ چوب‌کبریت برای‌شما باقی می‌ماند. چون شما نمی‌توانید کاری‌کنیدکه ۱۷ چوب کبریت برای دوستتان بماند (شماحق برداشتن ۵ چوب کبریت را ندارید)، باید ۴ چوب کبریت بردارید تا ۱۸ عدد باقی بماند. اگر رقیب شما، ۱ چوب کبریت بردارد، شما هم یکی برمی‌دارید تا ۲۳ تا برای اوبماند و غیره.

این قانون‌را با استدلال زیرمی‌توان بدست آورد (دو بازیکن را A و B می‌نامیم):

۱. فرض کنیم درآخر بازی، ۵ چوب‌کبریت برای B روی میزمانده باشد. این‌وضع به‌شرطی برای A مساعد است‌که‌تعداد چوب‌کبریتهایی‌که B تاآن موقع برداشتنه است، عددی فرد باشد (و البته دراینصورت، تعداد چوب‌کبریتهای A هم فرد است، زیرا رویهم، ۲۲ چوب‌کبریت دارند). تمام حالتهای ممکن ادامهٔ بازی را در جدول بالای صفحهٔ بعد آورده‌ایم. و همانطورکه می‌بینیم، A می‌تواند درهرحال برنده شود.

ولی اگر تعداد چوب‌کبریتهای B (ودرنتیجه A) زوج‌باشد و روی

	A	B	A	B	A	B	A	B
دارد	فرد	فرد	فرد	فرد	فرد	فرد	فرد	فرد
برمی‌دارد	—	۱	—	۲	—	۳	—	۴
برمی‌دارد	۳	۱	۱	—	۳	۱	۱	—
	زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد

میز هم ۵ چوب‌کبریت برای B باقی مانده باشد، برای A وضع مساعدی نیست و بازی را خواهد باخت (ثابت‌کنید).

۲. فرض‌کنیم که درآخر بازی، ۶ چوب‌کبریت برای B باقی مانده باشد. این حالت هم، تنها وقتی برای A مساعد است که تعداد چوب کبریتهایی‌که B دارد، فرد باشد (و روشن است‌که دراینصورت، تعدادچوب کبریتهای A، عددی زوج است). حالتهای مختلف این وضع، چنین است:

	A	B	A	B	A	B	A	B
دارد	زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد
برمی‌دارد	—	۱	—	۲	—	۳	—	۴
برمی‌دارد	۴	۱	۴	—	۲	۱	۲	—
	زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد

و اگردراین‌حالت، تعداد چوب‌کبریتهای B، عددی زوج‌باشد (و درنتیجه، تعداد چوب‌کبریتهای A، عددی فرد)، برای A وضع مساعدی نیست و بازی‌را خواهدباخت. درواقع، درچنین وضعی، B یك‌چوب‌کبریت برمی‌دارد و A را در وضع نامساعدی که با ۵ چوب کبریت روبروست، قرار می‌دهد (قسمت ۱ را ببینید).

۳. حالا فرض‌کنید، درآخربازی، ۷ چوب‌کبریت برای B باقی مانده باشد. این وضع تنها وقتی برای A مساعداست‌که تعداد چوب‌کبریتهای B، عددی‌زوج باشد (وضمناً روشن است‌که دراینصورت، تعداد چوب‌کبریتهای A هم زوج است). در واقع داریم:

	A	B	A	B	A	B	A	B
	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج
دارد								
برمی‌دارد	—	۱	—	۲	—	۳	—	۴
برمی‌دارد	۱	—	۴	۱	۴	—	۲	۱
	منجر به حالت ۱ می‌شود		زوج	فرد	زوج	فرد	زوج	فرد

و اگر B (ودرنتیجه A) دارای تعداد فردی چوب‌کبریت باشند و ۷چوب کبریت هم برای B باقی مانده است، برای A وضع مناسبی نیست و منجر به باختن او می‌شود. درواقع، دراین موقعیت، B یك‌چوب‌کبریت برمی‌دارد و برای A، ۶ چوب کبریت باقی می‌گذارد (قسمت ۲ را ببینید).

۴. درحالتهایی‌که برای A روی میز ۸، ۹ یا ۱۰ چوب کبریت‌باقی مانده باشد، برای A مناسبت نیست و منجر به باختن او می‌شود. مثلاً فرض‌کنیدکه بعداز حرکت A ، ۸ چوب‌کبریت روی میز مانده باشد. دو حالت پیش می‌آید:

I. تعداد چوب‌کبریتهای A ، عددی فرد و تعداد چوب‌کبریتهای B عددی زوج است؛B، ۳ چوب‌کبریت برمی‌دارد؛ حالاتعداد چوب‌کبریتهای Bعددی فرد است و روی‌میز۵ چوب‌کبریت مانده است و نوبت بازی‌هم،با A است. وروشن است‌که دراینحالت A بازنده است (قسمت ۱ را ببینید).

II. تعداد چوب‌کبریتهای A ، زوج و تعدادچوب‌کبریتهای B، فرد است. B، یك چوب‌کبریت برمی‌دارد و درنتیجه صاحب تعداد زوجی‌چوب کبریت می‌شود. و اینحالت‌که ۷ چوب کبریت روی میز می‌ماند و نوبت بازی هم با A است (که‌تعداد چوب‌کبریتهایش زوج است)، منجر به‌باختن A می‌شود (قسمت ۳ را ببینید).

به‌همین ترتیب، می‌توان برای حالتهایی هم‌که روی میز ۹ یا ۱۰ چوب‌کبریت در مقابل B قرارگرفته است، آزمایش‌کرد.

۵. حالتهایی‌راکه‌روی‌میز، بعد از بازی A، ۱۱، ۱۲، ۱۳،...چوب

کبریت باقی‌مانده باشد ، می‌توان به سادگی منجر به‌حالتهایی کردکه تعداد چوب‌کبریتهای‌روی میز ۵، ۶، ۷،... در مقابل B قرارگرفته باشد .

مثلاً ، فرض‌کنیدکه بعد ازبازی A، ۱۱ چوب‌کبریت روی میزمانده باشد. به سادگی‌می‌توان ثابت‌کردکه A وقتی برنده است‌که B (و درنتیجه خود A) دارای تعداد فردی چوب‌کبریت باشند. در واقع:

	A	B	A	B
دارد	فرد	فرد	فرد	فرد
برمی‌دارد	—	۱ یا ۳	۲ یا ۴	—
برمی‌دارد	۳ یا ۱	—	—	۴ یا ۲
	منجر به حالت ۳ می‌شود		منجر به حالت ۱ می‌شود	

خودتان امتحان‌کنیدکه برای حالت ۱۲ یا ۱۳ چوب‌کبریت باقیمانده ، چه وضعی پیش می‌آید.

۶. حالا این مطلب باقی مانده است‌که ثابت‌کنیم چرا برای ۲۷ چوب‌کبریت، باید درحرکت اول ۲چوب‌کبریت برداشت، نه‌بیشترونه‌کمتر. اگرشما یك چوب‌کبریت بردارید،رقیب شما می‌تواند ۲ چوب‌کبریت بردارد و ۲۴ چوب‌کبریت برای شما باقی بگذارد و شما نمی‌توانید آنها را به ۱۹ چوب‌کبریت برسانید تا وضع برنده برایتان به وجود آید.

اگر شما ۳ چوب‌کبریت بردارید ، رقیب شما یکی برمی‌دارد و ۲۳ تا برای‌شما باقی می‌گذارد. وکسی‌که۲۳ چوب‌کبریت درمقابل‌خود دارد و تعدادچوب‌کبریتهای خودش فرد است،حتماًبازنده است (قسمت۵ را ببینید).

اگر شما ۴ چوب کبریت بردارید. رقیب شما هم ۴ چوب‌کبریت برمی‌دارد و ۱۹ چوب‌کبریت درمقابل شما باقی می‌گذارد و شماکه تعداد چوب‌کبریتهایتان زوج است و۱۹ چوب‌کبریت هم در برابر خود دارید،حتماً بازنده خواهید بود (قسمت ۵ را ببینید).

ولی اگر ۲ چوب کبریت بردارید، هرچند چوب‌کبریت‌که رقیب شما

بردارد، شما می‌توانید وضع را به حالتی در آورید که برایتان مساعد باشد.

۲۸۶. حالتهای مختلف وضع «ن»، دنبالهٔ زیر را تشکیل می‌دهد:

$$(۱\,,\,۲)\ ;\ (۳\,,\,۵)\ ;\ (۴\,,\,۷)\ ;\ (۶\,,\,۱۰)\ ;\ (۸\,,\,۱۳)\ ;\ (۹\,,\,۱۵)\ ;\ \ldots$$

عددهای اول این دنباله را به a_i و عددهای دوم آنرا به b_i نشان می‌دهیم و آنها را در دو رشته منظم می‌کنیم:

$$(I)\begin{cases} a_۱\,,\,a_۲\,,\,a_۳\,,\,a_۴\,,\,a_۵\,,\,a_۶\,,\ldots \\ ۱\,,\,۳\,,\,۴\,,\,۶\,,\,۸\,,\,۹\,,\ldots \end{cases}$$

$$(II)\begin{cases} b_۱\,,\,b_۲\,,\,b_۳\,,\,b_۴\,,\,b_۵\,,\,b_۶\,,\ldots \\ ۲\,,\,۵\,,\,۷\,,\,۱۰\,,\,۱۳\,,\,۱۵\,,\ldots \end{cases}$$

می‌بینیم که $b_۱$ ، یك واحد از $a_۱$ بزرگتر است، $b_۲$ ، ۲ واحد از $a_۲$ بزرگتر است... b_n ، n واحد از a_n بزرگتر است، به نحوی که

$$b_n = a_n + n$$

رشتهٔ اول عددها را برچه اصلی می‌توان ساخت؟

می‌دانیم که $a_۱ = ۱$ و $b_۱ = ۲$. دنبالهٔ جدید (III) را فعلاً با این دوعدد ، تشکیل می‌دهیم:

$$(III)\ \{\ ۱\,,۲\,,\ldots$$

کوچکترین عدد طبیعی که دراینجا وجود ندارد، عدد ۳ می‌باشد وآن عدد بعدی رشتهٔ (I) است: $a_۳ = ۳$. ازآنجا $b_۲ = ۳ + ۲ = ۵$.

دنبالهٔ (III) را با عددهای ۳ و ۵، ادامه می‌دهیم:

$$(III)\{\ ۱\,,\ ۲\,,\ ۳\,,\ ۵\,,\ldots$$

کوچکترین عدد طبیعی که در اینجا وجود ندارد، ۴ است و آن عدد بعدی رشتهٔ (I) است: $a_۴ = ۴$. ازآنجا $b_۳ = ۴ + ۳ = ۷$. دراینصورت

$$(III)\{\ ۱\,,\ ۲\,,\ ۳\,,\ ۴\,,\ ۵\,,\ ۷\,,\ldots$$

باهمین‌روش، معلوم‌می‌شود که $a_۴ = ۶$. وازآنجا $b_۴ = ۶ + ۴ = ۱۰$ و غیره.

به این ترتیب، در هروضع «ن» (a_n , b_n)، عدد کوچکتر a_n برابر است با کوچکترین عدد طبیعی که هنوز در دنبالهٔ (a_i , b_i) $(i < n)$ نیامده است. با رابطه‌های

$$a_n = \left[\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} n\right] \quad و \quad b_n = \left[\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲} n\right]$$

که به وسیلهٔ پروفسور آرنولد[۱] داده شده است، می‌توان به‌طور مستقیم، همهٔ حالتهای «ن» را پیدا کرد (با قراردادن $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$). $[K]$، یعنی بزرگترین عدد صحیح M، که در نامساوی $M \leqslant K$ صدق کند. مثلاً $[۱/۶۱] = ۱$، $[\pi] = ۳$ و غیره. برای اینکه به نظریهٔ بازی تسه زیان شیتز بیشتر آشنا شویم، قضیه‌ای را که متعلق به مین سی خائو، ریاضیدان چینی است، بدون اثبات می‌آوریم.

با رعایت قاعدهٔ بازی، نمی‌توان هروضع «ن» را با یك حرکت به‌وضع دیگری که بازهم «ن» باشد، تبدیل کرد، ولی از هروضعی که «ن» نیست، می‌توان با یك حرکت، به وضع «ن» رسید.

ازاین قضیه نتیجه‌می‌شود که هر وضعی که درگروه «ن» نیست، متعلق به‌گروه «م» است.

ضمناً، عدد $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$، که به‌کمك آن به سادگی می‌توان زوج عددها را به دست آورد، پیروزی در بازی تسه زیان شیتز را تأمین می‌کند. این عدد باید برای دانش‌آموزان سالهای‌آخر دبیرستان آشنا باشد. این همان ضریب تقسیم طلایی است. همین عدد در رابطه‌ای دخالت‌کرده است که به کمك‌آن می‌توان هرعدد دلخواه از رشتهٔ فیبوناچی را پیداکرد، بدون اینکه از عددهای قبل ازآن آگاهی داشته باشیم (صفحهٔ ۴۸۸ را ببینید).

بستگی بین رابطهٔ‌مربوط به بازی و رابطهٔ‌مربوط به‌عددهای‌فیبوناچی تصادفی نیست. ای.م.آبراموف، یکی از دوستان پروفسور آرنولد، ثابت

---

۱) بعدها، این رابطه‌ها، با روشی کم و بیش متفاوت، دوباره به وسیلهٔ مین سی خائو، ریاضیدان چینی بدست‌آمد که شرح‌آن به زبان چینی در سال ۱۹۵۲، دریك مجلهٔ چینی چاپ شد.

کردکه با استفاده از عددهای رشتهٔ فیبوناچی:

$$۱ ، ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۵ ، ۸ ، ۱۳ ، ۲۱ ، ۳۴ ، \ldots ، u_n ، \ldots$$

که درآن $u_۰ = ۱$ ، $u_۱ = ۱$ و سپس $u_n = u_{n-۱} + n_{n-۲}$ ، می‌توان زوج عددهای مربوط به‌حالتهای «ن» را به ازای هرمقدار دلخواه n پیدا کرد.

برای این منظور، باید n ، شمارهٔ زوج مجهول، را به عنوان مجموعی از عددهای فیبوناچی درنظرگرفت، به‌نحوی که حتماً شامل $u_۰$ هم باشد. در اینصورت a_n و b_n به‌صورت مجموعی ازجمله‌های رشتهٔ فیبوناچی درمی‌آید، که شمارهٔ آنها به‌ترتیب ۱ و ۲ واحد بیشتر از شمارهٔ عددهایی است که عدد n را تشکیل داده‌اند.

مثلا، فرض کنید $n = ۷$. داریم: $۷ = ۱ + ۱ + ۵$ یا

$$۷ = u_۰ + u_۱ + u_۴$$

دراینصورت:

$$a_n = u_۱ + u_۲ + u_۵ = ۱ + ۲ + ۸ = ۱۱$$

$$b_n = u_۲ + u_۳ + u_۶ = ۲ + ۳ + ۱۳ = ۱۸$$

حالا خودتان تحقیق کنید که زوج (۱۸ ، ۱۱)، یک‌وضع «ن» است.

۲۸۹. اگر شما می‌خواهید قبل از دوستتان به ۱۰۰ برسید، باید قبل از او به ۸۹ برسید. در واقع، وقتی که شماعددی را اعلام کنید که تنها ۱۱ واحد تا ۱۰۰ فاصله داشته باشد، هرعددی که دوستتان به‌آن اضافه کند (۱۰ یا کمتر ازآن)، شما بلافاصله می‌توانید، عدد ۱۰۰ را اعلام کنید. اما برای اینکه، شما برای اولین‌بار به عدد ۸۹ برسید، باید قبل از دوستتان به‌عدد ۷۸ دست‌یابید (۱۱ واحدکمتر از ۸۹). با ادامهٔ این استدلال می‌توانیدرشتهٔ عددهایی بدست آوریدکه هرکدام ازآنها، ۱۱ واحدکمتر از عدد قبلی است. این عددها (با شروع ازکوچکترین) چنین‌اند:

$$۱ ، ۱۲ ، ۲۳ ، ۳۴ ، ۴۵ ، ۵۶ ، ۶۷ ، ۷۸ ، ۸۹$$

حالا روشن است که اگر شما عدد ۱ را نام ببرید، دوست شما، هرعددی‌راکه بگوید، می‌توانید برای مرتبهٔ دوم، عدد ۱۲، سپس ۲۳، بعد ۳۴ و غیره‌را نام‌ببرید. به‌خاطر سپردن این‌عددهاساده است: درهرکدام ازآنها، عددیکان، یک واحد از عدد دهگان، بزرگتر است.

بازی را می‌توان باتغییر حداکثر عددی‌که می‌توان اضافه‌کرد وتغییر مرز حاصلجمع، به صورتهای دیگری درآورد.

مثلاً، فرض‌کنید، حداکثر مقداری را که به توان به‌عدد قبلی اضافه کرد، همان ۱۰ باشد، ولی مرزحاصلجمع، به‌جای ۱۰۰، مساوی۱۲۰باشد. اگر مرتب عـدد ۱۱ را از ۱۲۰ کم‌کنیم، رشته عـددهای زیرکـه کلیدکار برای پیروزی است، بدست می‌آید:

۱۰۹ ، ۹۸ ، ۸۷ ، ۷۶ ، ۶۵ ، ۵۴ ، ۴۳ ، ۳۲ ، ۲۱ ، ۱۰

با در دست داشتن این رمز و با شروع ازعدد ۱۰، می‌توان برنده شد.

حالا فرض کنید مرز حاصلجمع را همان ۱۰۰ بگیریم، ولی حداکثر عددی‌که به‌توان به مجموع قبلی اضافه‌کرد، به جای ۱۰، مساوی ۸باشد. دراین صورت کلید کار با رشتهٔ عددهای زیر بدست می‌آید.

۹۱ ، ۸۲ ، ۷۳ ، ۶۴ ، ۵۵ ، ۴۶ ، ۳۷ ، ۲۸ ، ۱۹ ، ۱۰ ، ۱

اگرحداکثر عددی‌که می‌توان اضافه‌کرد، مساوی۹باشد، رشتهٔ کلیدی عددها چنین می‌شود

۹۰ ، ۸۰ ، ۷۰ ، ۶۰ ، ۵۰ ، ۴۰ ، ۳۰ ، ۲۰ ، ۱۰

ولی در این حالت، اگر می‌خواهیدبرنده شوید، باید شروع بازی رابه‌عهدهٔ دوستتان بگذارید، مگر اینکه او اصلا از رمـز بازی اطلاع نداشته باشد.

۲۹۰. اگر میدان بازی از یك مربع ۹ خانـه‌ای تشکیل شده باشد، باید از یکی از ضلعهای مربع مرکزی، و مثلاً ضلع a، شروع‌کنید (شکل a). اگر دراین‌حالت،رقیب شما، ضلع یکی از سه مربع ستون چپ راکامل کند، شما می‌توانید بلافاصله، تمام مربعهای این ستون را بگیریـد و سپس (با توجه به حالت ۳ ـ صفحهٔ ۲۶۷)، در مستطیلی‌کـه باقی می‌مانـد، تمام خانه‌ها را بگیرید و پیروزی‌کامل بدست‌آورید. اگـر رقیب شما، درجـواب حرکت اول شما (که ضلع a را کامل کرده‌اید)، یکی دیگر از ضلعهای‌همین مربع مرکزی (و مثلاً ضلع b) را کامل‌کند، شما بلافاصله، ضلع سوم(ضلع c) ازهمین‌مربع راکامل می‌کنید (شکلb) و رقیب، برای‌اینکه تمام ۹خانه را از دست ندهد، به‌ناچار خانهٔ مرکزی را می‌گیرد و ۸ خانـهٔ دیگر را از

دست می‌دهد. اگر درجواب حرکت اول شما، یکی از ضلعهای مربعهای ستون سمت راست ، و مثلاً ضلع x کامل شود (شکل c) ، شما می‌توانید خانهٔ سمت راست و بالا را بگیرید و سپس ضلع y را کامل کنید و دوباره هر ۹ خانه را بگیرید.

۱ ۳	۵	۲ ۸	۳ ۷
۴ ۴	۵ ۵	۶	۷
۶ ۳	۶	۱	۷ ۹
۸ ۴	۷	۹ ۳	۹

۱.۲۹۴. برای عدد شمارهٔ ۵ عمودی دو حالت‌ممکن‌است: این‌عدد یا۵۴۳است ویا ۵۶۷. اول ۵۴۳ راآزمایش می‌کنیم. اگر اینطورباشد، دورقم اول عدد چهار رقمی‌شمارهٔ۶ افقی‌مساوی ۳۴ می‌شود و تمام این عدد چهاررقمی هم از حاصلضرب ۷۷ در $\overline{x۳}$ بدست می‌آید (x ، رقم دهگان هنوز معلوم نیست). مناسب‌ترین رقمی مربوط به مسألهٔ۱ - ۲۹۴ که به‌جای x می‌توان قرارد، ۴ است، ولی دراینصورت ۴۳ × ۷۷ مساوی ۳۳۱۱ می‌شود که رقم سدگان آن با رقم مورد نظرما تطبیق‌نمی‌کند.

حالا، عدد ۵۶۷ را برای شمارهٔ ۵ عمودی آزمایش می‌کنیم. دو رقم اول عدد چهار رقمی شمارهٔ ۶ افقی مساوی ۳۶ می‌شود و چون‌حاصلضرب ۴۷ × ۷۷ مساوی ۳۶۱۹ می‌شودکه دو رقم اول آن با رقمهای پیش‌بینی شده تطبیق می‌کند . از اینجا خود به خود عدد شمارهٔ ۸ افقی هم معلوم می‌شود.

حالا به جستجوی عدد شماره۷ عمودی و شمارهٔ ۹ افقی می‌پردازیم. ضرب‌کردن عاملی ازعدد شمارهٔ ۱ افقی در عاملی ازعدد شمارهٔ ۳ عمودی، به‌سادگی روشن می‌کندکه‌عدد شمارهٔ ۷ عمودی مساوی ۹۹ است و از آنجا به سهولت بدست می‌آید که عدد شمارهٔ ۹ افقی مساوی ۳۹ است. به این ترتیب، همهٔ خانه‌های مربع پرشده است (شکل را ببینید).

۲.۲۹۴. جواب را مثلاً به ترتیب‌زیر می‌توان بدست آورد. قبل از همه، دوعدد شماره‌های ۱ و ۸ افقی را پیدا می‌کنیم.

برای تشکیل این دو عدد پنج‌رقمی، باید از همهٔ ده رقم استفاده‌کرد و ضمناً می‌دانیم‌که تفاضل این دوعدد هم، یك عدد سه رقمی است (شمارهٔ ۳ عمودی). ازاینجا نتیجه می‌شود که اختلاف رقم اول (از سمت چپ) عدد شمارهٔ۱ افقی و رقم‌اول عدد شمارهٔ ۸ افقی مساوی واحد است. وچون

۱۵	۰	۲۱	۳۲	۴۳
۵۱	۶	۷۷	۴	۲
۸۴	۹	۸	۷	۶
۹			۱۰۱	۱۱۱
۱۲				

a)

۱۵	۰	۲۱	۳۲	۴۳
۵۱	۶۹	۷۷	۴	۲
۸۴	۹	۸	۷	۶
۹۱	۱	۱	۱۰۱	۱۱۱
۱۲۷	۴	۲	۹	۳

b)

مربوط به مسألهٔ ۲-۲۹۴

در عدد شمارهٔ ۱ عمودی، رقم اول مساوی‌مجموع دو رقم دیگر است، رقم وسط این عدد مساوی‌واحد می‌شود. به‌این ترتیب رقم اول عددهای‌شمارهٔ ۵ افقی و شمارهٔ ۱۰ عمودی پیدا شد (شکل a را ببینید).

اگربزرگترین‌عامل عدد شمارهٔ۳ عمودی، باواحد شروع شود(شمارهٔ ۵ عمودی‌را ببینید)، بدون تردید، کوچکترین عامل دو رقمی‌آنهم با واحد شروع خواهد شد. به‌این ترتیب، رقم اول شمارهٔ ۱۱عمودی هم پیدا شد.

دو رقم اول شمارهٔ ۲ عمودی هم، طبق فرض ۱ و ۷ است، یعنی‌این عدد با ۱۷ شروع می‌شود. شمارهٔ ۷ افقی مقلوب شمارهٔ ۳ عمودی است، بنابراین رقم آخر شمارهٔ ۳ عمودی، یعنی‌دهگان شمارهٔ ۸ افقی هم مساوی ۷ می‌شود. چون ازیکطرف دو رقم یکان ودهگان عددشمارهٔ۹ افقی‌مساوی واحد شده است و ازطرف دیگر عدد شمارهٔ ۹ افقی یك‌نهم مجموع دو عدد شماره ۱ و شماره ۸ افقی است، بنابراین باید مجموع یکانها و همینطور مجموع دهگانهای دو عدد شماره ۱ و شمارهٔ ۸ افقی مساوی ۹ شود. از اینجا اولین رقم عدد شمارهٔ ۳ عمودی مساوی ۲ بدست می‌آید. همین ۲، رقم آخر عدد شمارهٔ ۷ افقی هم می‌باشد. اگر x و y را به ترتیب رقمهای یکان شمارهٔ ۱ و شمارهٔ ۸ افقی بگیریم، از یکطرف باید $x+y=9$ و از طرف‌دیگر $y=2x$ (شمارهٔ۴ عمودی) باشد. ازآنجا $x=3$ و $y=6$ بدست می‌آید. عدد شمارهٔ ۴ عمودی به‌طور کامل پیدا شد: ۳۲۶.

رقم‌دوم شمارهٔ۷افقی (باتوجه‌به‌شمارهٔ ۳ عمودی). مساوی۷ — ۱۱،

یعنی ۴ می‌شود. با دردست‌داشتن سدگان شماره۱ افقی (۱) و سدگان تفاضل شماره‌های ۱ و ۸ افقی (۲)، به‌سادگی می‌توان سدگـان شمارهٔ ۸ افقی را پیداکرد: این سدگان مساوی ۸ است. در شمارهٔ ۱ عمودی رقم اول و آخر بین‌عددهای ۰، ۴، ۵ و ۹ است، زیـرا بقیهٔ رقمها درشماره‌های ۱ و ۸ افقی مصرف شده است، چـون رقـم اول این عدد بایـد مساوی مجموع دو رقـم دیگر باشد (با توجه بـه‌اینکه رقـم دهگان آن مساوی واحد است)، تنهـا می‌تواند ۵ و رقم آخرمساوی۴ باشد. رقمهای دوم شماره‌های ۱ و ۸ افقی هم دیگر به سادگی بـدست مـی‌آیند (۰ درشمارهٔ ۱ و ۹ درشمارهٔ ۸ افقی). حالا دیگر تمام عدد شمارهٔ۹ افقی پیدا می‌شود (۱۱۱۱۱). عدد ۲۴۷دارای دو عامـل است: ۱۹ و ۱۳. از اینجا عددهای شمارهٔ ۵ افقـی و ۱۰ و ۱۱ عمودی بدست می‌آید.

حالا به سراغ عدد شمارهٔ۶ عمودی می‌رویم. مقلوب آن عددی‌است چهار رقمی، که به ۹۹ ختم می‌شود و از حاصلضرب ۲۴۷ در یك عدداول دو رقمی بدست می‌آید. با آزمایش معلوم می‌شودکه این عامل ۱۷ است. بنابراین مقلوب شمارهٔ۶ عمودی۴۱۹۹ خواهد شد، که‌ازسه عامل اول۱۳، ۱۷ و ۱۹ تشکیل شده است. عددشمارهٔ ۶ عمودی ۹۹۱۴ است. حالا دیگر به سادگی شمارهٔ ۹ عمودی و شمارهٔ ۱۲ افقی پیدا می‌شود (جـدول کامل شده را درشکل صفحهٔ قبل ببینید).

۱ ۵	۲ ۳	۲	۳ ۹		۴ ۱
۵ ۱	۱		۶ ۷	۷ ۲	۹
	۸ ۷	۹ ۳		۴	
۱۰ ۶	۹	۸	۱۱ ۸	۹	۱۲ ۶
۱۳ ۳	۹		۱۴ ۳	۶	۵
۸		۱۵ ۱	۶	۰	۰

مربوط به مسألهٔ ۳-۲۹۴

۳.۲۹۴. اگر به‌جدول‌مجذور عددهای سه رقمی مراجعه‌کنیم، تنها یك عدد وجود داردکه ازچپ به‌راست یا از راست به‌چپ، هرجور خـوانده شود، یك عددبدست‌می‌آید. ۶۹۸۸۹۶. با بدست‌آمدن‌این‌عدد، عددهای‌شماره‌ـ ۱۰ و ۱۱ عمودی‌هم فوراً پیدامی‌شود و به‌دنبال‌آن، عددهای شماره‌های ۴ و ۹عمودی و شماره‌هـای ۱۳ و ۱۵ و ۵ افقی بلافاصله معلوم می‌شود.

عدد شمارهٔ ۱ عمودی، باحل یك مسألهٔ کوچك بدست می‌آید: عددی پیدا کنید که درتقسیم برعددهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، به ترتیب باقیمانده‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ بدست‌آید. اگر این عدد را یك واحد بزرگتر بگیریم، بر ۲، ۳، ۴، ۵ و ۵ قابل قسمت خواهد بود. چنین عددی مساوی ۶۰ وعدد مجهول‌مساوی ۵۹ است. ازآنجا، عدد شمارهٔ ۱ عمودی‌مساوی ۵۱ می‌شود. عدد شمارهٔ ۱ افقی را پیدا می‌کنیم. تنها دو عدد چهار رقمی وجود دارد که با ۵ شروع شود و مجذور یك عدد اول باشد، یکی ۵۰۴۱ که مجذور عدد ۷۱ است و دیگری ۵۳۲۹ که مجذور عدد ۷۳ است. اولی قابل قبول نیست، زیرا دراینصورت عدد شمارهٔ ۲ عمودی با صفر شروع می‌شود. با دردست داشتن عدد شمارهٔ ۱ افقی، عدد شمارهٔ ۸ افقی هم بلافاصله پیدا می‌شود (۷۳)، عدد شمارهٔ ۲ عمودی خود به‌خود معین شده است. تنها این‌می‌ماند که مجموع رقمهای آن‌را آزمایش کنیم. تنها عدد اول دو رقمی که با رقم ۹ شروع می‌شود برابر است با ۹۷ و به‌این ترتیب عدد شماره ۳ عمودی هم پیدا می‌شود. دنبالهٔ کارساده‌است. حل کامل‌درشکل صفحهٔ قبل‌داده شده است.

۲.۲۹۵. فرض کنیددوستتان عدد n و شما، عدد p را فکر کرده‌باشید اگر این دو عدد را به‌ترتیب در عددهای مشابه ضرب و برعددهای مشابه تقسیم کنیم، بدست می‌آید:

$$n\frac{abc\ldots}{xyz\ldots} \quad , \quad p\frac{abc\ldots}{xyz\ldots}$$

که روشن است، اگر عدد اول را به n و عدد دوم را به p تقسیم کنیم، یك جواب بدست می‌آید:

$$\frac{abc\ldots}{xyz\ldots}$$

با در دست‌داشتن این عدد و مجموع $n+\frac{abc\ldots}{xyz\ldots}$، به سادگی‌می‌توان‌عدد n را پیدا کرد.

۳.۲۹۵. حالت اول. عدد اصلی به‌شکل $4n$ است. عملهای لازم را

انجام می‌دهیم:

$$۴n+۲n=۶n \; ; \; ۶n+۳n=۹n \; ; \; ۹n : ۹=n$$

باقیماندهٔ تقسیم مساوی صفر، و بنابراین عدد اصلی مساوی ۴n می‌باشد.

حالت دوم. عدد اصلی به‌صورت ۴n+۱ است. قسمت بزرگتر آن مساوی ۲n+۱ می‌شود. داریم:

$$(۴n+۱)+(۲n+۱)=۶n+۲ \; ; \; (۶n+۲)+(۳n+۱)=۹n+۳ ;$$

$$(۹n+۳)=۹\times n+۳$$

باقیماندهٔ تقسیم از پنج کوچکتر است و بنابراین عدد اصلی مساوی ۴n+۱ می‌شود.

حالت سوم. عدد اصلی به‌صورت ۴n+۲ است. داریم:

$$(۴n+۲)+(۲n+۱)=۶n+۳$$

به این مجموع، قسمت بزرگتر آن، یعنی ۳n+۲ را اضافه می‌کنیم:

$$(۶n+۳)+(۳n+۲)=۹n+۵ \; ; \; (۹n+۵)=۹\times n+۵$$

باقیماندهٔ تقسیم مساوی پنج است و بنابراین عدد اصلی مساوی ۴n+۲ می‌شود.

حالت چهارم. عدد اصلی را به‌صورت ۴n+۳ فرض می‌کنیم. قسمت بزرگتر مساوی ۲n+۲ می‌شود. داریم:

$$(۴n+۳)+(۲n+۲)=۶n+۵$$

که قسمت بزرگتر آن مساوی ۳n+۳ است و بدست می‌آید:

$$(۶n+۵)+(۳n+۳)=۹n+۸$$

باقیماندهٔ تقسیم این عدد بر ۹، مساوی ۸ و بزرگتر از پنج است (خارج قسمت تقسیم بر ۹، مساوی n است)، بنابراین عدد اصلی مساوی ۳+۴n می‌شود.

۴.۲۹۵. روشن است که (مسألهٔ قبل را ببینید) اگر عدد اصلی به‌صورت ۴n باشد، نتیجهٔ محاسبه‌ها مساوی ۹n و مضربی از ۹ می‌شود. بنابراین، مجموع رقمهای این عدد باید بر ۹ قابل قسمت باشد و این به معنای آنست

که رقم‌حذف شده‌مساوی فاصلهٔ این مجموع تا نزدیکترین‌مضرب ۹می‌باشد. و اگراین‌مجموع، خود مضربی از۹ باشد، رقم حذف‌شده مساوی صفر یا۹ است، ولی چون صفر را حق نداشت حذف کند، جـواب همان ۹ می‌شود.

برای عددی‌که به‌یکی از صورتهای $۴n+۱$ ، $۴n+۲$ و $۴n+۳$ باشد، نتیجهٔ محاسبه به‌ترتیب، به‌صورتهای $۹n+۳$، $۹n+۵$ و $۹n+۸$ درمی‌آید. مجموع رقمهای این عـددها، وقتی مضربی از ۹ می‌شودکـه در حالت اول ۶ واحد، در حالت دوم، ۴ واحد و درحـالت سوم یك واحد بـه آن اضافه‌کنیم. یعنی دراین حالتها به‌کمك نزدیکترین مضرب ۹، رقم حذف شده، بدست می‌آید.

۵.۲۹۵. عدد اصلی‌را x ، و عددی راکه باید به‌آن اضافـه‌کنیم، y فرض می‌کنیم. عملهای لازم را انجام می‌دهیم:

$$(x+y)^۲-x^۲=۲xy+y^۲=۲y(x+\frac{y}{۲})$$

و این نتیجه، راه کشف مسأله را روشن می‌کند.

۶.۲۹۵. عدد اصلی را x، خارج قسمت تقسیم این عدد را بر۳، ۴ و ۵ ، به ترتیب a ، b و c و باقیمانده‌هـای تقسیم را $r_۱$ ، $r_۲$ و $r_۳$ فـرض می‌کنیم. سه اتحاد زیر بدست می‌آید:

$$x=۳a+r_۱,$$
$$x=۴b+r_۲,$$
$$x=۵c+r_۳$$

و از آنجا :

$$r_۱=x-۳a, \quad r_۲=x-۴b, \quad r_۳=x-۵c$$

محاسبه می‌کنیم:

$$S=۴۰r_۱+۴۵r_۲+۳۶r_۳=$$
$$=۴۰(x-۳a)+۴۵(x-۴b)+۳۶(x-۵c)=$$
$$=۱۲۱x-۱۲۰a-۱۸۰b-۱۸۰c$$

و ضریبهای ۴۰، ۴۵ و ۳۶ هم طوری‌انتخاب شده است که به ترتیب‌ضمن

ضرب در ۳، ۴ و ۵، به‌صورت مضربهایی از ۶۰ درآیند. تنها جملهٔ $121x$ می‌ماند که در تقسیم بر ۶۰ به باقیماندهٔ x می‌رسد.

۱.۲۹۶. عملهایی را که روی عدد اصلی n انجام شده است، می‌توان به صورت $\frac{na+b}{c}$ نشان داد، که آنرا می‌توان به‌صورت $\frac{na}{c}+\frac{b}{c}$ نوشت و روشن است که اگر ازاین عدد $\frac{na}{c}$ را کم کنیم، $\frac{b}{c}$ باقی‌می‌ماند.

یادآوری. همیشه می‌توان عددها را طوری انتخاب کرد که به‌کسر نیازی نباشد.

۲.۲۹۶. x را عددی‌که شما روی‌کاغذ نوشته‌اید، و y را عددی که دیگری درنظرگرفته است، فرض می‌کنیم. در اولین عملی‌که دوستتان انجام می‌دهد، به عدد $x-۹۹+y$ می‌رسد. چون x از ۵۰ بزرگتر نیست و y بین ۵۱ تا ۱۰۰ قرار دارد، $x-۹۹+y$، کمتر از ۱۰۰ نیست، ولی از ۱۹۹ هم تجاوز نمی‌کند، یعنی عددی سه‌رقمی می‌شودکه رقم سمت‌چپ آن مساوی واحد است. وقتی رقم واحد سدگان را ازآن حذف می‌کنیم، به‌این معناست‌که ۱۰۰ واحد ازآن‌کم می‌کنیم. بنابراین، عمل بعدی، دوست‌شما را به‌این نتیجه می‌رساند:

$$y+۹۹-x-۱۰۰+۱=y-x$$

وعمل‌آخر، اورا به همان عددی می‌رساندکه‌شما روی‌کاغذنوشته‌اید:

$$y-(y-x)=x$$

یادآوری. این شیرینکاری را می‌توانید با تغییر مرزهای عددهای انتخابی، به صورتهای دیگری درآورید. مثلاً عددی‌که دوستتان انتخاب می‌کند بین ۲۰۱ و ۱۰۰۰ باشد. البته، دراینصورت، شما هم باید عددی‌که روی کاغذ می‌نویسید، بین ۱۰۰ و ۲۰۰ باشد. دراینحالت، به‌جای ۹۹ باید از ۹۹۹ استفاده کرد.

۲۹۷. جدول زیر، مطلب را روشن می‌کند:

	سهم اولی	سهم دومی	سهم سومی
سهم اولیه	۴k	۷k	۱۳k
بعد از تقسیم‌اول	۸k	۱۴k	۲k
بعد از تقسیم دوم	۱۶k	۴k	۴k
بعد ازتقسیم سوم	۸k	۸k	۸k

بعد از تقسیم سوم ، سهم هرکدام از سه نفر درست مساوی دو برابر سهم اولیهٔ نفر اول است.

۲۹۸. عددهارا a وb می‌گیریم. اگرمجموع آنهارا به‌حاصلضربشان اضافه‌کنیم، بدست می‌آید $(a+b)+ab$. وقتی‌که یك واحد بـه این عدد اضافه کنیم، داریم:

$$(a+b)+ab+۱=(a+۱)+b(a+۱)=(a+۱)(b+۱)$$

و همانطورکه می‌بینید، هرعامل یك واحد از عدد اصلی بزرگتر است.

برای حالتی هم‌که مجموع را از تفاضل کم می‌کنیم، به‌همین ترتیب می‌توان عمل‌کرد.

۲۹۹. فرض کنیدA عددی اول و B عددی غیراول وغیرقابل‌قسمت بر A باشد. دو عدد دیگر x و y درنظـر می‌گیریم که نسبت بـه هم اول باشند وضمناً y یکی ازمقسوم علیه‌های عدد B باشد. پس از عملهای لازم به یکی از دوعباوت $Ax+By$ یا $Ay+Bx$ می‌رسیم. روشن است‌کـه عبارت اول بر y قابل قسمت نیست، ولی دومی قابل قسمت است. بنابراین قابل قسمت بودن یا قابل قسمت نبودن عبارت بر y مربوط به‌اینست‌که y در عدد A ضرب شده است یا در عدد B.

۳۰۰. مجموع سه عددی‌که درنظرگرفته شده است و عدد چهارم‌که مضربی است از ۳، برابر است با:

$$a+(a+۱)+(a+۲)+۳k=۳a+۳k+۳=۳(a+k+۱)$$

بعد ازضرب این عدد در ۶۷ بدست می‌آید:

$$۲۰۱(a+b+k)$$

بنابرفرض $a<۶۰$ و $۳k<۱۰۰$، یعنی $k<۳۴$ است. بنابراین $a+k+۱$ حتماً از یك عدد دو رقمی تجاوز نمی‌کند. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که حاصلضرب یك عدد یك رقمی یا یك‌عدد دو رقمی در ۲۰۱، همیشه به یك عدد یك رقمی یادو رقمی ختم‌می‌شودکه باعدد دوبرابر آن شروع می‌شود. مثال

$$\begin{array}{r} ۴۱\times \\ ۲۰۱ \\ \hline ۴۱ \\ ۸۲ \\ \hline ۸۲۴۱ \end{array}$$

به این ترتیب، $a+k+۱$، همان دو رقم آخر حاصلضرب است، که اگر ازآن $k+۱$ راکم کنیم، مقدار a، یعنی کوچکترین عددی‌که در ابتدا درنظرگرفته شده است، پیدا می‌شود.

۱.۳۰۱) فرض می‌کنیم تنها دوعدد a و b درنظرگرفته شده باشد. عملهای لازم را انجام می‌دهیم:

$$(۲a+۵)۵=۱۰a+۲۵\ ,\ (۱۰a+۲۵)+۱۰=۱۰a+۳۵\ ;$$
$$(۱۰a+۳۵)+b=(۱۰a+b)+۳۵$$

که اگر ۳۵ را ازآن‌کم کنیم، $۱۰a+b$ بدست می‌آید، یعنی یك‌عدد دو رقمی که رقمهای‌آن همان عددهای a و b است.

۲) حالا سه عدد a، b و c را درنظر می‌گیریم. عملهای لازم را ادامه می‌دهیم:

$$(۱۰a+b+۳۵)۱۰+c=(۱۰۰a+۱۰b+c)+۳۵۰$$

که اگر ۳۵۰ را ازآن‌کم کنیم، به‌عدد $۱۰۰a+۱۰b+c$ می‌رسیم

که عددی است سه رقمی و رقمهای آن همان عددهای a، b و c می‌باشد. حالتهای دیگر را هم به‌همین ترتیب می‌توان مورد بررسی قرارداد.

۳۰۲. اگر من مجهول را x بگیریم، نتیجهٔ عملها به صورت $۱۰x-۹k$ بدست می‌آید، که در آن k یك عدد یك رقمی است. این تفاضل را به‌صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$۱۰x-۹k=۱۰x-۱۰k+k=۱۰(x-k)+k$$

به احتمال قوی، هم صحبت شما بیش از ۱۰ سال دارد و ضمناً بنابرفرض $k\leqslant ۹$ می‌باشد، بنابراین $x-k$ عددی است مثبت. دراین حالت در عدد $۱۰(x-k)+k$، رقم یکان مساوی k می‌شود و وقتی‌که آنرا از عدد حذف‌کنیم، جای تمام مرتبه‌ها عوض می‌شود، یعنی دهگان به‌صورت یکان، سدگان به صورت دهگان و غیره در می‌آید، به عبارت دیگر عدد به یك‌دهم خود تبدیل می‌شود، یعنی عددی‌که باقی‌می‌ماند $x-k$ است. دیگر روشن است‌که اگر k را به‌آن اضافه‌کنیم، همان x بدست می‌آید.

درحالتی‌که $x<۹$ باشد، ممکن است به شما یك عدد منفی را اعلام کند. دراین مورد هم، شما بدون درنظرگرفتن علامت منفی، می‌توانید همان عملها را انجام دهید، منتهی درآخر کار به‌جای نتیجه‌ای‌که بدست می‌آورید، تفاوت آن از ۹ را به عنوان سن دوست خود اعلام می‌کنید. اثبات این مطلب، شبیه حالت قبل است.

۳۰۳. سن مجهول را x می‌گیریم. عملها را انجام می‌دهیم:

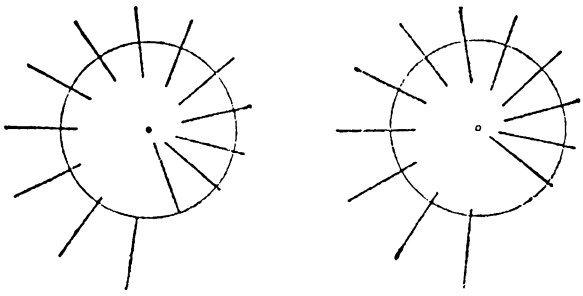
$$(۲x+۵)۵=۱۰x+۲۵$$

که می‌توانیم آنرا به اینصورت تبدیل کنیم:

$$۱۰x+۲۵=۱۰x+۲۰+۵=۱۰(x+۲)+۵$$

و اگر ازاین عدد، رقم یکان ۵ را حذف‌کنیم، به عدد $x+۲$ می‌رسیم و با کم‌کردن ۲ ازآن، همان x بدست می‌آید.

۳۰۴. پاره خط سیزدهم، ناپدید نمی‌شود، بلکه بین دوازده پاره‌خط دیگر تقسیم می‌شود و آنهارا درازتر می‌کند. این مطلب را می‌توان‌به‌کمك اندازه‌گیری سیزده پاره‌خط اول و بعد دوازده پاره خط دوم نتیجه‌گرفت، و



مربوط به مسألهٔ ۳۰۴

یا به طریق هندسی ثابت کرد.

روشن است که خط MN ، سیزده پاره‌خط موازی را به فاصله‌های مساوی قطع می‌کند، یعنی پاره خط دوم را در $\frac{۱}{۱۲}$ طول خود، پاره خط سوم را در $\frac{۲}{۱۲}$ طول خود، پاره خط چهارم را در $\frac{۳}{۱۲}$ طول خود و غیره قطع می‌کند.

وقتی که دو قسمت مقوا را جابه‌جا می‌کنیم، هرقسمت ازیك‌پاره خط را (با شروع از دومی) روی قسمت بعدی می‌گذاریم. و چون هرقسمت بریده شدهٔ پاره خط، از قسمت قبلی به اندازهٔ $\frac{۱}{۱۲}$ تمام پاره‌خط بزرگتراست، طول هرپاره‌خط جدید (بعد ازجابه‌جایی) به‌اندازهٔ $\frac{۱}{۱۲}$ طول خود بزرگتر می‌شود و تعداد هم از ۱۳ به ۱۲ می‌رسد.

می‌توانید همین‌آزمایش را روی محیط دایره انجام دهید. دراینجا باید دایره را روی محیط خود ببرید و دور مرکزش دوران دهید (به اندازهٔ فاصلهٔ دوپاره خط)، بازهم به‌نظر می‌رسد که یکی ازپاره‌خطها گم‌شده است (شکل‌بالا را ببینید).

بخش یازدهم

۳۰۵. پیداکردن کوچکترین مضرب مشترك بین عددهای ۱ تا ۱۰

مشکل نیست، ولی این جالب است که کوچکترین مضرب مشترك عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰، همان کوچکترین مضرب مشترك نیمهٔ دوم این عددها، یعنی ۶، ۷، ۸، ۹ و ۱۰ است.

این یك قاعدهٔ کلی است؛ کوچکترین مضرب‌مشترك عددهای‌طبیعی‌از ۱ تا $2n$، همان‌کوچکترین مضرب‌مشترك‌نیمهٔ دوم‌این عددها، یعنی $n+1$، $n+2$، ... و $2n$ می‌باشد.

۳۰۶. اگر یك نارنگی بیشتر وجود داشت، تعداد آنها به ۱۰، ۹، ۸، ۷ و ۶ بخش‌پذیر بود. کوچکترین عددی که به‌همهٔ‌این عددها بخش‌پذیر باشد ۲۵۲۰ است. بنابراین‌تعدادنارنگیها ۲۵۱۹ بوده است و با این تعداد، در تقسیم به ۵، ۴، ۳ و ۲ هم به‌ترتیب به باقیمانده‌هایی مساوی ۴، ۳ ۲ و ۱ می‌رسیم.

۳۰۷. تعداد چنین عددهایی، بینهایت است. کوچکترین این عددها مساوی ۵۸ است. در واقع، اختلاف بین مقسوم‌علیه و باقیمانده، همه‌جا مساوی ۲ شده است. بنابراین، اگر عدد ما ۲ واحد بیشتر باشد، برهمهٔ عددهایی که در متن مسأله نام برده شده است، بخش‌پذیر خواهد بود. کوچکترین مضرب مشترك عددهای ۳، ۴، ۵ و ۶، مساوی ۶۰ است و بنابراین عدد مورد نظرما مساوی ۵۸ می‌شود. جوابهای‌کلی این مسأله به صورت $60k-2$ است، که درآن k می‌تواند هر عدد صحیح ومثبتی باشد.

۳۰۸ کوچکترین مضرب‌مشترك عددهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، برابر است با ۶۰. باید مضربی از ۷ را پیدا کرد که یك واحد از مضرب ۶۰ بزرگتر، یعنی به‌صورت $60n+1$ باشد. داریم:

$$60n+1=7\times 8n+4n+1$$

$60n+1$ وقتی مضرب ۷ است که $4n+1$ مضرب ۷ باشد. کوچکترین عددی‌که می‌توان به‌جای n قرارداد تا $4n+1$ مضربی از ۷ شود، $n=5$ است. دراین حالت، تعداد تخم مرغهای سبد مساوی ۳۰۱ می‌شود. عدد بعدی‌که به‌جای n می‌توان قرار داد، $n=12$ است که به ازای‌آن ۷۲۱ تخم‌مرغ بدست می‌آید. ولی این تعداد و جوابهای دیگری‌که می‌توان‌پیدا

کرد، قابل‌قبول نیست، زیرا سنگینی تخم‌مرغها چنان می‌شود که زن قدرت حمل آنها را ندارد.

۳۰۹. روشن است که عدد مورد نظر باید مضربی از عددهای ۷، ۸ و ۹ باشد. کوچکترین مضرب مشترك این عددها، مساوی ۵۰۴ است وجواب مسأله هم همین عدد است، زیرا مضربهای مشترك دیگر این عددها، حداقل چهار رقمی می‌شود.

۳۱۰. کوچکترین مضرب مشترك عددهای ۴، ۸، ۱۲ و ۱۶، برابر است با ۴۸. بنابراین بعد از ۴۸ روز، یعنی ۴ دسامبر ۱۹۵۳، دوباره هرچهار کشتی دربندر جمع می‌شوند.

۳۱۱. قیمت هر بستهٔ نمك وهمینطور قیمت هرقالب کره، مضربی است از ۳. تعداد پاکتهای قند وتعداد پیراشکیها هم مضربی است از ۳. بنابراین، باید قیمت کل خرید هم مضربی از ۳ باشد، ولی قیمتی که صندوقدار، در برابر مشتری قرار داده است، مضربی از ۳ نیست و این به معنای آنست که صندوقدار اشتباه کرده است.

۳۱۲. چون عدد سمت چپ تساوی، مضربی است از ۹، بنابراین عدد سمت راست تساوی هم باید مضربی از ۹ باشد. اگر عددی بر ۹ بخش‌پذیر باشد، مجموع رقمهای آن هم بر ۹ بخش‌پذیر است:

$$۴+۹+۲+a+۴=۱۹+a$$

و روشن است که بدست می‌آید: $a=۸$. حالا، اگر از عدد ۴۹۲۸۰۴ جذر بگیریم، بدست می‌آید:

$$۳(۲۳۰+t)=۷۲۰ \Rightarrow t=۴$$

۳۱۳. سمت چپ تساوی بر ۱۱ بخش‌پذیر است. بنابراین، سمت راست تساوی هم باید بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد. از آنجا باید داشته باشیم:

$$۱+۲+۱+۷=a+۳ \Rightarrow a=۸$$

جوابهای دیگری برای a نمی‌توان بدست آورد، زیرا یا a عددی منفی می‌شود و یا عددی دو رقمی. حالا از عدد ۳۷۸۱۰۲۰۱ جذر می‌گیریم،

بدست می‌آید:

$$۱۱(۴۹۲+x)=۶۱۴۹$$

و از آنجا $x=۶۷$ می‌شود.

۳۱۴. می‌دانیم که عددهای $۱+۱۰^۳$ و $۱-۱۰^۶$ بر ۱۰۰۱ بخش‌پذیر است. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که $۱+۱۰^۹$ هم بر ۱۰۰۱، یعنی بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است.

حالا، عددی درنظر می‌گیریم که شامل ۴ گروه باشد، مثلاً ۳۱۲۱۸۰۰۱۴۱۶ و آنرا به اینصورت می‌نویسیم:

$$۳۱۲۱۸۰۰۱۴۱۶=۴۱۶+۱\times۱۰^۳+۲۱۸\times۱۰^۶+۳۱\times۱۰^۹=$$
$$۴۱۶+۱(۱۰^۳+۱-۱)+۲۱۸(۱۰^۶-۱+۱)+$$
$$+۳۱(۱۰^۹+۱-۱)=(۴۱۶-۱+۲۱۸-۳۱)+$$
$$+[(۱۰^۳+۱)+۲۱۸(۱۰^۶-۱)+۳۱(۱۰^۹+۱)]$$

جمله‌های داخل کروشه، بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیرند، بنابراین عدد مفروض وقتی بر ۷، ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است که مقدار داخل پرانتز اول براین عددها بخش‌پذیر باشد. مقدار داخل پرانتز اول چنین است:

$$(۴۱۶+۲۱۸)-(۱+۳۱)=۶۰۲$$

عدد ۶۰۲، و همراه آن عدد مفروض، بر ۷ بخش‌پذیر است، ولی بر ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر نیست.

۳۱۵. عدد سه رقمی را به صورت جبری آن می‌نویسیم:

$$۱۰۰x+۱۰y+z$$

باید ثابت کنیم که این عدد وقتی بر ۸ بخش‌پذیر است که عدد $۱۰x+y+\frac{z}{۲}$ بر ۴ بخش‌پذیر باشد. فرض کنید

$$۱۰x+y+\frac{z}{۲}=۴k$$

که درآن، k عبارتست ازعددی مثبت و صحیح. از این رابطه، z را بدست

می‌آوریم و به‌جای z در عدد سه‌رقمی قرار می‌هیم:

$$۲۰x+۲y+z=۸k \quad و \quad z=۸k-۲۰x-۲y$$

$$۱۰۰x+۱۰y+z=۱۰۰x+۱۰y+۸k-۲۰x-۲y=$$
$$=۸۰x+۸y+۸k$$

دیده می‌شود که عبارت اخیر، و در نتیجه‌عدد سه‌رقمی مفروض بر ۸ بخش‌پذیر است.

ولی اگر $۱۰x+y+\frac{z}{۲}$ بر ۴ بخش‌پذیر نباشد؟ آیا می‌شودنتیجه گرفت، که درآنصورت‌هم‌عدد $۱۰۰x+۱۰y+z$ بر ۸ بخش‌پذیر نیست؟ و این در واقع عکس قضیه‌ای است‌که ثابت کردیم:

اگر عدد $۱۰۰x+۱۰y+z$ بر ۸ بخش‌پذیر باشد، عدد

$$۱۰x+y+\frac{z}{۲}$$

هم بر ۴ بخش‌پذیر خواهد بود.

فرض می‌کنیم:

$$۱۰۰x+۱۰y+z=۸k$$

z را ازاین رابطه بدست می‌آوریم و در عبارت $۱۰x+y+\frac{z}{۲}$قرارمی‌دهیم:

$$۱۰x+y+\frac{z}{۲}=۱۰x+y+\frac{۱}{۲}(۸k-۱۰۰x-۱۰y)=$$
$$=-۴۰x-۴y+۴k$$

و بخش‌پذیر بودن این عبارت بر ۴ روشن است.

به این ترتیب نشانهٔ بخش‌پذیری یك عدد بر ۸ را می‌توان بـه‌این ترتیب منظم‌کرد:

یك عدد وقتی بر ۸ بخش‌پذیر است‌که اگر نصف رقم یکان آنرا بـه مقلوب عدد دو رقمی‌که از دهگان و سدگان عدد تشکیل شده است، اضافه کنیم، حاصل بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

۳۱۶. فرض می‌کنیم که‌عدد N از ۳ گروه تشکیل شده باشد. آنـرا

به صورت زیر می‌نویسیم:

$$N=10^6a+10^3b+c$$

که درآن a، b و c عبارتند از عددهای گروهها . اگر a+b+c بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد، می‌توان نوشت: a+b+c=۳۷k. مقدار c را از این رابطه بدست می‌آوریم و در N قرار می‌دهیم:

$$N=10^6a+10^3b+37k-a-b=a(10^6-1)+$$
$$+b(10^3-1)+37k$$

عددهای 10^6-1 ، 10^3-1 و ۳۷ بر ۳۷ بخش‌پذیرند و بنابراین عدد N هم بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

۳۱۷. از همان روش اثبات مسألهٔ قبل استفاده‌کنید. با اثبات این خاصیتها، می‌توانیم‌قاعدهٔ بخش‌پذیری یك‌عدد را بر ۳، ۷ و ۱۹ تنظیم‌کنیم:

دو رقم سمت راست عدد را جدا کنید و ۴ برابر این عدد دو رقمی را ، به بقیهٔ عدد اضافه‌کنید، اگر لازم باشد این عمل را آنقدرادامه دهید تا بخش‌پذیری عدد حاصل بر ۳، ۷ و ۱۹ یا حاصلضرب آنها۳۹۹، روشن باشد؛ اگراین نتیجه، بر۳۹۹ یا یکی ازعاملهای آن‌بخش‌پذیرباشد، عدد اصلی هم برآن بخش‌پذیر خواهد بود و برعکس اگر این نتیجه‌بر ۳۹۹ یا یکی از عاملهای‌آن بخش‌پذیرنباشد، عدد اصلی هم برآن بخش‌پذیرنخواهد بود.

براساس این قاعده، به عنوان مثال، روشن می‌کنیم‌که آیا عددهای ۱۳۸۲۶۴ و ۴۰۶۹۸ بر ۳ ، ۷ یا ۱۹ بخش‌پذیرند یا نه.

داریم:

برای عدد ۱۳۸۲۶۴ :

۶۴×۴=۲۵۶ ؛

۱۳۸۲+

۲۵۶

۳۸×۴=۱۵۲ ؛ ۱۶۳۸

برای عدد ۴۰۶۹۸

۹۸×۴=۳۹۲

۴۰۶+

۳۹۲

۹۸×۴=۳۹۲ ؛ ۷۹۸

۱۶+	۷+
۱۵۲	۳۹۲
۱۶۸	۳۹۹
ادامه این روش دیگر بی‌معناست. از نتیجه‌ای که بدست آمده است معلوم می‌شود که عدد ۱۳۸۲۶۴ بر ۳ و ۷ بخش‌پذیر است، ولی بر ۱۹ بخش‌پذیر نیست.	۳۹۹ بر ۳، ۷ و ۱۹ بخش‌پذیر است، بنابراین عدد ۴۰۶۹۸ هم بر ۳، ۷ و ۱۹، همچنین بر ۳۹۹ بخش‌پذیر خواهد بود.

۳۱۸. به ترتیب داریم:

$$۱۱^{۱۰}-۱=(۱۱^{۲})^{۵}-۱=۱۲۱^{۵}-۱=(۱۲۱-۱)(۱۲۱^{۴}+۱۲۱^{۳}+۱۲۱^{۲}+۱۲۱+۱)$$

پرانتز اول بر ۱۲۰ بخش‌پذیر است، پرانتز دوم شامل ۵ جمله است که هر کدام از آنها به واحد ختم می‌شود (هرتوانی از ۱۲۱ به واحد ختم می‌شود) و بنابراین مجموع آنها به ۵ ختم می‌شود، یعنی پرانتز دوم به ۵ بخش‌پذیر است. ولی وقتی که یکی از عاملها به ۱۲۰ و دیگری به ۵ بخش‌پذیر باشد، حاصلضرب آنها به ۶۰۰ بخش‌پذیر خواهد بود.

۱.۳۱۹. فرض کنید عدد $N=۱۰x+y$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد. در اینصورت

$$۱۰x+y=۷k \qquad (k \text{ عددی است صحیح و مثبت})$$

اگر مقلوب عدد را با رقم دهگان آن جمع کنیم، بدست می‌آید:

$$۱۰y+x+x=۱۰y+۲x$$

به‌جای y مقدارش $۷k-۱۰x$ را قرار می‌دهیم، چنین می‌شود:

$$۱۰(۷k-۱۰x)+۲x=۷۰k-۹۸x$$

که بخش‌پذیری آن بر ۷ روشن است.

۲.۳۱۹. فرض می‌کنیم عدد $N=۱۰۰x+۱۰y+z$ بر ۷ بخش پذیر باشد. دراینصورت

$$۱۰۰x+۱۰y+z=۷k \qquad (k \text{ عددی است صحیح و مثبت})$$

عدد را مقلوب می‌کنیم و اختلاف سدگان از یکان را از آن کم می‌کنیم، به

این عدد می‌رسیم:

$$۱۰۰z+۱۰y+x-(z-x)=۹۹z+۱۰y+۲x$$

به‌جای z مقدارش $۷k-۱۰۰x-۱۰y$ راقرار می‌دهیم، بدست می‌آید:

$$۹۹(۷k-۱۰۰x-۱۰y)+۱۰y+۲x=$$
$$=۹۹\times۷k-۹۹۰۰x-۹۹۰y+۱۰y+۲x=$$
$$=۹۹\times۷k-۹۸۹۸x-۹۸۰y$$

که همانطورکه دیده می‌شود بر ۷ بخش‌پذیر است.

۳.۳۱۹. ابتدا قضیهٔ مستقیم را ثابت می‌کنیم:

فرض می‌کنیم $N=۱۰۰z+۱۰x+y$ و ضمناً $x+y+z=۷$.

در اینصورت:

$$N=۱۰۰(۷-x-y)+۱۰x+y=۷۰۰-۹۰x-۹۹y=$$
$$=۷۰۰-۹۱x-۹۸y+x-y=$$
$$=۷(۱۰۰-۱۳x-۱۴y)+(x-y)$$

برای‌اینکه N بر۷ بخش‌پذیرباشد، باید $x-y$ بر۷ بخش‌پذیر باشد؛ چون بنابر شرط x و y کوچکتر از ۷اند، این‌شرط تنها وقتی برقرارمی‌شود کهٔ $x-y=۰$ یا $x=y$ باشد.

قضیهٔ مستقیم، از شرط لازم بخش‌پذیری بر ۷ صحبت می‌کند.

حالا به اثبات قضیهٔ عکس می‌پردازیم؛ فرض می‌کنیم

$$N=۱۰۰(۷-x-y)+۱۰x+y$$

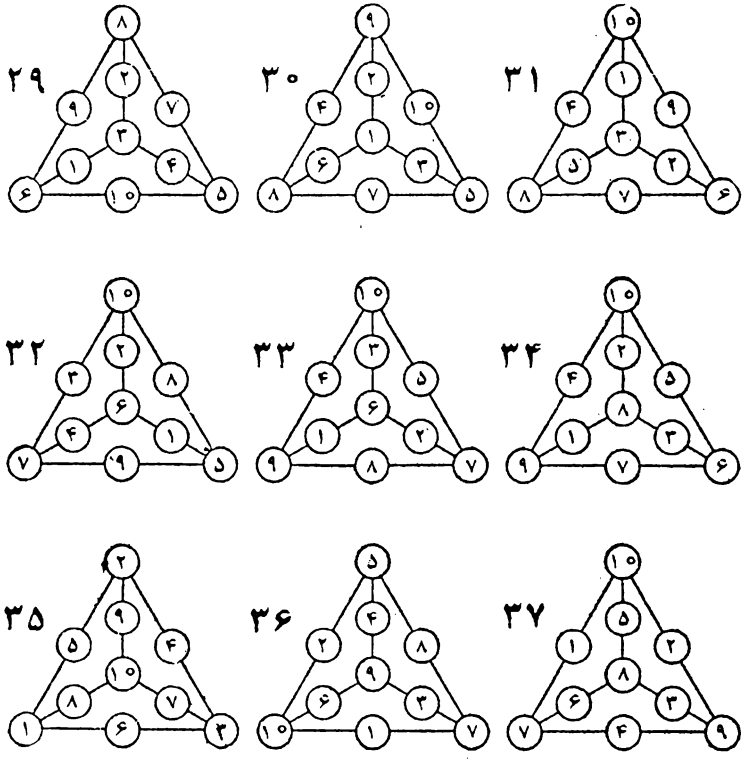
و ضمناً $x=y$. در اینصورت

$$N=۱۰۰(۷-۲x)+۱۰x+x=۷۰۰-۱۸۹x=۷(۱۰۰-۲۷x)$$

و همانطورکه دیده می‌شود بر ۷ بخش‌پذیر است. قضیهٔ عکس دربارهٔ شرط کافی بخش‌پذیری بر ۷ گفتگو می‌کند.

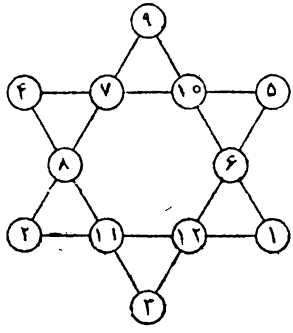
بخش دوازدهم

۳۲۳. یکی از جوابهای ممکن در صفحهٔ بعد داده شده است:

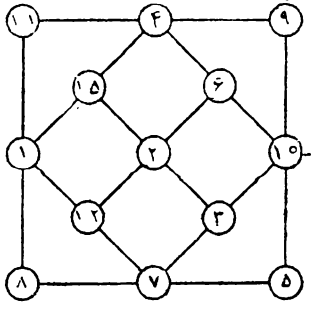


مربوط به مسئلهٔ ۳۲۳

۳۲۴. حل در شکل زیر داده شده است.



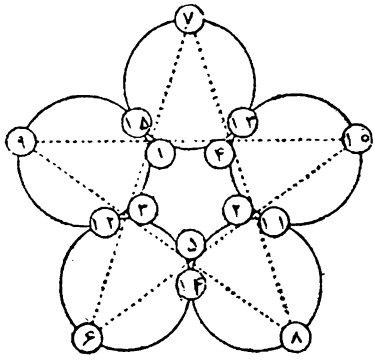
مربوط به مسألهٔ ۳۲۴



مربوط به مسألهٔ ۳۲۵

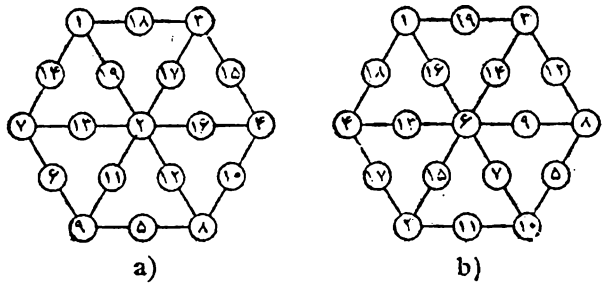
۳۲۵. حل مسأله در شکل صفحهٔ قبل داده شده است.

۳۲۶. حل مسأله، درشکل روبرو داده شده است.



مربوط به مسألهٔ ۳۲۶

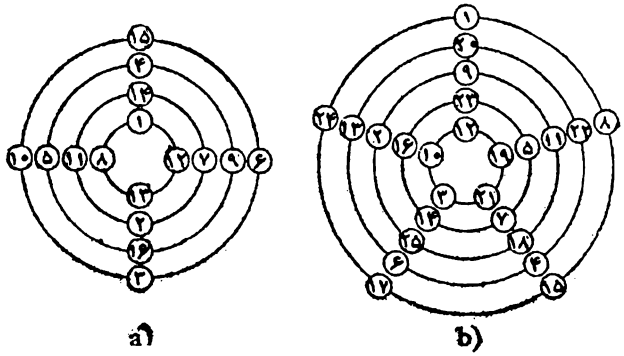
۳۲۷. حل درشکل‌داده شده است. درشکل a، مجموع عددها در هرضلع شش‌ضلعی و روی هرشعاع آن، مساوی ۲۲ و در شکل b، مجموع عددها در طول هرضلع و و روی هرشعاع‌شش‌ضلعی، مساوی ۳۲ است.



a) b)

مربوط به مسألهٔ ۳۲۷

۳۲۸. یکی از جوابهای ممکن، در شکل زیر داده شده است.



a) b)

مربوط به مسألهٔ ۳۲۸

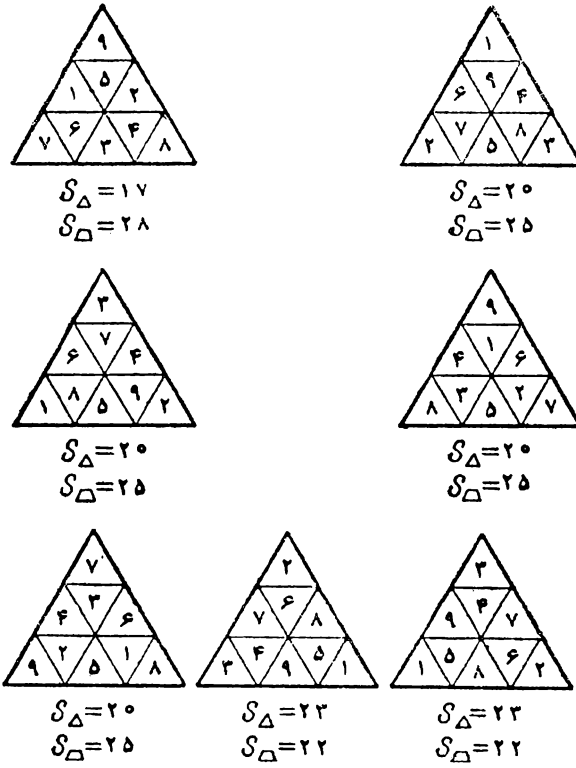
۳۲۹. جواب، در شکل مجاور داده شده است.

۱ / ۱۶	۹ / ۱۵	۳ / ۱۴	۱۱ / ۱۳
۸ / ۲	۷ / ۱۰	۶ / ۴	۵ / ۱۲

مربوط به مسألهٔ ۳۲۹

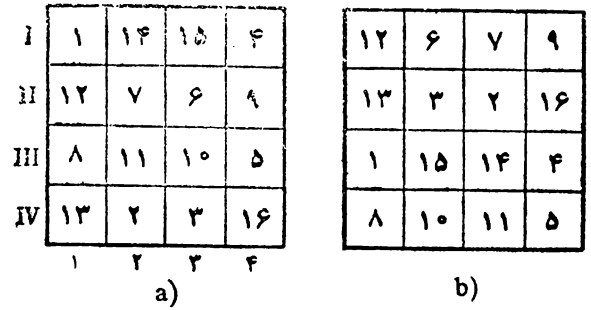
۳۳۰. جواب را در شکل همین صفحه می‌بینید.

۳۳۱. سطرها و ستونهای مربع را شماره‌گذاری می‌کنیم (شکل a). همانطور که می‌دانیم بین عددهای این مربع، ردیفهایی وجود دارد که مجموع آنها و همچنین مجموع مکعبهای آنها باهم برابر است. این ردیفها عبارتند از ۱۲، ۱۴، ۳، ۵ و ۱۵، ۹، ۸، ۲. ولی در این مربع، این عددها، در طول قطر قرار نگرفته‌اند. برای اینکه هر کدام از این ردیفها را در طول یکی از قطرها قرار دهیم، این تغییرات را انجام



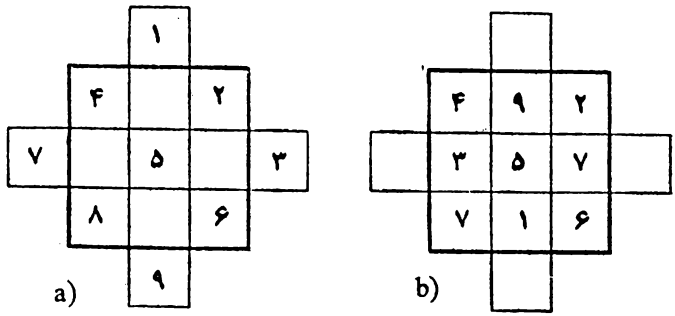
مربوط به مسألهٔ ۳۳۰

می‌دهیم. سطر II را به‌جای I و سطر IV را به‌جای II، سطر I را به‌جای III وبالاخره سطر III را به‌جای سطر IV قرارمی‌دهیم. سپس‌جای‌ستونهای ۲ و ۳ را باهم عوض می‌کنیم . به سادگی دیده می‌شود، مربعی‌که بـه‌این ترتیب بدست می‌آید، شامل همه خاصیتهای مورد نظر می‌باشد (شکلb).



مربوط به مسألهٔ ۳۳۱

۳۳۲. مربع نه‌خانه‌ای را، به شکل پله‌ای متقارن درآورید (شکلa) و نه عدد صحیح از ۱ تا ۹ را به ردیف مایل قطری درآن قرار دهید.سپس همهٔعددهایی راکه‌درخارج جدول‌است، بنابر قاعده‌ای‌که‌درمتن (صفحهٔ۳۴۶) داده شده است، وارد در جدول‌کنید (شکل b). به سادگی دیده می‌شودکه همهٔ خاصیتهای یك مربع وفقی، درمورد این مربع نه‌خانه‌ای صدق می‌کند.



مربوط به مسألهٔ ۳۳۲

مقدار ثابت این مربع برابر است با ۱۵.

مربع وفقی مرتبهٔ هفتم را خودتان درست کنید.

۳۳۳. این مربع (شکل مسأله‌را در صفحهٔ ۳۵۴ ببینید)، در ۴ردیف افقی و ۴ ردیف قائم، هرکدام ۴ خانهٔ سفید و در ۳ ردیف افقی و ۳ ردیف قائم، هرکدام ۳ خانهٔ سفید دارد، یعنی می‌توان آنرا شامل دو مربع وفقی دانست‌که یکی ۱۶ خانه‌ای ودیگری ۹ خانه‌ای است. در مربع نه‌خانه‌ای، تعداد خانه‌ها کمتر از مربع شانزده خانه‌ای است، ولی بنابر شرط بایدمقدار ثابت هردو مربع یکی باشد. بنابراین، از عددهایی‌که داده شده است، باید ۹ عدد بزرگتر را به مربع نه‌خانه‌ای اختصاص داد. هرکرام از مربعها را بنابر طرح مربوط به خودشان می‌سازیم. (شکلهای پایین)

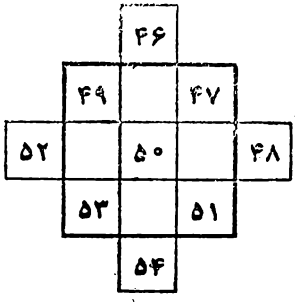
۳۰	۳۱	۳۲	۳۳
۳۴	۳۵	۳۶	۳۷
۳۸	۳۹	۴۰	۴۱
۴۲	۴۳	۴۴	۴۵

۳۰	۳۱	۳۲	۳۳
۴۱	۴۰	۳۹	۳۸
۳۴	۳۵	۳۶	۳۷
۴۵	۴۴	۴۳	۴۲

۳۰	۴۴	۴۳	۳۳
۴۱	۳۵	۳۶	۳۸
۳۴	۴۰	۳۹	۳۷
۴۵	۳۱	۳۲	۴۲

۳۰	۴۴	۴۳	۳۳
۴۱	۳۵	۳۶	۳۸
۳۷	۳۹	۴۰	۳۴
۴۲	۳۲	۳۱	۴۵

مربوط به مسألهٔ ۳۳۳



a)

۴۹	۵۴	۴۷
۴۸	۵۰	۵۲
۵۳	۴۶	۵۱

b)

مربوط به مسألهٔ ۳۳۳

مقدار ثابت هریك از این دو مربع برابر است با ۱۵۰. حالا، باید این دو مربع را به یك مربع تبدیل کنیم و در سطرها و ستونهای مربع اول جادهیم (شکل را ببینید). عددهایی که در طول قطرهای این مربع قرار گرفته‌اند، همان عددهایی هستند که در طول قطرهای دو مربع تشکیل دهندهٔ آن قرار داشتند و بنابراین مجموع عددها، در طول هر قطر، برابر با همان مقدار ۳۰۰ می‌شود.

۳۰		۴۴		۴۳	۳۳
	۴۹		۵۴		۴۷
۴۱		۳۵		۳۶	۳۸
	۴۸		۵۰		۵۲
۳۷		۳۹		۴۰	۳۴
	۵۳		۴۶		۵۱
۴۲		۳۲		۳۱	۴۵

c)

مربوط به مسألهٔ ۳۳۳

۳۳۴. وضع قالبها را به‌صورت شکل صفحهٔ ۳۵۵ در متن مسأله، در نظر بگیرید و به ترتیب حرکتهای زیر را انجام دهید (مرتباً خانهٔ خالی را پر کنید):

۱۲، ۸، ۴، ۳، ۲، ۶، ۱۰، ۹، ۱۳، ۱۵، ۱۴،
۱۲، ۸، ۴، ۷، ۱۰، ۹، ۱۴، ۱۲، ۸، ۴، ۷،
۱۰، ۹، ۶، ۲، ۳، ۱۰، ۹، ۶، ۵، ۱، ۲، ۳،
۶، ۵، ۳، ۲، ۱، ۱۳، ۱۴، ۳، ۲، ۱، ۱۳،
۱۴، ۳، ۱۲، ۱۵، ۳

۱۳	۱	۶	۱۰
۱۴	۲	۵	۹
	۱۲	۱۱	۷
۳	۱۵	۸	۴

مربوط به مسألهٔ ۳۳۴

رویهم ۵۰ حرکت! وضع تازهٔ قالبها، در شکل سمت چپ، نشان داده شده است و به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که یك مربع وفقی است و مقدار ثابت آن برابر است با ۳۰. روشن است که برای رسیدن به مربع وفقی، می‌توان قالبها را باترتیب‌های دیگری جابه‌جا

کرد، ولی تا آنجاکه من می‌دانم، راه‌حلی‌که به‌کمتر از ۵۰ حرکت نیاز داشته باشد، وجود ندارد. برای اینکه در این مورد امتحان کنید، قبلا مربعهای وفقی مختلفی راکه می‌توان با عددهای ۰، ۱، ۲، ...، ۱۵ درست کرد، آماده‌کنید و سپس جا به جایی قالبها را آغاز کنید.

اگر بخواهیم از وضعی‌که در شکل بالای صفحهٔ ۳۵۵ وجود دارد، برای ساختن یك‌مربع وفقی شروع‌کنیم، هرگز نمی‌توان به همان مربع‌وفقی رسیدکه از وضع شکل دوم صفحهٔ ۳۵۵، بدست می‌آید. همهٔ اختلاف این دو وضع دراینست که در وضع دوم، تنها دوعدد آخر به ردیف طبیعی‌نیستند و باهیچ نوع حرکتی‌برای قالبها، نمی‌توان یکی ازاین دو وضع رابه‌دیگری تبدیل‌کرد. این حکم، که یك حکم اساسی در «بازی با ۱۵» است، در نیمهٔ دوم سدهٔ گذشتهٔ (سال ۱۸۷۹)، به وسیلهٔ ریاضیدانان ثابت شد.

درضمن، ثابت شده است‌که هروضعی راکه عددهای ۱۵ قالب «بازی با ۱۵» داشته باشد، می‌توان به یکی از این دوحالت تبدیل‌کرد، یعنی یا عددها را به ردیف طبیعی قرار داد و یا به‌صورتی‌که تنها دو عدد آخرآن به ردیف طبیعی نباشد.

جالب اینجاست‌که ازقبل می‌توان پیش‌بینی‌کرد که یك وضع‌مفروض، با جا به‌جا شدن قالبها، به‌کدامیك ازاین دوحالت منجر می‌شود. برای این منظور باید یك عمل کمکی انجام داد: باید ببینیم برای اینکه عددها را به ردیف طبیعی قرار دهیم، چندبار باید جای‌آنها را باهم عوض کنیم (نه از طریق پرکردن خانهٔ خالی، بلکه از طریق عوض‌کردن جای‌آنها)، به‌شرطی که این عوض‌کردن جا را درمورد عددهایی‌که درکنار هم دریك سطر یا یك ستون قرار دارند، انجام دهیم. اگرتعداد این جابه‌جایی‌زوج باشد، به‌معنای آنست‌که می‌توان قالبها را به ردیف طبیعی قرارداد و برعکس، اگر تعداد این جا به‌جایی فرد باشد، به این معناست که تنظیم‌آنها به ردیف طبیعی ممکن نیست.

عمل‌کمکی را به‌سادگی می‌توان انجام داد. درجریان جا به‌جاکردن، از خانهٔ «خالی» می‌توان برای نزدیك کردن قالبها به یکدیگر استفاده‌کرد،

ولی، انتقال یك‌قالب را به خانهٔ«خالی» به‌حساب یك جابه‌جایی نمی‌گذاریم. برای‌نمونه، وضع قالبها را به صورتی‌که در مربع وفقی‌صفحهٔ ۷۱۷ است، درنظر می‌گیریم. ببینیم‌که آیا می‌توان با جا به‌جایی، آنرا به‌ترتیب درست قرار داد.

از قالب ۱ شروع‌می‌کنیم؛ برای اینکه‌آنرا درجای نخست قراردهیم، باید جایش را با قالب ۱۳ عوض‌کنیم. بعد باید جای قالب ۱۳ را با قالب ۲ عوض. کنیم (یك جا به‌جایی دیگر). برای اینکه قالب ۳ را به جای خودش ببریم، می‌توان به‌ترتیب آنرا با قالبهای۱۵، ۸، ۱۱، ۵ و۶ عوض‌کرد ویا ابتدا آنرا به خانهٔ خالی برد و سپس با قالبهای ۱۴، ۱۳، ۵، ۶ عوض‌کردکه‌ما هم‌همین کار رامی‌کنیم (۴جا به‌جایی). قالب ۴، بعد ازآنکه جای خود را به ترتیب با قالبهای ۷ ۹ و ۱۰ عوض‌کند (۳ جا به‌جایی)، به‌جای خودش می‌رسد. تا اینجا ۹=۳+۴+۱+۱ جابه‌جایی انجام داده‌ایم و ۳ قالب درجای خودقرار گرفته‌اند (شکل بالا را ببینید).

۱	۲	۳	۴
۱۳	۵	۶	۱۰
۱۴	۱۲	۱۱	۹
	۱۵	۸	۷

مربوط به مسألهٔ ۳۳۴

اگر به‌همین ترتیب تمام جا به‌جاییهای لازم را انجام دهیم، برای رسیدن به ترتیب‌درست دراین نمونه، تعداد تغییرها فرد می‌شود. بنابراین، قالبهایی راکه به‌صورت مربع وفقی صفحهٔ ۷۱۷ قرارگرفته‌اند، نمی‌توان به ردیف درست تبدیل کرد.

بنابراین، حل‌مسألهٔ عکس هم ممکن نیست: ترتیب درست‌قالبهاراکه در صفحهٔ ۳۵۵ (شکل بالا) می‌بینید، نمی‌توان به‌صورت مربع وفقی صفحهٔ ۷۱۷ درآورد.

حالا خودتان مربع وفقی راکه‌می‌توان ازحالت ترتیب درست(شکل بالا در صفحهٔ ۳۵۵) بدست آورد، پیدا کنید.

۱.۳۳۵. جواب مسألـه ، در شکل سمت چپ داده شده است و به‌سادگی دیده می‌شودکه همهٔ خواستهای مسأله درآن وجود دارد.

۱	۷	۲	۸
۴	۶	۳	۵
۷	۱	۸	۲
۶	۴	۵	۳

مربوط به‌مسألهٔ ۱.۳۳۵

۲.۳۳۵. یك‌مربع وفقی براساس طرحی‌که در مسألهٔ ۳۳۲ صفحهٔ ۳۴۸ داده‌ایم، باعددهای فرد از ۱ تا ۳۱، می‌سازیم (شکل a پایین). این مربع، بسیاری از خاصیتهای اضافی راکه درمتن مسأله خواسته‌اند،دارد، ولی شامل همهٔآن خاصیتها نیست. حالا ، اگرجای سطرهای اول ودوم و سپس جای‌ستونهای اول و دوم را با هم عوض‌کنیم، بازهم‌یك مربع وفقی بدست می‌دید (شکلb پائین) که دارای همهٔخاصیتهای اضافی موردنظر می‌باشد. مثلا، مجموع مربعهای عددهای دوسطـر اول و سوم، یکی است، همچنین، مجموع مربعهای عـددهای دوسطر دوم وچهارم

۳۱	۳	۵	۲۵
۹	۲۱	۱۹	۱۵
۱۷	۱۳	۱۱	۲۳
۷	۲۷	۲۹	۱

a)

۲۱	۹	۱۹	۱۵
۳	۳۱	۵	۲۵
۱۳	۱۷	۱۱	۲۳
۲۷	۷	۲۹	۱

b)

مربوط به مسألهٔ ۲.۳۳۵

هم یکی است. خودتان سایر خاصیتهای مـوردنظر را، در مـورد این مربع آزمایش کنید.

مربع وفقی‌کـه درصفحهٔ ۳۵۷ (بـا نمادهای لاتینی) داده شده است، دارای این خاصیت است‌که اگر آنرا سر و تـه کنیم (به‌اندازهٔ ۱۸۰ درجـه به‌چرخانیم)، بازهم یك مربع وفقی باقی می‌ماند.

۳۳۶. بنابر فرض داریم:

$$a_1+a_4+a_7=S, \qquad a_2+a_5+a_8=S,$$

$$a_1+a_5+a_9=S, \qquad a_3+a_5+a_7=S,$$

ازآنجا بدست می‌آید :

$$a_4+a_7=S-a_1, \qquad a_6+a_9=S-a_3,$$
$$a_5+a_9=S-a_1, \qquad a_5+a_7=S-a_3,$$

و بنابراین $a_4+a_7=a_5+a_9$ و $a_6+a_9=a_5+a_7$. از جمع دو تساوی اخیر بدست می‌آید:

$$a_4+a_7+a_6+a_9=2a_5+a_9+a_7 \Rightarrow a_4+a_6=2a_5$$

به دوطرف تساوی اخیر، a_5 را اضافه می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$a_4+a_5+a_6=3a_5$$

و چون داریم: $a_4+a_5+a_6=S$ ، بنابراین

$$3a_5=S \Rightarrow a_5=\frac{S}{3}$$

و اگر $S=15$ باشد، $a_5=5$ می‌شود.

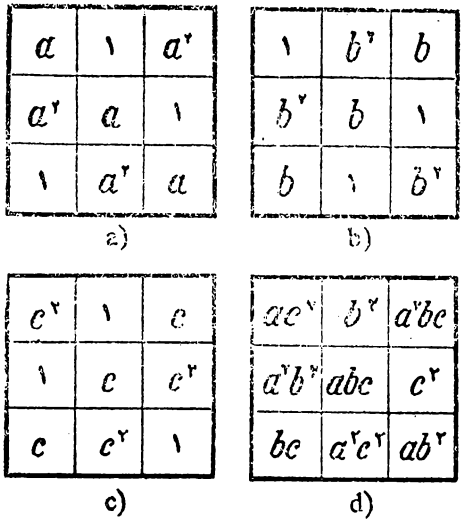
۱.۳۴۲ . سه مربع وفقی کمکی با حاصلضرب ثابت تشکیل دهید.

دو مربع اول با حاصلضرب ثابت a^3 و b^3 هستند و با همان ترتیبی که در متن مسأله شرح داده شده است، ساخته شده‌اند (شکلهای a و b صفحهٔ بعد). مربع سوم را هم برهمین اساس با حاصلضرب ثابت c^3 بسازید، ضمناً ابتدا مقادیر ۱ ، c و c^2 را در خانه‌های همان قطری قرار دهید که در مربع دوم از مقادیر ۱ ، b و b^2 استفاده کرده بودید، منتهی دراینجا از گوشهٔ راست پایین، به‌طرف گوشهٔ چپ بالا بروید (شکل c صفحهٔ بعد).

۱	a^2b	ac
bc	a	a^2
a^3	c	b

حالا، سه مربع را رویهم می‌گذاریم و عددهایی راکه دریك خانه هستند، درهم ضرب می‌کنیم ؛ همان مربع موردنظر بدست می‌آید (شکل d)که مربعی باحاصلضرب‌ثابت $a^3b^3c^3$ است.

۲.۳۴۲. جواب را روی شکل می‌بینید. مربوط به مسألهٔ ۲.۳۴۲



مربوط به مسألهٔ ۱.۳۴۲

بخش سیزدهم

I.۳۴۳. بنابرشرط مسأله باید هرعددباعدد دیگر، تنها در وضع‌قرار گرفتن رقمها اختلاف داشته باشد.

یك رقم، و مثلاً ۱ را، درنظر می‌گیریم؛ این رقم می‌تواند درهر جایی از عدد ده رقمی قرارگیرد. تا اینجا ۱۰ عدد ده رقمی ممکن بدست می‌آید. درهرکدام ازاین عددها، ۹ جای آزاد وجود دارد، که درهرکدام از آنها می‌توان رقم دوم، و مثلاً ۲ را، قرارداد. به این ترتیب ۱۰ × ۹، یعنی ۹۰ عدد ده رقمی پیدا می‌شودکه درهرکدام ازآنها، ۸ جای آزاد برای رقم سوم وجود دارد. اگر این رقم سوم را ۳ بگیریم، می‌توانیم آنرا درهر یك ازاین جاهای آزاد بگذاریم و در نتیجه ۸ × ۹ × ۱۰، یعنی ۷۲۰ عدد بدست‌آوریم، که درهرکدام ازآنها، ۷ جای‌آزاد برای رقم چهارم وجود دارد. تمام حالتهای ممکن برای قراردادن رقم چهارم (۴)، منجر به ۷ × ۸ × ۹ × ۱۰، یعنی ۵۰۴۰ عدد با شش جای آزاد می‌شود.

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، معلوم می‌شود که با ۱۰ رقم می‌توان به اندازهٔ

$$۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۳۶۲۸۸۰۰$$

عدد مختلف ساخت که درهرکدام، از هر رقم، تنها یکبار استفاده شده باشد. ولی، صفرهم دربین رقمهای ما وجود دارد و بنابراین همهٔ این ۳۶۲۸۸۰۰ حالت، عددهایی ده رقمی نمی‌شود. وقتی که صفر به‌جای نخستین رقم سمت چپ قرارگیرد و مثلا عدد ۰۱۲۳۴۵۶۷۸۹ را به‌وجود آورد، نمی‌تواند عددی ده رقمی به‌حساب آید، این یك عدد نه رقمی است. تعداد عددهایی که با صفر شروع می‌شود درست برابراست با تعداد عددهایی که باهرکدام از دیگر رقمها شروع می‌شود و بنابراین تعداد آنها $\frac{۱}{۱۰}$ تعداد کل است (چون تعدادرقمها برابر ۱۰ است). به‌این‌ترتیب، به اندازهٔ $\frac{۱}{۱۰}$ از ۳۶۲۸۸۰۰ عدد، با صفر شروع می‌شوند وعددهایی نه‌رقمی بدست‌می‌آیند. بقیهٔ‌عددها، که تعداد آنها به اندازهٔ $\frac{۹}{۱۰}$ عدد ۳۶۲۸۸۰۰ است، عددهایی ده رقمی با شرطهای مسأله خواهند بود. به‌این ترتیب، با ۱۰ رقم می‌توان به اندازهٔ $\frac{۹\times۳۶۲۸۸۰۰}{۱۰}$ یعنی ۳۲۶۵۹۲۰ عدد ساخت، به نحوی که درهرکدام از آنها، از هررقم، تنها یکبار استفاده شده باشد.

II.۳۴۳. جواب: ۵۴۸۶۹۶۸۴۵ = ۹ : ۴۹۳۸۲۷۱۶۰۵. آیا عدد ده رقمی دیگر (بدون تکرار رقمها) وجود دارد که درتقسیم بر ۹، منجربه یك عدد متقارن بشود؟

III.۳۴۳. حاصلضرب عدد a درهرکدام از عددهای گروه اول، از نه رقم بدون تکرار و حاصلضرب عدد b در هرکدام از عددهای گروه‌اول، از ده رقم بدون تکرار تشکیل شده است. حاصلضرب عددهای a و b درهر کدام از عددهای گروه دوم، شامل رقمهای تکراری است. عددهای گروه اول، مقسوم‌علیه مشترکی، به‌جز واحد، با عددهای a و b ندارند؛ ولی، عددهای گروه دوم با a و b، مقسوم‌علیه مشترك‌دارند. اگر عدد a را در

۸ ضرب وسپس حاصلضرب‌را با ۹ جمع کنیم، عدد b بدست می‌آید:

$$۱۲۳۴۵۶۷۸۹ \times ۸ + ۹ = ۹۸۷۶۵۴۳۲۱$$

IV.۳۴۳. دلیل این امر در اینجاست که حاصلضرب عدد مفروض در ۹، تنها از رقمهای مساوی واحد، درست شده است:

$$۱۲۳۴۵۶۷۹ \times ۹ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱$$

I.۳۴۴. من به‌طور ساده به جدول مجذور عددهای ۳۲ تا ۹۹ نگاه می‌کنم و محاسبهٔ مربوطه‌را انجام می‌دهم. ازاینگونه روش حل نباید غافل بود. عدد دیگری‌که با همین خاصیت وجود دارد، عدد ۲۰۲۵ است:

$$(۲۰ + ۲۵)^۲ = ۲۰۲۵$$

۳۴۵. تجربهٔ اول. قبلاً این مطلب را یادآوری می‌کنیم‌که اگر به جای گروه‌عددهای چهارتایی (a ، b ، c ، d) یکی ازگروههایی راکه از راه تبدیل‌دوری‌آنها بدست می‌آید، یعنی (d، a، b، c) ، (c، d، a، b) (b، c، d، a) یا (c، b، a، d) ، (b، a، d، c) وغیره را انتخاب‌کنیم، در تشکیل، تفاضلها، هیچ تغییری حاصل نمی‌شود، زیرا تفاضلها، هیچ ارتباطی به‌جای عددها ندارد و تنها مربوط به مجاورت یك عدد با عدد دیگر است (عدد چهارم را مجاور عدد اول به‌حساب می‌آوریم).

حالا ببینیم، بدون توجه به مقدار عددها، و تنها با توجه به زوج یا فرد بودن‌آنها، چند نوع گروه نخستین می‌توانیم داشته باشیم.

ترکیب‌اول، همهٔ عددها زوج‌اند: [ز، ز، ز، ز] ؛ ترکیب‌دوم، سه عدد زوج و یك عدد فرد: [ف، ز،ز،ز] ؛ و بالاخره: [ف،ف،ز،ز]؛ [ف،ف، ف، ز] ؛ [ف، ف،ف،ف]؛ رویهم شش ترکیب مختلف. هرترکیب دیگری، بدون تردید یکی از تبدیلهای دوری یکی از این شش حالت خواهد بود. در هرکدام ازاین شش‌گروه، چهارمین تفاضلها، منحصراً از عددهای زوج تشکیل شده است. این حکم، برای ترکیب نوع اول (که هرچهار عدد زوج‌اند)، روشن است. حکم‌را، برای ترکیب نوع دوم، یعنی‌حالت [ف،ز، ز ، ز]$=A_0$ ، آزمایش می‌کنیم. چون همیشه تفاضل دو عدد زوج یا دو عدد فرد، عددی است زوج و تفاضل یك‌عدد زوج و یك‌عدد فرد، عددی

است فرد، داریم:

$$A_1=[\text{ف}, \text{ف}, \text{ز}, \text{ز}], \qquad A_2=[\text{ف}, \text{ز}, \text{ف}, \text{ز}],$$
$$A_3=[\text{ف}, \text{ف}, \text{ف}, \text{ف}], \qquad A_4=[\text{ز}, \text{ز}, \text{ز}, \text{ز}]$$

خودتان چهار ترکیب‌دیگررا آزمایش‌کنید. درهمهٔ حالتها، چهارمین تفاضلها (A_4)، تنها از عددهای زوج تشکیل‌شده است (یعنی، رشته‌عددهای A_4، مضربی است از ۲).

حالا، ثابت می‌کنیم که همهٔ عددهای هشتمین تفاضلها (A_8)، مضربی است از۴. برای اثبات، عددهای تفاضلهای چهارم‌را نصف‌می‌کنیم ونخستین رشتهٔ تفاضلها را ازاین نصف عـددها، تشکیل می‌دهیم. چه تفاوتی بین این رشته (یعنی تفاضلهایی‌کـه ازنصف عددها بدست می‌آید) بـا پنجمین رشتهٔ تفاضلهای مـا خواهد بود؟ عـددهای این رشته، نصف عددهـای رشتهٔ A_5 مـی‌شود. مثلاً اگـر داشته باشیم: $A_4=(۴,۶,۱۲,۲۲)$، دراینصـورت خواهیم‌داشت: $A_5=(۲,۶,۱۰,۱۸)$. ولی اگرعددهای رشتهٔاول رانصف کنیم: $(۲,۳,۶,۱۱)$، رشتهٔ تفاضلها هـم نصف می‌شود: $(۱,۳,۵,۹)$.

همین بستگی بین رشته تفاضلهای بعدی‌هم برقرار خواهد بود، یعنی دومین تفاضلهایی که ازاین نصف عددها بدست می‌آید، نصف رشتهٔ عددهای A_6 و سومین تفاضلها، نصف رشته عددهای A_7 وچهارمین تفاضلها،نصف رشته عددهای A_8 خواهد بود. به‌این ترتیب، اگـر عددهای ایـن‌چهارمین تفاضلها را دوبرابرکنیم، همان رشتهٔ A_8 بدست می‌آید. ولـی، می‌دانیم‌کـه با تشکیل چهارمین تفاضلها، بدون تردید به‌چهار عدد مضرب ۲ می‌رسیم‌و بنابراین دوبرابرآنها، یعنی A_8، مضربی از ۴ خواهد بـود. مثلاً ، اگـر داشته باشیم $A_4=(۴, ۶,۱۲, ۲۲)$ (عددهای آن مضربی از۲ هستند). به ترتیب خواهیم داشت:

$$A_5=(۲,۶,۱۰,۱۸); \qquad A_6=(۴,۴,۸,۱۶);$$
$$A_7=(۰,۴,۸,۱۲); \qquad A_8=(۴,۴,۴,۱۲)$$

که درآن، عددهای A_8 مضربی از ۴ هستند.

اگر استدلال را به همین ترتیب ادامه دهیم، معلوم می‌شود کـه در

چهارمرحلهٔ بعد، یعنی وقتی‌که به $A_{۱۲}$ برسیم، عددهایی پیدا می‌شودکه‌بر ۸، یعنی $۲^۳$ بخش‌پذیرند؛ و همچنین عددهای رشتهٔ $A_{۱۶}$ بر $۲^۴$ و عددهای رشتهٔ $A_{۲۰}$ بر $۲^۵$ بخش‌پذیرند وغیره. مثلاً، عددهای رشتهٔ $A_{۴۰}$ بر $۲^{۱۰}$، یعنی ۱۰۲۴ بخش‌پذیر خواهند بود.

حالا، فرض‌کنید چهار عدد اولیه، ازه ۱۰۰۰ کوچکتر باشند. اگرمثلاً تا تفاضلهای ردیف ۳۹، هیچکدام شامل چهار عدد مساوی صفر نباشد، تفاضلهای چهلم، حتماً از چهار عدد مساوی‌صفر تشکیل می‌شود، زیرا، این تفاضلها باید بر $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ بخش‌پذیر باشند، درحالیکه همهٔ‌آنها از ۱۰۰۰ کوچکترند و عدد کوچکتر از ۱۰۰۰ هم نمی‌تواند بر ۱۰۲۴ بخش پذیر باشد، مگر اینکه مساوی صفر شود. یعنی، همهٔ عددهای $A_{۴۰}$ مساوی‌صفر می‌شود.

اگر عددهای اولیه بزرگتر از ۱۰۰۰، ولی کوچکتر از یك‌ملیون باشد ، دست‌کم در هشتادمین تفاضلها، باید به چهارعدد مساوی صفربرسیم (در عمل خیلی زودتر، این نتیجه به‌دست می‌آید)، زیرا عددهای $A_{۸۰}$ باید بر $۲^{۲۰}$، یعنی بر ۱۰۴۸۵۷۶ بخش‌پذیر باشند، وتنها عدد غیرمنفی کوچکتر از ۱۰۰۰۰۰۰ که بر ۱۰۴۸۵۷۶ بخش‌پذیر است، صفر می‌باشد. به‌همین ترتیب، می‌توان دربارهٔ هرچهار عدد اولیه، استدلال‌کرد.

به این ترتیب،هیچ چهارعددی وجود نداردکه‌تفاضلهای متوالی‌آنها، دیر یا زود به چهار عدد مساوی صفر، نرسد.

تجربهٔ دوم. برای اثبات، می‌توان این طرح را دنبال‌کرد:

۱) به‌سادگی می‌توان ثابت‌کرد که مجموع مجذورهای رقمهای یك عدد (به‌شرطی‌که تعداد رقمهای‌آن‌کمتر از ۳ نباشد) ، همیشه از خود عدد کوچکتر است؛ از اینجا نتیجه می‌شودکه هرعددی انتخاب کنیم، درتجربهٔ خود، دیر یا زود به عددی دورقمی‌می‌رسیم.

۲) برای عددهای دو رقمی هم می‌توان مستقیماً، خاصیت موردنظر را آزمایش‌کرد.

۳۴۹. V. اگریك واحد ازعددکم‌کنیم وسپس این عدد ۱ را جداگانه بنویسیم، عدد ما به این صورت در می‌آید:

$$\underbrace{۱۱\cdots۱}_{n\text{ مرتبه}}\ \underbrace{۵۵\cdots۵}_{n\text{ مرتبه}}+۱$$

این عدد به ازای $n=۱$ مساوی $۱+۱۵$ ، یعنی ۱۶ و به ازای $n=۲$ مساوی $۱+۱۱۵۵$ ، یعنی ۱۱۵۶ می‌شود و غیره. عدد ۱۱...۱ را می‌توانیم به صورت مجموع توانهای متوالی ۱۰ بنویسیم:

$$\underbrace{۱۱\cdots۱}_{n\text{ مرتبه}}=۱۰^{n-۱}+۱۰^{n-۲}+\cdots+۱۰+۱$$

با توجه به این مطلب، عدد مورد نظر را می‌توان به‌ترتیب چنین‌نوشت:

$$=۱+\underbrace{۵۵\cdots۵}_{n\text{ مرتبه}}\underbrace{۰۰\cdots۰}_{n\text{ مرتبه}}\underbrace{۱۱\cdots۱}_{n\text{ مرتبه}}+۱=\underbrace{۱۱\cdots۱}_{n\text{ مرتبه}}\underbrace{۵۵\cdots۵}_{n\text{ مرتبه}}+۱=$$

$$=۱+(۱۰^n+۵)\underbrace{۱۱\cdots۱}_{n\text{ مرتبه}}=۱+۵\times۱۰^n+\underbrace{۱۱\cdots۱}_{n\text{ مرتبه}}\times۱۰^n+۵\times\underbrace{۱۱\cdots۱}_{n\text{ مرتبه}}=$$

$$=۱+(۵+۱۰^n)(۱+۱۰+\cdots+۱۰^{n-۲}+۱۰^{n-۱})=$$

عبارت داخل پرانتز اول چنین است:

$$۱+۱۰+\cdots+۱۰^{n-۲}+۱۰^{n-۱}=\frac{۱۰^n-۱}{۱۰-۱}$$

(بعضی آگاهیهای مربوط به رابطه را در بخش یازدهم از صفحهٔ ۳۱۴ به بعد داده‌ایم). دراینصورت

$$=۱+\frac{(۱۰^n-۱)(۱۰^n+۵)}{۱۰-۱}=۱+۵\cdots۵۵\ ۱\cdots۱۱$$

$$=\frac{۱۰^{۲n}+۴\times۱۰^n+۴}{۹}=\left(\frac{۱۰^n+۲}{۳}\right)^۲$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

دومین عددی که این خاصیت را دارد ۴۹ است. دراین حالت داریم :

$$\underbrace{۴۴\ldots۴}_{n\text{ مرتبه}}\ \underbrace{۸۸\ldots۸}_{n\text{ مرتبه}}\ ۹=\underbrace{(۶۶\ldots۶}_{n\text{ مرتبه}}+۱)^۲=\left(\frac{۲\times۱۰^n+۱}{۳}\right)^۲$$

اثبات این حکم، کاملاً شبیه حالت قبل است.

۳۴۹. VI. عدد ۸۱ هم همین خاصیت را دارد؛

$$\underbrace{۹۹\ldots۹}_{n\text{ مرتبه}}{}^۲=\underbrace{۹۹\ldots۹}_{n-۱\text{ مرتبه}}\ ۸\ \underbrace{۰۰\ldots۰۱}_{n-۱\text{ مرتبه}}$$

۳۵۰. I. نمایش عددهای ۱۱ تا ۲۶، با استفاده از پنج‌بار عدد ۲:

$۱۱=۲۲:۲+۲-۲,$ $۱۹=۲۲-۲-\frac{۲}{۲},$

$۱۲=۲\times۲\times۲+۲+۲,$ $۲۰=۲۲+۲-۲-۲,$

$۱۳=(۲۲+۲+۲):۲,$ $۲۱=۲۲-۲+\frac{۲}{۲},$

$۱۴=۲\times۲\times۲\times۲-۲,$ $۲۲=۲۲\times۲-۲۲,$

$۱۵=۲۲:۲+۲+۲,$ $۲۳=۲۲+۲-\frac{۲}{۲},$

$۱۶=(۲\times۲+۲+۲)\times۲,$ $۲۴=۲۲-۲+۲+۲,$

$۱۷=(۲\times۲)^۲+\frac{۲}{۲},$ $۲۵=۲۲+۲+\frac{۲}{۲},$

$۱۸=۲\times۲\times۲\times۲+۲,$ $۲۶=۲\times(\frac{۲۲}{۲}+۲)$

۳۵۰. II.

$۱=(۴:۴)\times(۴:۴),$ $۶=۴+(۴+۴):۴$

$۲=(۴:۴)+(۴:۴),$ $۷=۴+۴-۴:۴,$

$۳=(۴+۴+۴):۴,$ $۸=۴+۴+۴-۴,$

$۴=۴+(۴-۴)\times۴,$ $۹=۴+۴+۴:۴,$

$۵=(۴\times۴+۴):۴,$ $۱۰=(۴۴-۴):۴$

۳۵۰. III. رابطهٔ مربوط به‌بعضی عددها را دراینجا می‌دهیم:

$$۲=(n:n)+(n:n),\qquad ۴=\frac{n-\dot{n}}{\dot{n}+\dot{n}}$$

$$۷=\frac{n-\dot{n}-\dot{n}}{\dot{n}},\qquad ۱۲=\frac{n+\dot{n}+\dot{n}}{\dot{n}}$$

$$۱۳=\frac{n}{\dot{n}}+\sqrt{\frac{n}{\dot{n}}},\qquad ۱۵=\frac{n}{\dot{n}}+\left(\sqrt{\frac{n}{\dot{n}}}\right)!$$

$$۱۷=\frac{n+n-\dot{n}}{\dot{n}},\qquad ۲۱=\frac{n+n+\dot{n}}{\dot{n}}$$

برای بقیهٔ عددها، خودتان رابطه‌ها را پیدا کنید.

۳۵۰.IV. برای عددهای ۳ تا ۹ داریم:

$$۳=\frac{۱۷۴۶۹}{۵۸۲۳},\quad ۵=\frac{۱۳۴۸۵}{۲۶۹۷},\quad ۶=\frac{۱۷۶۵۸}{۲۹۴۳},$$

$$۷=\frac{۱۶۷۵۸}{۲۳۹۴},\quad ۸=\frac{۲۵۴۹۶}{۳۱۸۷},\quad ۹=\frac{۵۷۴۲۹}{۶۳۸۱}$$

و عدد ۱ را به‌کمك نه رقم، می‌توان به‌این صورت نشان داد:

$$۱=۱^{۲۳۴۵۶۷۸۹}$$

(توان این عدد را به هر ترتیب دیگری هم، با رقمهای ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹، می‌توان نوشت).

۳۵۰.V. $$۹=\frac{۹۵۷۴۲}{۱۰۶۳۸}=\frac{۷۵۲۴۹}{۰۸۳۶۱}=\frac{۵۸۲۳۹}{۰۶۴۷۱}.$$

۳۵۱.IX. چهار عدد وجود دارد که هرکدام از آنها به اندازهٔ ۱+ یا ۱− با مجموع فاکتوریلهای رقمهایشان، تفاوت دارد (۰!=۱):

۱۴۶۶، ۸۱۳۶۸، ۳۷۲۹۷۰، ۳۷۲۹۷۳

۳۵۱.X. عدد مجهول را n می‌گیریم. بنابر فرض، عدد $n^۲$ به‌همان

سه رقم عدد n ختم‌شده است، بنابراین $n^۲ - n$ به سه‌رقم مساوی صفرختم می‌شود.

حالا، عبارت $n^k - n$ را درنظر می‌گیریم (k عددی صحیح و مثبت است). داریم:

$$n^k - n = n(n^{k-۱} - ۱)$$

روشن است که این عبارت‌هم‌به n و هم به $n - ۱$ و بنابراین به حاصلضرب آنها، یعنی $n^۲ - n$، بخش‌پذیر است. ولی،چون $n^۲ - n$ به سه رقم‌مساوی صفر ختم شده است،عدد $n^k - n$ هم دست‌کم باید به سه رقم مساوی‌صفر ختم شده باشد، یعنی عدد n^k ، به ازای هر مقدار مثبت و صحیح k، به همان سه رقم عدد n ختم می‌شود. بنابراین، برای حل مسأله، کافی است تنها دربارهٔ عددهایی گفتگو کنیم که مجذور آنها به‌همان سه رقم خود عدد، ختم شده باشند.

عددهای n و $n - ۱$ دوعدد پشت سرهم هستند و بنابراین نسبت به‌هم اولند، ضمناً حاصلضرب‌آنها باید بر ۱۰۰۰ بخش‌پذیر باشد ($n^۲ - n$، یعنی حاصلضرب n و $n - ۱$، به سه رقم مساوی صفر ختم شده است).

از اینجا نتیجه می‌گیریم که از دوعدد n و $n - ۱$، باید یکی زوج و بخش‌پذیر بر ۸ و دیگری فرد و بخش‌پذیر بر ۱۲۵ باشد. عددهای سه رقمی فرد را که بر ۱۲۵ بخش‌پذیر باشند، می‌توان به‌سادگی پیدا کرد. این عددها عبارتند از ۱۲۵، ۳۷۵، ۶۲۵ و ۸۷۵. عددهای همسایهٔ این چهار عدد عبارتند از: ۱۲۴، ۱۲۶، ۳۷۴، ۳۷۶، ۶۲۴، ۶۲۶، ۸۷۴ و ۸۷۶ . ولی، از این هشت عدد، تنها دو عدد ۳۷۶ و ۶۲۴ بر ۸ بخش‌پذیرند ، بنابراین، عددهای سه رقمی که در هرتوانی به خود این سه رقم ختم می‌شوند، همان دوعدد ۳۷۶ و ۶۲۵ هستند.

IV.۳۵۲. کوچکترین‌عددرا x می‌گیریم، بنابراین دومین عدد گروه اول $x + ۱$، سومین عدد $x + ۲$ و بالاخره $(n + ۱)$ اُمین عدد گروه اول برابر $x + n$ خواهد شد.

اولین عدد گروه دوم برابر $x + n + ۱$، دومین عدد $x + n + ۲$ و

بالاخره n امین عدد گروه دوم برابر $x+2n$ خواهد شد. به این‌ترتیب، معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$x^2+(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+n)^2= \qquad (*)$$
$$=(x+n+1)^2+(x+n+2)^2+\ldots+(x+2n)^2$$

برای ساده‌کردن این معادله، جملهٔ x^2 را در سمت چپ تساوی نگه می‌داریم و همهٔ دیگر جمله‌ها را به‌سمت راست تساوی‌می‌بریم و به‌صورت تفاضلهای مجذورهای کامل، گروه‌بندی می‌کنیم:

$$x^2=[(x+n+1)^2-(x+1)^2]+[(x+n+2)^2-(x+2)^2]+$$
$$+\ldots+[(x+2n)^2-(x+n)^2]$$

اگر مقدار داخل هرکدام از کروشه‌ها را تجزیه‌کنیم، بدست می‌دید:

$$x^2=n(2x+n+2)+n(2x+n+4)+\ldots+n(2x+n+2n)$$

و یا

$$x^2=n[\underbrace{(2x+2x+\ldots+2x)}_{n\text{ جمله}}+\underbrace{(n+n+\ldots+n)}_{n\text{ جمله}}+$$
$$+(2+4+\ldots+2n)]$$

در پرانتزآخر، مجموع n جمله ازیك تصاعد حسابی است و بنابراین‌داریم:

$$2+4+\ldots+2n=\frac{(2+2n)n}{2}=(n+1)n$$

در نتیجه، به معادلهٔ درجه دوم زیر، نسبت به x ، می‌رسیم:

$$x^2-2n^2x-n^2(2n+1)=0$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$x_1=n(2n+1), \quad x_2=-n \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

$x_1=n(2n+1)$ را در نظر می‌گیریم. $n=1$ فرض می‌کنیم ، و این به معنای‌آنست‌که در سمت‌راست تساوی (*) ، یك جمله و در سمت چپ‌آن، دوجمله درنظربگیریم؛ وقتی $n=1$ باشد $x_1=3$ می‌شود و بدست‌می‌آید.

$$۳^۲+۴^۲=۵^۲$$

برای $n=۲$، در سمت راست تساوی (*)، دوجمله و در سمت چپ‌آن،سه جمله پیدا می‌شود. وقتی $n=۲$ باشد، $x_۱=۱۰$ می‌شود و بدست می‌آید:

$$۱۰^۲+۱۱^۲+۱۲^۲=۱۳^۲+۱۴^۲$$

برای $n=۳$ ، در سمت راست تساوی (*) ، سه جمله و در سمت چپ آن، چهار جمله و مقدار $x_۱=۲۱$ ، بدست می‌آید و داریم:

$$۲۱^۲+۲۲^۲+۲۳^۲+۲۴^۲=۲۵^۲+۲۶^۲+۲۷^۲$$

حالا دیگر می‌توانیم تساوی‌مجموع مربعهای عددهای پشت سرهم‌را، تا هرجا که بخواهیم ادامه دهیم. در حالتی‌که جواب $x_۲=n-$ را درنظر بگیریم، تساوی (*) به یك اتحاد نسبت به n تبدیل می‌شود:

$$(-n)^۲+(-n+۱)^۲+\ldots+(-۱)^۲=۱^۲+۲^۲+۳^۲+\ldots+n^۲$$

۳۵۲. VI در مربع $n\times n$ ، که از $n^۲$ خانهٔ مساوی تشکیل شده است، به تعداد $\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲$ مستطیل وجود دارد.

۳۵۲.VIII. این رابطه روشن است (صفحهٔ ۴۴۷ را ببینید):

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+\ldots+n^۳=(۱+۲+۳+\ldots+n)^۲$$

جمله‌های این مجموع را، یك درمیان گروه‌بندی می‌کنیم:

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+\ldots+(۲k-۱)^۳+(۲k)^۳=$$
$$=[۱^۳+۳^۳+\ldots+(۲k-۱)^۳]+[۲^۳+۴^۳+\ldots+(۲k)^۳]=$$
$$=[۱^۳+۳^۳+\ldots+(۲k-۱)^۳]+۲^۳[۱^۳+۲^۳+\ldots+k^۳],$$

که از آنجا بدست می‌آید :

$$۱^۳+۳^۳+\ldots+(۲k-۱)^۳=[۱^۳+۲^۳+\ldots+(۲k)^۳]-$$
$$-۸[۱^۳+۲^۳+\ldots+k^۳]$$

یا

$$۱^۳+۳^۳+\ldots+(۲k-۱)^۳=(۱+۲+۳+\ldots+۲k)^۲-$$
$$-(۱+۲+۳+\ldots+k)^۲$$

به این ترتیب، رابطه‌ای برای مجموع مکعبهای عددهای فرد متوالی، بدست آمد. ازاین رابطه، باید برای تبدیل عبارت زیر، استفاده کرد:

$$\frac{[۱^۲+۳^۲+\ldots+(۲k-۱)^۳]+[۱+۳+\ldots+(۲k-۱)]}{۲}$$

که در آنصورت، چنین می‌شود:

$$\frac{(۱+۲+\ldots+۲k)^۲-۸(۱+۲+\ldots+k)^۲+[۱+۳+\ldots+(۲k-۱)]}{۲}$$

مقادیر داخل پرانتزها را، به‌عنوان مجموع جمله‌های یك تصاعد حسابی، بدست می‌آوریم، دراینصورت:

$$S_۱+S_۲+\ldots+S_{۲k-۱}=$$

$$=\frac{\left[\frac{(۱+۲k)۲k}{۲}\right]^۲-۸\left[\frac{(۱+k)k}{۲}\right]^۲+\frac{[۱+(۲k-۱)]k}{۲}}{۲}=$$

$$=\frac{(۱+۲k)^۲k^۲-۲(۱+k)^۲k^۲+k^۲}{۲}=$$

$$=\frac{k^۲(۱+۴k+۴k^۲-۲-۴k-۲k^۲+۱)}{۲}=\frac{k^۲.۲k^۲}{۲}=k^۴$$

X.۳۵۲. بنا به‌شرط، سطر ردیف nام از n عدد متوالی فرد تشکیل شده است که کوچکترین آنها را به a_n نشان داده‌ایم. بزرگترین جملهٔ این سطر را (که ضمناً آخرین جملهٔ آنست) به b_n نشان می‌دهیم. روشن است که اگر عدد ۲ را $n-۱$ بار به a_n اضافه کنیم، عدد b_n بدست می‌آید:

$$b_n=a_n+۲(n-۱)$$

در نتیجه، برای سطر $(n-۱)$ام داریم:

$$b_{n-۱}=a_{n-۱}+۲(n-۲)$$

از روش تشکیل سطرها هم، معلوم است که

$$a_n = b_{n-1} + ۲$$

اگر دراین تساوی، به‌جای b_{n-1} ، مقدارش را قرار دهیم، بدست می‌آید:

$$a_n = a_{n-1} + ۲(n-۱)$$

ویا

$$a_n - a_{n-1} = ۲(n-۱)$$

اگردراین تساوی به‌ترتیب n را برابر ۲، ۳، ...، $n-۱$ بگیریم، بدست می‌آید :

$$a_۲ - a_۱ = ۲$$

$$a_۳ - a_۲ = ۴$$

.....

$$a_{n-1} - a_{n-2} = ۲(n-۲)$$

$$a_n - a_{n-1} = ۲(n-۱)$$

از جمع این تساویها، بدست می‌آید:

$$a_n - a_۱ = ۲[۱+۲+...+(n-۱)] = n(n-۱)$$

و از آنجا

$$a_n = a_۱ + n(n-۱) = n^۲ - n + ۱$$

به‌این ترتیب، رابطهٔ بین جملهٔ اول‌هرسطر مثلث نیکوماك ، با شمارهٔ‌ردیف آن سطر، بدست آمد.

حالا، با توجه به اینکه‌تعداد جمله‌های هر سطر برابر با n و تفاضل هر دوجملهٔ متوالی‌آن برابر با ۲ می‌باشد، شما خودتان می‌توانید مجموع جمله‌های سطر را محاسبه‌کنید و نتیجه بگیریدکه این مجموع واقعاً هم‌برابر است با $n^۳$.

۳۵۳. a، b، c و d را رقمهایی با شرط $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$ ، ولی $a > d$ ، می‌گیریم، دراینصورت داریم:

$$M = [a][b][c][d] \qquad m = [d][c][b][a]$$

تفاضل $r = M - m$ را پیدا می‌کنیم. تنها دو حالت را درنظر می‌گیریم:

۱) $b > c$ ، دراینصورت

$$\frac{[a][b][c][d] - [d][c][b][a]}{[a-d][b-۱-c][۱۰+c-۱-b][۱۰+d-a]}$$

۲) $b = c$ ، دراینصورت

$$\frac{[a][b][c][d] - [d][c][b][a]}{[a-۱-d][۱۰+b-۱-c][۱۰+c-۱-b][۱۰+d-a]}$$

در حالت اول، مجموع دو رقم‌اول و آخر تفاضل، مساوی ۱۰، و مجموع‌رقمهای وسط، برابر۸می‌باشد. درحالت‌دوم، مجموع رقمهای‌اول‌آخر مساوی ۹ و مجموع دو رقم وسط، مساوی۱۸ می‌شود. یعنی درحالت‌دوم، هرکدام از دو رقم وسط، باید مساوی ۹ باشد.

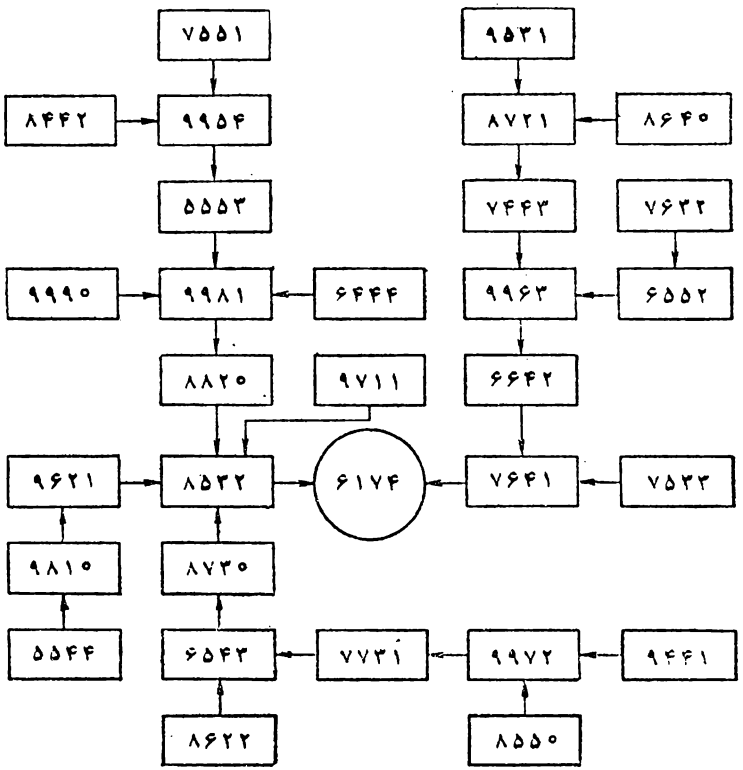
این وضع، نه تنها در تفاضل اول، بلکه برای هرکدام از تفاضلهای متوالی، باید وجود داشته باشد. بنابراین، کافی است، تنها به آن عددهای چهار رقمی بپردازیم که رقمهای‌آنها با شرطهایی که بدست آوریم، سازگار باشد. ازآنجا که در هرعدد، گروه رقمهایی که آنرا تشکیل داده‌اند، و نه نوع ردیف این رقمها، اهمیت دارد، کافی است تنها عددهای چهار رقمی‌زیر را مورد بررسی قرار دهیم:

۹۸۰۱	۸۸۰۲	۷۸۰۳	۶۸۰۴	۵۸۰۵
۹۷۱۱	۸۷۱۲	۷۷۱۳	۶۷۱۴	۵۷۱۵
۹۶۲۱	۸۶۲۲	۷۶۲۳	۶۶۲۴	۵۶۲۵
۹۵۳۱	۸۵۳۲	۷۵۳۳	۶۵۳۴	۵۵۳۵
۹۴۴۱	۸۴۴۲	۷۴۴۳	۶۴۴۴	۵۴۴۵
۹۹۹۰	۸۹۹۱	۷۹۹۲	۶۹۹۳	۵۹۹۴

بنابراین، عدد چهار رقمی اصلی، هرچه‌باشد، رویهم ۳۰ حالت‌ممکن

برای تفاضلها بدست می‌آید (به‌معنای گروه رقمها)، که باید درستی مسأله را روی آنها آزمایش کنیم.

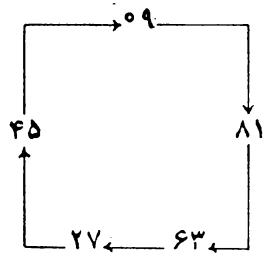
طرح آزمایش این عددها در همین صفحه داده شده است. دراین طرح برای هرگروه رقمها، تنهاعدد بزرگتر نوشته شده است و جهت پیکان، راه عبور یك عدد را به نتیجه‌ای‌که بعدازعمل‌کردن بدست می‌آید، نشان‌می‌دهد. این طرح ثابت می‌کند که برای هرعدد چهار رقمی دلخواه M، بیش‌ازهفت عمل، برای رسیدن به تفاضل ۶۱۷۴، لازم نیست.



مربوط به مسألهٔ ۳۵۳

مهندس و.آ.اودلوو (از مسکو)، نام‌مناسب «قطب» را برای‌آخرین

باقیمانده، انتخاب کرده است. با استفاده از روشی‌که دراینجا آوردیم، به سادگی معلوم می‌شودکه قطب‌عددهای سه رقمی، ۴۹۵ است ، عددهای دو رقمی، دارای قطب نیستند و به‌جای قطب، یك دورهٔ تفاضلهای تکراری به وجود می‌آورند:



برای عددهای پنج‌رقمی ، رقم وسط تفاضل، برابر است با ۹ و چهار رقم دیگر به همان ترتیب عددهای چهار رقمی هستند (خودتان ثابت کنید) . بنابراین، بررسی عددهای پنج‌رقمی هم منجر به‌همان سی عددی می‌شودکه در مورد عددهای چهار رقمی پیدا کردیم، به‌شرطی‌که رقم ۹ را به‌هرکدام ازآنها اضافه‌کنیم. این عددها، سه دور درتفاضلها تشکیل می‌دهند، که یکی ازآنها بسته است، و دوتای دیگر ، شاخه‌های فرعی دارند (طرح صفحهٔ ۷۳۸ را ببینید).

د.آ.ا.وِدلوو، خاصیت‌جالبی برای قطبهاپیدا کرده است. قطب‌عددهای سه رقمی، یعنی ۴۹۵ را درنظر می‌گیریم، رقمهای آنرا به سه‌گروه تقسیم می‌کنیم و رقمهای ۵، ۹ و ۴ را به‌این ترتیب بین‌آنها قرار دهیم:

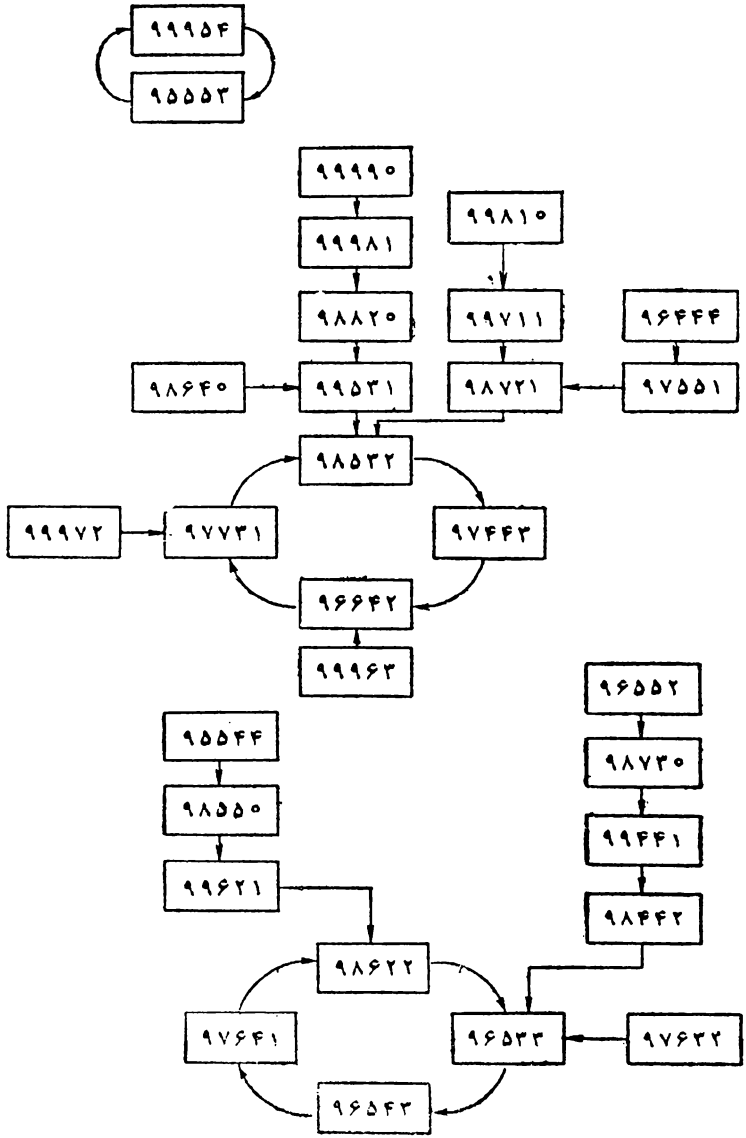
۵ ۹ ۴
↓ ۴ ↓ ۹ ↓ ۵

حالا، اگر در مورد عدد ۵۴۹۹۴۵، که به‌این ترتیب بدست می‌آید، همان قاعدهٔ محاسبهٔ تفاضلها را اجرا کنیم، به خودش برمی‌گردد:

۹۹۵۵۴۴ — ۴۴۵۵۹۹ = ۵۴۹۹۴۵

یعنی، این عدد، قطب عددهای شش رقمی است.

واردکردن رقمهای ۵، ۹ و ۴ را ادامه می‌دهیم:



مربوط به مسألهٔ ۳۵۳

۵ ۹ ۴
↓ ۵۴ ↓ ۹۹ ↓ ۴۵

بازهم به همان نتیجه می‌رسیم:

۹۹۹۵۵۵۴۴۴ − ۴۴۴۵۵۵۹۹۹ = ۵۵۴۹۹۹۴۴۵

یعنی، قطب عددهای نه رقمی بدست می‌آید و غیره.

حالا، عدد ۶۱۷۴، یعنی قطب‌عددهای چهار رقمی را درنظرمی‌گیریم. این عدد را بـه سه‌گـروه تقسیم مـی‌کنیم و رقمهای ۳ و ۶ را درآن وارد می‌کنیم :

۳ ۶
۶ ↓ ۱۷ ↓ ۴

دوباره به عدد ۶۳۱۷۶۴ می‌رسیم کـه در عمل محاسبهٔ تفاضلها بـه‌خودش تبدیل می‌شود:

۷۶۶۴۳۱ − ۱۳۴۶۶۷ = ۶۳۱۷۶۴

یعنی عدد ۶۳۱۷۶۴، یکی از قطبهای عددهای شش‌رقمی است. وارد کردن رقمهای ۳ و ۶ را ادامه می‌دهیم:

۳ ۶
۶۳ ↓ ۱۷ ↓ ۶۴

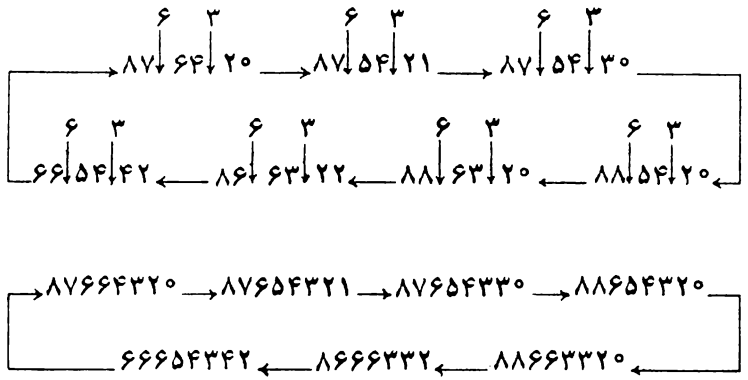
که در مورد آن داریم:

۷۶۶۶۴۳۳۱ − ۱۳۳۴۶۶۶۷ = ۶۳۳۱۷۶۶۴

عدد ۶۳۳۱۷۶۶۴، قطبی ازعددهای هشت رقمی است. این روند رامی‌توان تا بینهایت ادامه داد.

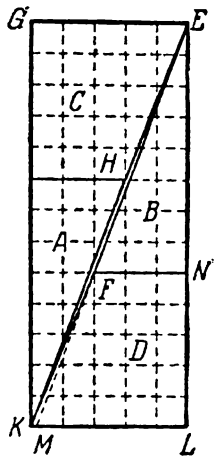
علاوه برآن، اگر دورعددهای شش رقمی را درنظر بگیریم (عددهای شش‌رقمی یك‌دور با شاخه‌های فـرعی و دو قطب دارد کـه یکی از قطبها، منفرد است ـ خودتان امتحان‌کنید)، و در هرعدد دور، همین رقمهای ۳ و ۶ را وارد کنیم، به دوری از عددهای هشت رقمی می‌رسیم.

دراینجا هم، روند وارد کردن رقمهای ۶ و ۳ را می‌یوان تا بینهایت ادامه داد .



بخش چهاردهم

۳۶۳. دوست جوان من به چشمهای خود خیلی اعتماد کرده است و برای تأیید عملهای خود، به‌دنبال استدلال نرفته است و به‌همین‌مناسبت دچار تناقض شده است.



مربوط به مسألهٔ ۳۶۳

برخلاف اظهار او، دوست من هرگز از قطعه‌های مربع، یك‌مستطیل کامل بدست نیاورده است؛ در شکلی که او می‌سازد، حتماً شکافی‌پیدا می‌شود که البته ممکن است به‌چشم‌دیده نشود و یا با قرار دادن قطعه‌ها درکنار یکدیگر محسوس نباشد.

یکی از حالتهای «مناسب» را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که ضلعهای مربع ۶۴ خانه‌ای را به دوقسمت ۵ و ۳ واحدی، تقسیم کرده باشیم (شکل متن مسأله را در صفحهٔ ۴۸۶ ببینید). اگر مثلث A را پهلوی ذوزنقهٔ C، و مثلث B را پهلوی‌ذوزنقهٔ D، آنطورکه درشکل سمت راست‌صفحهٔ۴۸۶ دیده می‌شود، قرار دهیم، دو خط EFK و EHK

بر قطر EK از مستطیل قرار نمی‌گیرند. زیرا خطهای EFK و EHK، خطهای شکسته‌اند، نه خطهای راست و در نقطه‌های F و H ، شکستگی کوچکی دارند.

این مطلب را می‌توان به‌سادگی ثابت‌کرد. M را محل برخوردضلع KL از مستطیل با امتداد ضلع EF از مثلث EFN می‌گیریم.

اگر EFK ، خط راست باشد، نقطهٔ M برنقطهٔ K منطبق‌می‌شود. بامحاسبه، آزمایش می‌کنیم که‌آیا این‌نقطه‌ها بریکدیگر منطبق‌اند یانه .

از تشابه دو مثلث EFN و EML، نتیجه می‌شود:

$$ML : FN = EL : EN \Rightarrow ML : ۳ = ۱۳ : ۸$$

و از آنجا $ML = \frac{۱۳ \times ۳}{۸} = ۴/۸۷۵$ بدست می‌آید، درحالیکه داریم: $KL = ۵$.

همانطورکه می‌بینید،نقطهٔ M برراس K منطبق‌نیست، یعنی‌خطهای EFK و EHK ، شکسته‌اند.

درست است که مساحت مستطیل KLEG شامل ۶۵ خانه است، ولی در این مستطیل، شکاف لوزی‌شکل EFKH وجود داردکه‌مساحت آن برابر با مساحت یکی از خانه‌هاست.

روی دو پرسش می‌ایستیم:

۱) چرا اختلاف مساحت‌مستطیل با مساحت مربع در آزمایشهای‌ما، همیشه برابر با مساحت یك خانه است؟

۲) چه تقسیمی درضلعهای‌مربع انجام دهیم تا با قسمتهای آن بتوان یك مستطیل کامل بدست آورد و در نتیجه مساحتهای مربع و مستطیل‌با هم برابر شود؟

از جبر کمك می‌گیریم. مساحت مربع (شکل صفحهٔ ۴۸۵ را ببینید)، برابر است با

$$(x+y)^۲=x^۲+۲xy+y^۲$$

مساحت مستطیل (همان شکل را ببینید)، برابر است با

$$x(۲x+y)=۲x^۲+xy$$

اختلاف R بین دو مساحت، چنین می‌شود:

$$R=x^۲-xy-y^۲$$

مساحت مستطیل، وقتی با مساحت مربع برابر است که داشته باشیم:

$$x^۲-xy-y^۲=۰$$

که اگر دوطرف این معادله را بر $y^۲$ تقسیم کنیم، به معادله‌ای درجهٔ دوم نسبت به مجهول $\frac{x}{y}$ می‌رسیم:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^۲-\left(\frac{x}{y}\right)-۱=۰$$

با توجه به اینکه تنها جواب مثبت قابل قبول است، بدست می‌آید:

$$\frac{x}{y}=\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

تنها ، درحالتی که نسبت قسمتهای x و y ضلعهای مربع، چنین باشد (که نسبتی گنگ است)، می‌توان مربع را به دو مثلث مساوی و دو ذوذنقهٔ مساوی تقسیم کرد، به‌نحوی که ازآنها بتوان یك مستطیل کامل درست کرد.

وقتی که x و y ، عددهایی گویا باشند، R برابر با صفر نمی‌شود، وقتی x و y ، عددهایی درست باشند، حداقل اختلاف ممکن بین مساحتها $R=۱$ می‌شود. دوست جوان من هم به‌همین حداقل اختلاف R می‌رسید، زیرا، او زوج x و y را دو عدد متوالی از دنبالهٔ فیبوناچی می‌گرفت (در آزمایش اول $x=۵$ ، $y=۳$ (صفحهٔ ۴۸۵)، درآزمایش دوم، $x=۸$، و $y=۵$ و در دو آزمایش‌بعدی $x=۱۳$ ، $y=۸$ و $x=۲۱$ ، $y=۱۳$)،

و می‌دانیم که دو عدد پشت سرهم از رشتهٔ فیبوناچی دریکی از دو معادلهٔ زیر صدق می‌کنند (صفحهٔ ۴۸۲ را ببینید):

$$x^2-xy-y^2=1 \quad \text{یا} \quad x^2-xy-y^2=-1$$

چند کتاب دیگر از مترجم این کتاب

تاریخ ریاضیات

۱. تاریخ حساب
۲. ریاضیات درشرق
۳. سرگذشت آنالیز ریاضی
۴. لگاریتم

سرگرمیها و بازیهای ریاضی

۵. سرگرمیهای ریاضی
۶. سرگرمیهای جبر
۷. سرگرمیهای هندسه
۸. در پی فیثاغورث
۹. اندیشهٔ ریاضی
۱۰. مساله‌های ریاضی،آسان ولی...
۱۱. اشتباه استدلالهای هندسی

کتابهای مساله وکمك درسی

۱۲. روشهای جبر (دردوجلد)
۱۳. روشهای مثلثات
۱۴. مسائل مسابقات ریاضی (ازکنکورهای اتحاد شوروی)
۱۵. ۲۵۰ مسألهٔ حساب
۱۶. مسائل و تمرینهای‌آنالیز ریاضی
۱۷. نامساویها
۱۸. نظریهٔ مجموعه‌ها
۱۹. داستان مجموعه‌ها
۲۰. دستگاههای محدود در ریاضیات
۲۱. ورودی به منطق ریاضی
۲۲. هندسه درگذشته وحال

نظریه‌های ریاضی

۲۳. دورهٔ اختصاصی جبر مقدماتی
۲۴. مثلثات (مستقیم الخطوکروی)
۲۵. تقارن در جبر
۲۶. تقارن در هندسه و جبر
۲۷. عددهای اول
۲۸. مثلثات (درمجموعهٔ سیمرغ)
۲۹. هندسهٔ غیراقلیدسی
۳۰. ریاضیات(محتوی،روش‌واهمیت‌آن)
۳۱. استقراء ریاضی
۳۲. انعکاس

کتابخانه مجازی ریاضیات

این کتاب به سرمایه موسسه انتشارات امیرکبیر به چاپ رسیده است